

А. В. АМВРОСЬЕВА

## РАСЧЕТ КОЭФФИЦИЕНТОВ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ ДЛЯ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПЛАСТИН

На основании расчетов напряжений для пьезоэлектрических пластин без трещин были найдены коэффициенты интенсивности напряжений для трещин, возникающих в этих пластинах. При расчетах учитывался поправочный коэффициент для конечного тела.

**Ключевые слова:** пьезоэлектрическая пластина, коэффициент интенсивности напряжений, поправочный коэффициент.

В настоящее время пьезокерамика все чаще используется в технических устройствах, например, в биморфах для пьезоэлектрических схватов, зондов для литографии и др. Функциональные детали из пьезокерамики обычно выполняются в форме стержня или пластины. Как показывают опыты, пьезопластины работают в условиях циклических и статических нагрузок. Поэтому расчеты напряженно-деформированного состояния этих пластин, учет наличия трещин и вычисление коэффициентов интенсивности напряжений являются основой прогнозирования работоспособности и надежности конструкции на их основе [1—6].

**Расчет коэффициента интенсивности напряжений пластины с поверхностной трещиной.** Проанализируем три варианта нагружения пластины (длина  $L = 100$  мм, длина подвижной части пластины  $L_1 = 80$  мм, высота  $b = 22$  мм, ширина  $h = 2,5$  мм) с поверхностной трещиной, занимающей область  $0 \leq x_1 \leq L$ ,  $|x_3| < \frac{h}{2}$ .

К поверхностям пластины приложены электроды с электрическим потенциалом  $V = \pm 80$  В и сила  $P = 5H$  [2]. Длина трещины в пластине  $l = 0,2$  мм.

1. Пластина с электродированными поверхностями  $x_3 = \pm \frac{h}{2}$  (поляризация по оси  $x_3$ ) (рис.

1). Найдем коэффициент интенсивности напряжений для трещины нормального отрыва  $K_I$ :

$$K_I = \frac{1}{\sqrt{\pi l}} \int_{\frac{h-l}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{x_1}(x_3) \frac{\sqrt{l+x_3}}{\sqrt{l-x_3}} dx_3 = \frac{M}{I\sqrt{\pi l}} \int_{\frac{h-l}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{x_3(l+x_3)}{\sqrt{l^2-x_3^2}} dx_3 =$$

$$= \frac{M}{I\sqrt{\pi l}} \left[ l \left( \sqrt{h - \frac{h^2 l^2}{4}} - \sqrt{l^2 - \frac{h^2}{4}} \right) + \left( \frac{\frac{h}{2} - l}{2} \sqrt{h - \frac{h^2 l^2}{4}} - \frac{h}{4} \sqrt{h^2 - \frac{l^2}{4}} \right) + \frac{\pi l^2}{2} \right] = M \sqrt{\pi l} \frac{l}{2I},$$

где  $Y\left(\frac{l}{L}\right) \approx \left(\frac{l}{2l}\right)$  — поправочный коэффициент для конечного тела,  $I = \frac{bh^3}{12}$  — момент инерции.

Путем математических вычислений получаем:

$$K_I = 1,4 \cdot 10^3 \text{ Н/м}^{3/2} .$$

Нормальные напряжения  $\sigma_{x_1}(x_3)$ , возникающие в пластине при изгибе, могут быть найдены с использованием следующих уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x_1}(x_3) &= \frac{M}{I} x_3, \\ M &= N \frac{h}{2} = 199,38 \cdot 10^{-5} \text{ Н} \cdot \text{м}, \\ N &= \sigma_{11} S = 159,5 \cdot 10^{-2} \text{ Н}; \end{aligned} \right\}$$

$$\sigma_{11} = \varepsilon_{11} E_{33} = 2,9 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^2;$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = d_{31} \frac{V_0}{h} = 0,547 \cdot 10^{-6},$$

где  $\varepsilon$  — линейная деформация.

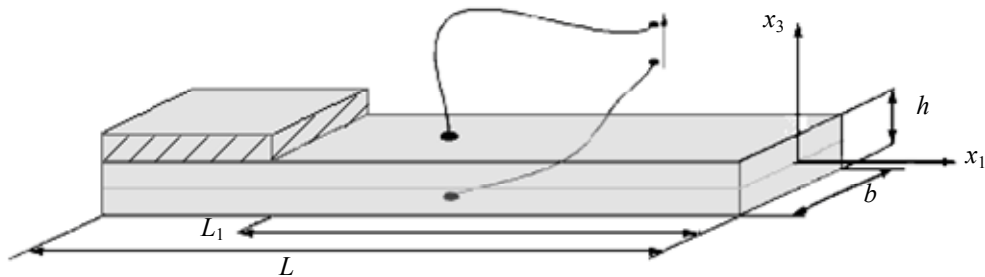


Рис. 1

Таким образом, механическое напряжение  $\sigma_{11}$  выражено через функцию электрического напряжения  $V$  и параметров;  $E$  — модуль Юнга,  $d_{31}$  — пьезомодуль:  $\sigma = \sigma(V; d_{31}, E)$  [1].

В расчетах использован поправочный коэффициент для чистого изгиба в связи с тем, что нагружение биморфа напряжениями  $\sigma_{11}$  (рис. 2) эквивалентно нагружению моментами  $M$  — парой сил (рис. 3) [3].

2. Пластина, нагруженная силой  $P$ , на расстоянии от заделки  $L_1$  с неэлектропроводными поверхностями  $x_3 = \pm \frac{h}{2}$  (рис. 4). Найдем коэффициент интенсивности напряжений для трещины поперечного сдвига  $K_{II}$ :

$$K_{II} = \frac{1}{\sqrt{\pi l}} l \int_{\frac{h-l}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{x_3 x_1}(x_3) \frac{\sqrt{l+x_3}}{\sqrt{l-x_3}} dx_3 = \frac{3P}{2bh\sqrt{\pi l}} \int_{\frac{h-l}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(1 - \frac{4}{h^2} x_3^2\right) \frac{(l+x_3)}{\sqrt{l^2-x_3^2}} dx =$$

$$= \frac{3P}{2bh\sqrt{\pi l}} \left[ \left( \pi l + \sqrt{h - \frac{h^2 l^2}{4}} - \sqrt{h^2 - \frac{l^2}{4}} \right) - \frac{4}{h^2} \left( \frac{hl - l^2 \sqrt{h - \frac{h^2 l^2}{4}}}{2} - \frac{hl \sqrt{h^2 - \frac{l^2}{4}} + l^3 \pi}{4} + \frac{3l^2 + \frac{h}{4} - hl}{3} \sqrt{h - \frac{h^2 l^2}{4}} - \frac{2l + \frac{h^2}{4}}{3} \sqrt{h^2 - \frac{l^2}{4}} \right) \right],$$

где  $\tau_{x_3 x_1}(x_3) = \frac{3P}{2bh} \left( 1 - \frac{4}{h^2} x_3^2 \right)$  — касательные напряжения.

В результате получим:

$$K_{II} = 6,9 \cdot 10^3 \text{ Н/м}^{3/2}.$$

В данном случае использован поправочный коэффициент для поперечного изгиба (рис. 5).

3. Пластина, нагруженная силой  $P$ , на расстоянии от заделки  $L_1$  с электродированными поверхностями  $x_3 = \pm \frac{h}{2}$  (рис. 6). Найдем эффективный коэффициент интенсивности напряжений [3]:

$$K_{\text{эф}}^2 = K_I^2 + K_{II}^2,$$

$$K_{\text{эф}} = 7,1 \cdot 10^3 \text{ Н/м}^{3/2}.$$

**Расчет коэффициента интенсивности напряжений пластины с внутренней трещиной.** Была рассмотрена та же пластина с аналогичными нагрузками.

1. Пластина с электродированными поверхностями  $x_3 = \pm \frac{h}{2}$  (поляризация по оси  $x_3$ ).

Найдем коэффициент интенсивности напряжений для трещины нормального отрыва  $K_I$ :

$$K_I = \frac{1}{\sqrt{\pi l}} \int_{-l}^l \sigma_{x_1}(x_3) \frac{\sqrt{l+x_3}}{\sqrt{l-x_3}} dx_3 = \frac{M}{I\sqrt{\pi l}} \int_{-l}^l \frac{x_3(l+x_3)}{\sqrt{l^2-x_3^2}} dx_3 = M\sqrt{\pi l} \frac{l}{2I},$$

путем математических вычислений получим:

$$K_I = 1,8 \cdot 10^2 \text{ Н/м}^{3/2}.$$

2. Пластина, нагруженная силой  $P$ , на расстоянии от заделки  $L_1$  с неэлектродированными поверхностями  $x_3 = \pm \frac{h}{2}$ . Найдем коэффициент интенсивности напряжений для трещины поперечного сдвига  $K_{II}$ :

$$K_{II} = \frac{1}{\sqrt{\pi l}} \int_{-l}^l \tau_{x_3 x_1}(x_3) \frac{\sqrt{l+x_3}}{\sqrt{l-x_3}} dx_3 = \frac{3P}{2bh\sqrt{\pi l}} \int_{-l}^l \left( 1 - \frac{4}{h^2} x_3^2 \right) \frac{(l+x_3)}{\sqrt{l^2-x_3^2}} dx_3 = \frac{3P\sqrt{\pi l}}{2bh} \left[ 1 - \frac{l^2}{h^2} \right].$$

В результате получим:

$$K_{II} = 3,4 \cdot 10^3 \text{ Н/м}^{3/2}.$$

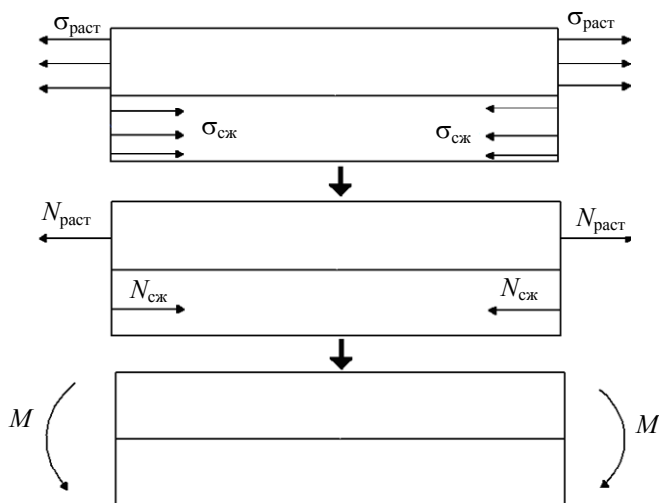


Рис. 2

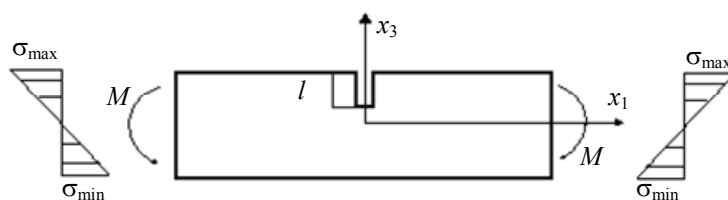


Рис. 3

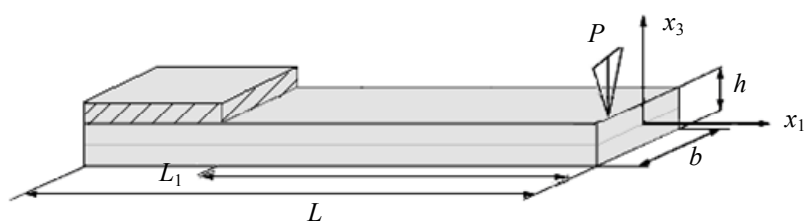


Рис. 4

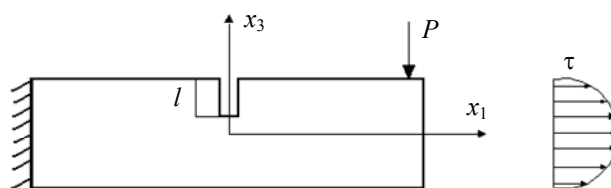


Рис. 5

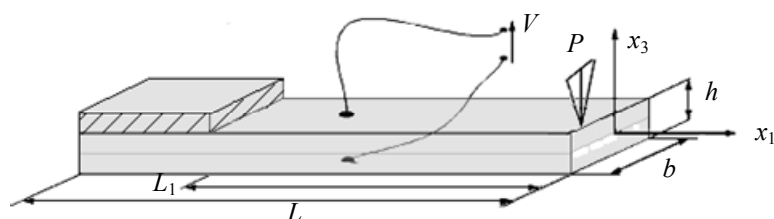


Рис. 6

**Заключение.** Установлено, что в заданных условиях нагружения пьезоэлектрических пластин значения коэффициентов интенсивности напряжений для поверхностных трещин нормального отрыва и поперечного сдвига сравнимы по порядку. В работе представлен пример редуцирования задачи о линейных деформациях в задачу об изгибе. Из приведенных

уравнений видно, что напряженно-деформированное состояние пьезоэлектрической пластины при изгибе определяется внешним полем для системы трещин.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бардзокас Д. И., Зобнин А. И., Сеник Н. А., Фильштинский М. Л. Математическое моделирование в задачах механики связанных полей. Введение в теорию термопьезоэлектричества. М., 2010. Т. 1. 312 с.
2. Смирнов А. Б. Системы микроперемещений с пьезоэлектрическими приводами: Мехатроника и Робототехника. СПб: Изд-во СПбГПУ, 2003. 160 с.
3. Хеллан К. Введение в механику разрушения. М.: Мир, 1988. 364 с.
4. Амвросьева А. В. Напряженно-деформированное состояние пьезоэлектрических пластин с трещиной: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. СПб, 2011. 19 с.
5. Амвросьева А. В., Мусалимов В. М. Связанные поля перемещений в нагруженной пьезокерамической консоли с трещиной // Вестн. НГУ им. Н. И. Лобачевского. 2011. № 4 (4). С. 1347—1348.
6. Amvrosieva A., Musalimov V. Fatigue fracture of miniature piezoelectric grabs // Proc. XV Intern. Colloquium Mechanical Fatigue of Metals. Opole, 2010. P. 2—3.

#### *Сведения об авторе*

**Анна Владимировна Амвросьева** — канд. техн. наук; Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра мехатроники; E-mail: destyni@mail.ru

Рекомендована кафедрой  
мехатроники

Поступила в редакцию  
29.02.12 г.