УДК 51-72

В. М. Мусалимов, Г. Б. Заморуев, А. Д. Перечесова

РАСЧЕТ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ВИНТОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СПИРАЛЬНО-АНИЗОТРОПНЫХ СТЕРЖНЕЙ

Представлен алгоритм расчета упругих констант винтовых элементов спирально-анизотропных стержней, основанный на методах оптимизации. Расчет производился путем минимизации функционала $f(E_1, G_1)$ на заданных интервалах коэффициента Пуассона. В качестве примера спирально-анизотропного стержня рассматривался кабель.

Ключевые слова: *спирально-анизотропный стержень, интегральные упругие постоянные, кабель, методы оптимизации.*

Теория спирально-анизотропных стержней. Многослойные пружины, канаты, тросы, нити представляют собой объекты механики деформируемого твердого тела, которые моделируются как спирально-анизотропные стержни (САС) [1]. На рис. 1 приведена типичная конструкция гибкого кабеля. Механические свойства винтовых составляющих этих конструкций определяются их физико-механическими характеристиками E_1, G_1, ν_1, соотнесенными с геометрией подвижного репера $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{r}$ (рис. 1). Механические свойства самих конструкций традиционно соотнесены с геометрией стержня — осью z и радиусом $\mathbf{r}$ (рис. 1). При механических испытаниях САС регистрируются линейные $\mathbf{e}$ и угловые $\boldsymbol{\theta}$ деформации при различных граничных условиях, определяющих деформированное состояние: свободное и стесненное растяжение, свободное и стесненное кручение. В работах [1, 2] представлены уравнения, связывающие внешние силы и моменты с линейными и угловыми деформациями САС:

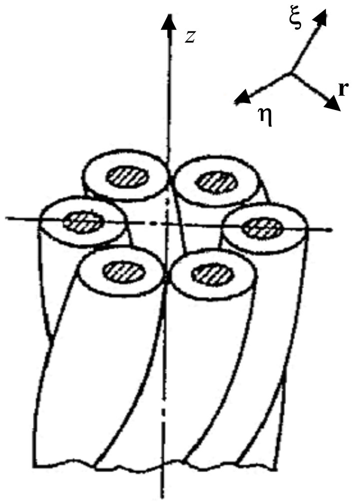

Рис. 1

$$\left.\begin{aligned}\frac{P}{\pi R^2 E_1} &= A_{11} e + A_{12}\hat{\theta};\\ \frac{M}{\pi R^3 E_1} &= A_{21} e + A_{22}\hat{\theta}.\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Здесь при A_{11}, A_{22}, $A_{12} = A_{21}$ — соответственно модули растяжения, кручения, растяжения-кручения; E — модуль упругости САС, P — осевая нагрузка, M — скручивающий момент.

Перепишем уравнения системы (1) в виде:

$$\left.\begin{aligned}\frac{P}{\pi R^2} &= A_{11} E_1\, e + A_{12} E_1\, \hat{\theta};\\ \frac{M}{\pi R^3} &= A_{21} E_1\, e + A_{22} E_1\, \hat{\theta}\end{aligned}\right\}$$

и введем следующие обозначения:

$$A_{11}E_1 = \alpha_{11}, \quad A_{12}E_1 = \alpha_{12}, \quad A_{21}E_1 = \alpha_{21}, \quad A_{22}E_1 = \alpha_{22}.$$

В работах [1, 2] приведены также уравнения, связывающие экспериментально определенные модули с физико-механическими характеристиками винтовых составляющих САС:

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_{11} = G_1(9\phi_1 + 18\phi_2) - \frac{1}{2-\nu_1} 9\phi_2 E_1 + E_1 - 3\phi_1 E_1;\\
&\alpha_{12} = -G_1(3\phi_1 + 12\phi_2) + \frac{1}{2-\nu_1} 6\phi_2 E_1 + \phi_1 E_1;\\
&\alpha_{22} = G_1(\frac{tg^2\alpha_0}{2} + 8\phi_2) - \frac{1}{2-\nu_1} 4\phi_2 E_1,
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

где

$$\phi_1 = 1 - 2\mathrm{ctg}^2\alpha_0 \ln\sec\alpha_0;$$

$$\phi_2 = \frac{1}{2}\sin^2\alpha_0 - \phi_1.$$

Соотношения (2) являются нелинейной алгебраической системой уравнений относительно интегральных упругих постоянных E_1, G_1, ν_1. Целью настоящей статьи является разработка новых подходов к решению таких систем уравнений и определение физико-механических характеристик E_1, G_1, ν_1, что актуально для оценки свойств элементов с микронными радиусами.

Алгоритмы решения слабообусловленных нелинейных систем алгебраических уравнений (оптимизаторы). Ранее для решения системы уравнений использовались вероятностные методы и методы минимизации специально построенного функционала [1, 2]. В настоящей работе для определения интегральных упругих постоянных САС использованы оригинальные оптимизаторы.

Оптимизируемая модель представляется вектором функций

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}),$$

где $y_i(i=\overline{1,m}),\ m \ge 1$ — функции ряда независимых факторов влияния, $x_j(j=\overline{1,n}),\ n \ge 1$.

Все функции $\mathbf{y}$ объединяются в функционал

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m}\left[f_i(\mathbf{x})\mathbf{g}_i\right],$$

где $\mathbf{g}_i$ — вектор весовых коэффициентов для каждой из функций.

Производные от $F(\mathbf{x})$ по $\mathbf{x}$ формулы

$$\frac{dF(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} = 2\sum_{i=1}^{m} f_i(\mathbf{x})\mathbf{g}_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \qquad (3)$$

где $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ — ($m \times n$)-матрица (матрица Якоби), а $f_i(\mathbf{x})$ — вектор функций (3).

С геометрической точки зрения функционал $F(\mathbf{x})$ является гиперповерхностью многих переменных $\mathbf{x}$. Эта так называемая поверхность отклика не может существовать в области отрицательных значений области $F(\mathbf{x})$ и в пределе может касаться гиперплоскости $\mathbf{x}$, в этом случае функционал $F(\mathbf{x})$ имеет точку с нулевым значением и, в свою очередь, $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ является хорошо обусловленной системой уравнений. Во всех других случаях $F(\mathbf{x})$ имеет экстремум (в данной задаче — минимум) при том или ином численном (вещественном) значении $F(\mathbf{x})$.

Производная $\dfrac{dF(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}}$ геометрически является вектором нормали к поверхности отклика (направление вектора — наружу от поверхности), его длина

$$D_n = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right)^2}\ , \tag{4}$$

Единичный вектор нормали (направляющие косинусы) определяет направление скорейшего спуска:

$$D_{n1i} = \frac{\dfrac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x_i}}{D_n}\ .$$

Если произвести сечение поверхности отклика гиперплоскостью, параллельной $\mathbf{x}$, то получим замкнутую линию при n=2, замкнутую поверхность при n=3 или замкнутую гиперповерхность при n>3. Эти геометрические образы принято называть линиями уровня функционала $F(\mathbf{x})$. Они хорошо отображаются на плоской поверхности при n=2. Вектор нормали (перпендикулярный поверхности отклика) нормален и к линиям уровня в данной точке. Поскольку нормаль направлена в сторону увеличения $F(\mathbf{x})$, направляющий вектор имеет знак „минус“.

Общая стратегия поиска оптимального значения (минимума)

1. Задаются начальные значения переменных $\mathbf{x}$.

2. Рассчитываются значения всех исходных функций и функционала $F(\mathbf{x})$.

3. Выбирается направление движения, т.е. задается некоторый вектор $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ (лучше единичный) для движения в направлении этого вектора с шагом λ. На каждом шаге рассчитывается значение $F_1(\mathbf{x})$ и сравнивается с предыдущим значением $F_0(\mathbf{x})$:

— если $F_1(\mathbf{x}) < F_0(\mathbf{x})$, движение продолжается в выбранном направлении;

— если $F_1(\mathbf{x}) > F_0(\mathbf{x})$, движение осуществляется в обратном направлении с уменьшенным шагом ($\lambda = -\dfrac{\lambda}{2}$).

Это условие используется до достижения оптимума на данном шаге с требуемой точностью, таким образом $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{D}\lambda$.

После уточнения нового значения $\mathbf{x}$ шаг считается законченным, направление движения $\mathbf{D}$ изменяется и повторяются шаги с относительными оптимумами, пока не будет достигнуто удовлетворительное решение задачи.

Относительный оптимум на каждом шаге является точкой касания линии движения по направлению $\mathbf{D}$ к некоторой линии уровня функционала $F(\mathbf{x})$.

Опишем широко используемые методы поиска оптимума.

Метод перебора координат — простой, в нем не применяются производные $\dfrac{dF(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}}$. Направление $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ выбирается совпадающим на каждом шаге с одной из осей координат гиперплоскости $\mathbf{x}$. Движение осуществляется с некоторым шагом вдоль произвольной координаты x_i до определения промежуточного оптимума. Затем движение осуществляется вдоль оси x_{i+1} и реализуется второй шаг, до тех пор пока не произойдет перебор всех координат $\mathbf{x}$

задачи. Затем следует вернуться к координате x_i и повторить все действия до достижения удовлетворительного результата.

К достоинствам метода относятся простота, отсутствие необходимости в расчете производных; к недостаткам: как правило, большое количество шагов и иногда фактическая невозможность довести решение до конца в случае сложной, сильно искривленной конфигурации линий уровня.

Метод „деформируемого симплекса“. Реализация алгоритма начинается с задания n+1 точки (стартовый симплекс) для гиперплоскости $\mathbf{x}$, что довольно трудно, с этой целью используется некоторая подпрограмма.

Затем для всех n+1 точек определяются значения всех функций и функционалов $F(\mathbf{x})$, далее производится оценка всех n+1 точек по величине $F(\mathbf{x})$, в результате определяются „худшая точка“, в которой $F(\mathbf{x})$ имеет наибольшее значение (ей присваивается номер 1), и „лучшая“ — где наименьшее (номер n+1).

Далее определяется вектор $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ (направление движения).

Метод аппроксимации параболой сечения поверхности отклика плоскостью, содержащей нормаль поверхности в рассматриваемой точке и перпендикулярной гиперплоскости параметров $\mathbf{x}$. Такое коническое сечение является параболой, и если найти константы параболы, можно одним вычислительным шагом спуститься к ее критическому значению, т.е. с той или иной точностью совершить шаг промежуточной оптимизации.

Достоинством метода является очень высокая скорость расчета, так как отсутствует необходимость „осторожного“ передвижения малыми шагами с расчетом функционала и часто производных. Надежно и быстро может быть получено решение с требуемой точностью при умеренном количестве шагов.

Чрезвычайно эффективным методом оптимизации является метод, условно называемый „*Гребень*“, позволяющий максимально придерживаться линии „гребня“ поверхности отклика, т.е. линии наиболее глубокой и наиболее пологой части „дна долины“ поверхности отклика. Метод использует два типа шагов и основан на геометрических свойствах поверхностей (гиперповерхностей). Производная от $F(\mathbf{x})$ по $\mathbf{x}$, как уже говорилось, геометрически является нормалью к поверхности (и линии уровня) и имеет определенную величину (4). Если двигаться в некотором направлении и последовательно оценивать производную $\dfrac{dF(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}}$, можно получить множество критических значений на „гребне“ (первый тип шагов). Далее при движении по гребню оценивается величина $F(\mathbf{x})$ (второй тип шагов).

Достоинством метода является возможность решить при малом числе шагов практически любую задачу с произвольной топологией линий уровня $F(\mathbf{x})$. К недостаткам относится большое число арифметических операций при определении производных и нормали на каждом малом шаге и, следовательно, относительно большое время работы процессора, зависящее от изначальной математической модели задачи $f(\mathbf{x}), ..., f_m(\mathbf{x})$.

Примеры расчета. В работе в качестве модулей растяжения α_{11}, кручения α_{22}, растяжения-кручения α_{12} использованы данные систематических исследований по механике кабеля. В табл. 1 приведены характеристики двух типов кабеля КГ 3×4+1×2. В табл. 2 приведены расчетные данные для кабеля, полученные вероятностным методом [1, 2], численные значения интегральных упругих постоянных, полученные на основе детерминированного подхода [1], а также методом приведенного оригинального функционала.

Таблица 1

№	α_{11}, Па	α_{12}, Па	α_{22}, Па
1	$2{,}42\cdot10^9$	$1{,}80\cdot10^6$	$5{,}55\cdot10^5$
2	$2{,}20\cdot10^9$	$1{,}94\cdot10^6$	$4{,}23\cdot10^5$

Таблица 2

Метод	E_1, Па		G_1, Па		ν_1	
	1	2	1	2	1	2
Вероятностный	$2{,}38\cdot10^9$	$2{,}16\cdot10^9$	$1{,}66\cdot10^9$	$1{,}50\cdot10^9$	0,300	0,304
На основе детерминированного подхода	$2{,}42\cdot10^9$	$2{,}21\cdot10^9$	$3{,}53\cdot10^8$	$2{,}37\cdot10^8$	0,266	0,428
Приведенного функционала для различных ν_1	$2{,}4465\cdot10^9$	$2{,}2250\cdot10^9$	$7{,}2913\cdot10^8$	$6{,}5977\cdot10^8$	0,300	0,304
	$2{,}4462\cdot10^9$	$2{,}2260\cdot10^9$	$7{,}3056\cdot10^8$	$6{,}5450\cdot10^8$	0,266	0,428

На рис. 2—5 для ν_1=0,3 приведены оценки, полученные с помощью алгоритмов описанных методов. В качестве исходных данных использованы параметры, указанные в строке 1 табл. 1, угол наклона к оси анизотропии упруго-эквивалентных спиралей $\alpha_0 = 15°$. Рис. 2 — программа „Парабола“; 3 — „Гребень“; 4 — „Координатная“; 5 — „Симплекс“ (*а* — графическое отображение работы программы оптимизации; *б* — увеличенное графическое отображение работы программы оптимизации). Результат: E_1=$2{,}4465\cdot10^9$ Па, G_1=$7{,}2913\cdot10^8$ Па.

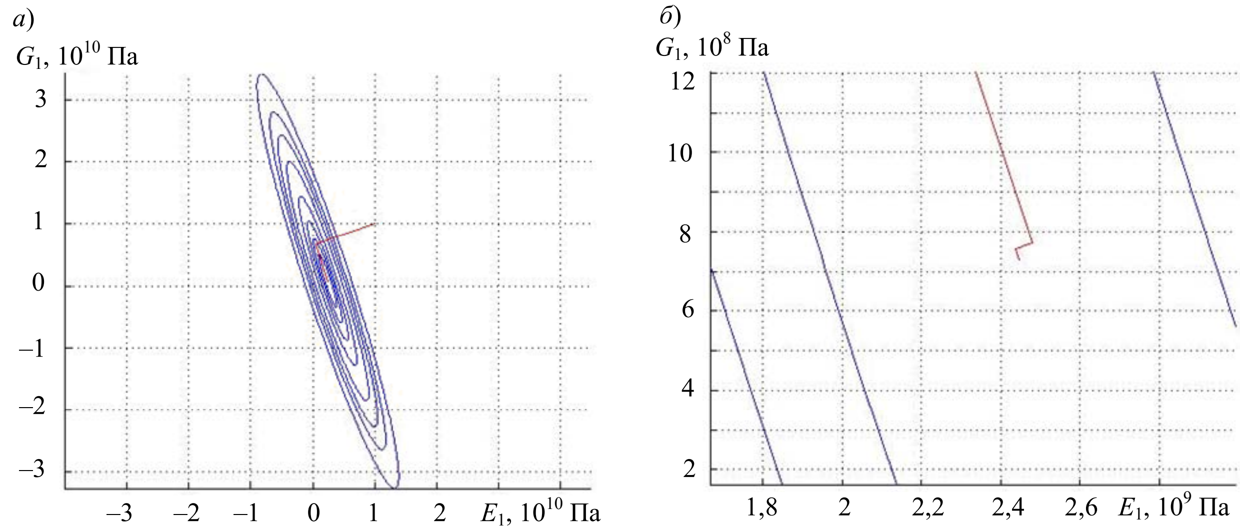

Рис. 2

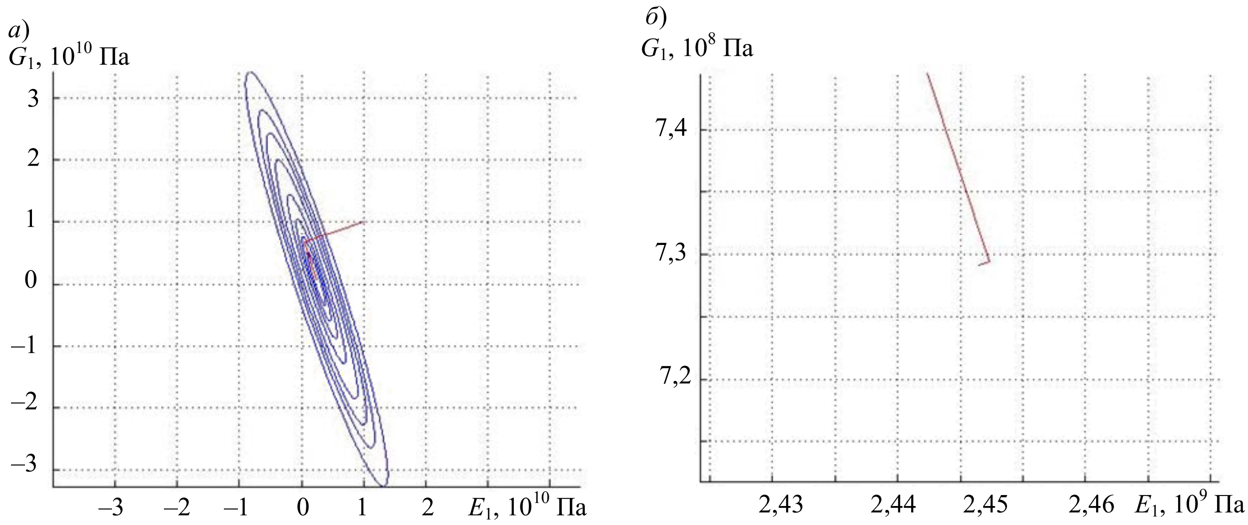

Рис. 3

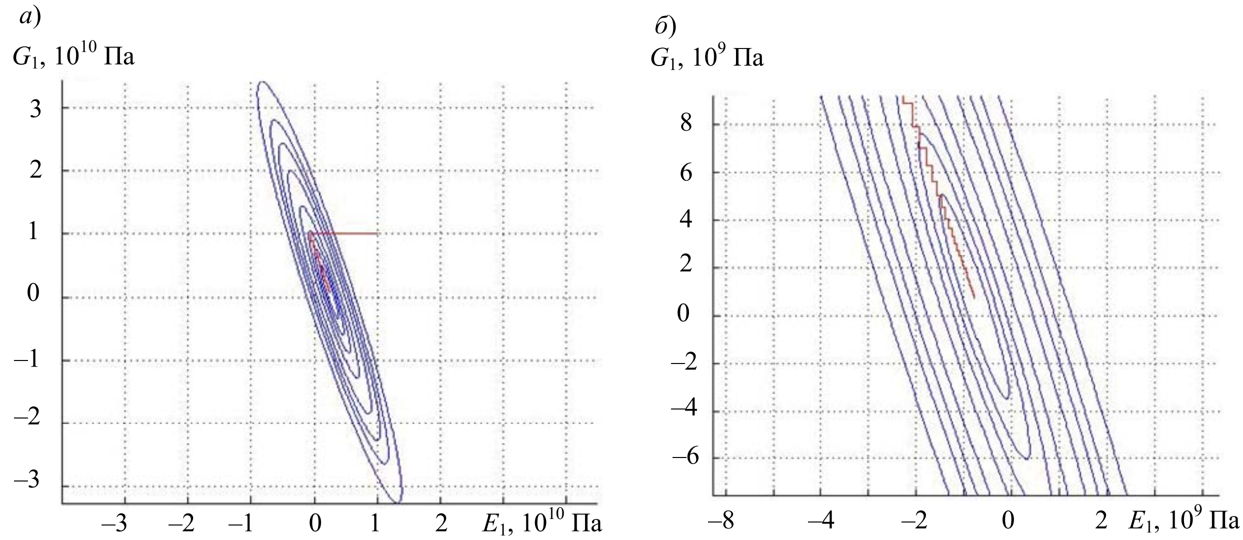

Рис. 4

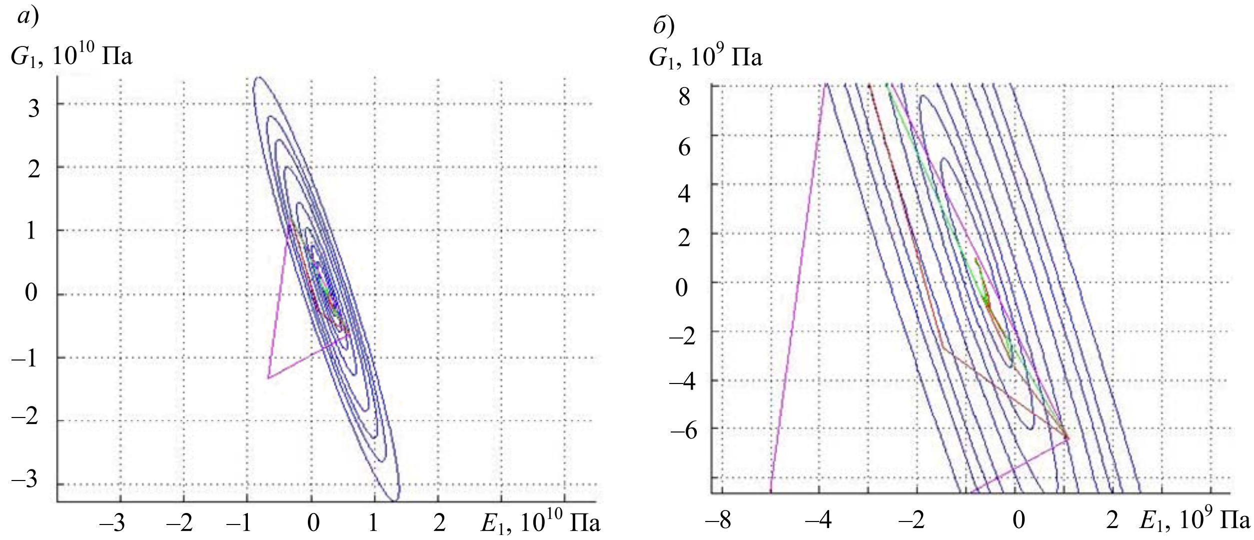

Рис. 5

Следует отметить, что с помощью оптимизаторов вычисляются все значения физико-механических характеристик E_1, G_1 для $0 \leq \nu_1 \leq 5$, в то время как для первых двух методов приведены значения наиболее вероятных их значений. На рис. 6 показан характер изменения отношения E_1/G_1 в зависимости от функции ν_1.

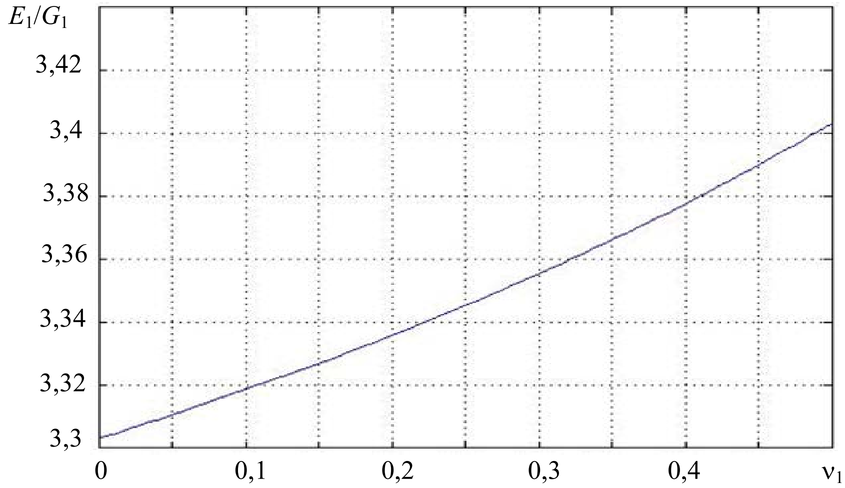

Рис. 6

Заключение. В настоящей работе развиты новые подходы к оценке физико-механических характеристик винтовых элементов САС. Показано, что предложенные методы оптимизации позволяют эффективно решать слабообусловленные нелинейные системы алгебраических уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мусалимов В. М.* Механика деформируемого кабеля. СПб: СПбГУ ИТМО, 2005. 203 с.

2. *Мусалимов В. М., Мокряк С. Я., Соханев Б. В., Шиянов В. Д.* Определение упругих характеристик гибких кабелей на основе модели спирально-анизотропного тела // Механика композитных материалов. 1984. № 1. С. 136—141.

3. *Фиакко А., Мак-Кормик Г.* Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации. М.: Мир, 1972. 241 с.

Сведения об авторах

Виктор Михайлович Мусалимов — д-р техн. наук, профессор; Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра мехатроники; E-mail: musvm@yandex.ru

Георгий Борисович Заморуев — канд. техн. наук, доцент; Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра мехатроники; E-mail: georgyz09@gmail.com

Анна Дмитриевна Перечесова — аспирант; Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра мехатроники; E-mail: perechesova@gmail.com

Рекомендована кафедрой мехатроники

Поступила в редакцию 29.02.12 г.