

ЭЛЕКТРОННЫЕ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ УСТРОЙСТВА

УДК 621.314

А. И. КОРШУНОВ

НЕПРЕРЫВНАЯ МОДЕЛЬ ТРЕХФАЗНОГО КОНТУРА РЕГУЛИРОВАНИЯ ТОКОВ СТАТОРА СИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ

Рассматривается предельная непрерывная модель контура регулирования токов статора частотно управляемого синхронного двигателя. Показано, что при расчете процессов в синхронном электроприводе можно использовать более простую непрерывную модель контура, однако параметры контура следует выбирать с учетом дискретного характера управления, обусловленного наличием широтно-управляемого автономного инвертора.

Ключевые слова: контур регулирования, предельная непрерывная модель, широтно-импульсная модуляция.

Использование предельной непрерывной модели системы с периодическим высокочастотным изменением структуры существенно упрощает ее расчет без внесения значительных погрешностей [1]. Трехфазный контур регулирования токов статора синхронного двигателя представляет собой такую систему. Построение его непрерывной модели является целью настоящей статьи.

Математическое описание силовой части трехфазного регулятора тока. Рассмотрим автономный инвертор, нагрузкой которого являются соединенные звездой обмотки статора синхронного двигателя (СД) с возбуждением постоянными магнитами (рис. 1, а, здесь i_{3a} , i_{3b} , i_{3c} — заданные значения фазных токов; PT_a , PT_b , PT_c — регуляторы фазных токов).

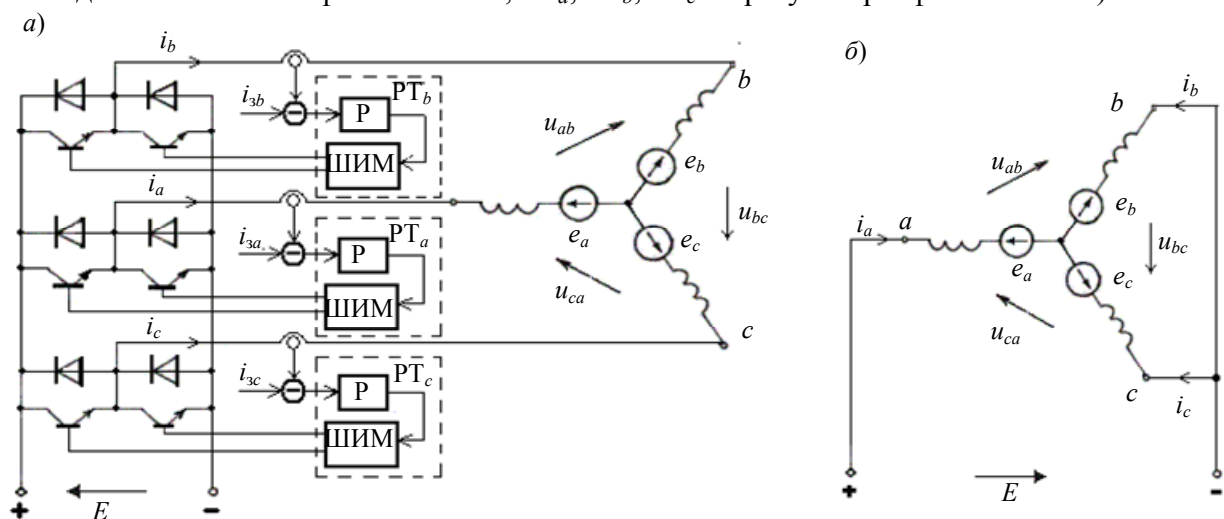


Рис. 1

Примем следующие допущения:

— в силу симметрии обмотки статора и неявнополюсного ротора СД полагаем сопротивления, индуктивности и взаимоиндуктивности фазных обмоток статора одинаковыми, т. е.

$$r_a=r_b=r_c=r, L_a=L_b=L_c=L, M_{ab}=M_{ba}=M_{ac}=M_{ca}=M_{bc}=M_{cb}=-M;$$

— транзисторные ключи считаем идеальными;

— предполагаем одновременное включение трех ключей, по одному из каждого плеча трехфазного моста;

— фазные токи считаем непрерывными;

— ЭДС вращения e_a, e_b, e_c , наводимые в обмотке статора полюсами ротора, полагаем образующими трехфазную симметричную систему.

Будем называть активным состояние ключей автономного инвертора (АИ), при котором к одному из полюсов источника питания подключена одна фаза статора, а к другому полюсу — остальные две фазы. При пассивном состоянии ключей все три фазы статора подключены к одному полюсу источника.

Рассмотрим электрическую схему автономного инвертора и его нагрузки для одного из активных состояний ключей (рис. 1, б). Очевидно, что $u_{ab} = -u_{ca} = E$, $u_{bc} = 0$. Схема имеет три ветви и два узла, что позволяет описать ее тремя независимыми уравнениями электрического равновесия:

$$i_a + i_b + i_c = 0, \quad (1)$$

$$L di_a / dt - M di_b / dt - M di_c / dt + ri_a - L di_b / dt + M di_a / dt + M di_c / dt - ri_b = u_{ab} - e_a + e_b, \quad (2)$$

$$L di_b / dt - M di_a / dt - M di_c / dt + ri_b - L di_c / dt + M di_a / dt + M di_b / dt - ri_c = u_{bc} - e_b + e_c. \quad (3)$$

В результате упрощений уравнений (2) и (3), подстановки в них значений тока, из уравнения (1) с учетом тождеств

$$e_a + e_b + e_c = 0, \quad u_{ab} + u_{bc} + u_{ca} = 0 \quad (4)$$

и симметрии схемы получаем систему трех дифференциальных уравнений:

$$(L + M) di_a / dt + ri_a = (u_{ab} - u_{ca}) / 3 - e_a. \quad (5)$$

$$(L + M) di_b / dt + ri_b = (u_{bc} - u_{ab}) / 3 - e_b, \quad (6)$$

$$(L + M) di_c / dt + ri_c = (u_{ca} - u_{bc}) / 3 - e_c. \quad (7)$$

Любое из уравнений (5)—(7) является следствием двух других, поскольку в схеме АИ (см. рис. 1, б) всего два независимых контура.

Очевидно, что уравнения (5)—(7) справедливы при любом состоянии ключей автономного инвертора. При активном состоянии ключей линейные напряжения синхронного двигателя всегда таковы, что одно из них равно нулю, а два других равны $+E$ и $-E$. При этом одно из фазных напряжений СД оказывается равным $+2E/3$ ($-2E/3$), а два других равны $-E/3$ ($+E/3$). Значения фазных напряжений согласуются с полученными в работе [2] без учета ЭДС вращения. При состоянии ключей, соответствующем схеме, приведенной на рис. 1, б, имеем $u_a = +2E/3$, $u_b = u_c = -E/3$. При пассивном состоянии ключей линейные и фазные напряжения СД равны нулю.

Построение предельной непрерывной модели контура регулирования токов статора.

Рассматриваемый способ широтно-импульсного управления инвертором основан на использовании алгоритма широтно-импульсной модуляции (ШИМ), аналогичного алгоритму ШИМ, осуществляемой с использованием симметричного пилообразного напряжения [3]. При этом изменение состояния ключей в каждом плече трехфазного моста происходит только один раз в течение периода T (периода коммутации), соответствующего возрастанию или убыванию

симметричного пилообразного опорного напряжения модулятора. В начале каждого нечетного периода, соответствующего возрастающему участку, верхние транзисторные ключи плеч инвертора замкнуты, а нижние ключи разомкнуты; в четные же периоды, соответствующие участку спада, наоборот: верхние транзисторные ключи плеч инвертора разомкнуты, а нижние замкнуты (рис. 2, 3).

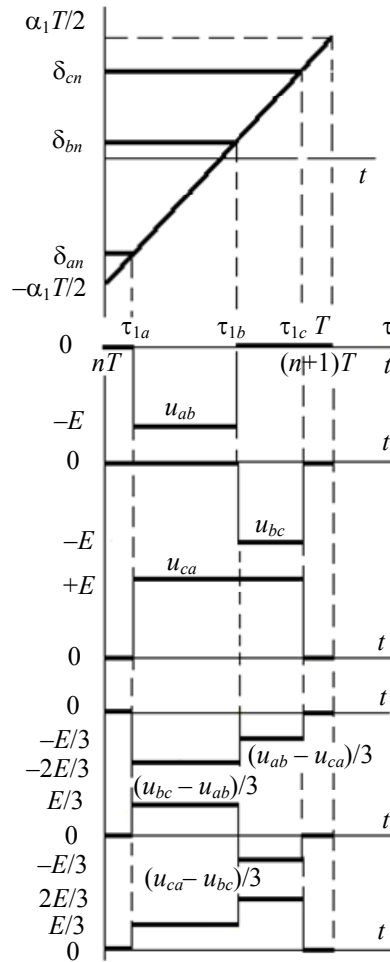


Рис. 2

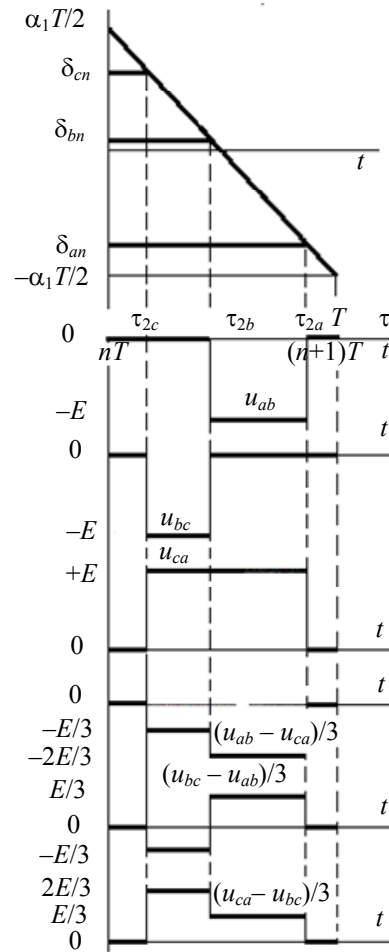


Рис. 3

Разностное уравнение широтно-импульсного контура регулирования токов статора, необходимое для построения его предельной непрерывной модели, получим вначале для нечетного периода.

Пренебрегая дискретностью значений ошибок управления, вызванной ограниченной разрядной сеткой микропроцессора, будем полагать

$$\tau_{1jn} = (1 + \text{sat}(k_p \delta_{jn} / \delta_m)) T / 2, j = a, b, c, \quad (8)$$

где функция насыщения

$$\text{sat}(x) = \begin{cases} x, & |x| < 1; \\ \text{sgn}(x), & |x| > 1, \end{cases} \quad \text{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0; \\ 1, & x > 0; \end{cases}$$

τ_{1jn} — значение момента квантования τ_{1j} в n -м периоде коммутации; $\delta_{jn} = i_{3j} - i_{jn}$, $i_{jn} = i_j(nT)$; δ_m — граница линейной зоны ШИМ; k_p — коэффициент усиления пропорционального регулятора.

В линейной зоне ШИМ

$$|\delta_{jn}| < \delta_m / k_p, \quad 0 < \tau_{1jn} < T, \quad j = a, b, c. \quad (9)$$

Для определенности положим

$$0 < \tau_{1an} < \tau_{1bn} < \tau_{1cn} < T, \quad (10)$$

что позволяет построить временные диаграммы линейных напряжений: $u_{ab}(t)$, $u_{bc}(t)$ и $u_{ca}(t)$ (см. рис. 2) и определить импульсы фазных напряжений в правых частях уравнений (5)—(7) в n -м периоде ($nT < t < (n+1)T$):

$$\left. \begin{aligned} u_a &= (u_{ab} - u_{ca})/3 = E[-1(\tau - \tau_{1an}) + 1(\tau - \tau_{1bn}) - 1(\tau - \tau_{1an}) + 1(\tau - \tau_{1cn})]/3 = \\ &= E[-2 \cdot 1(\tau - \tau_{1an}) + 1(\tau - \tau_{1bn}) + 1(\tau - \tau_{1cn})]/3; \\ u_b &= (u_{bc} - u_{ab})/3 = E[-1(\tau - \tau_{1bn}) + 1(\tau - \tau_{1cn}) + 1(\tau - \tau_{1an}) - 1(\tau - \tau_{1bn})]/3 = \\ &= E[1(\tau - \tau_{1an}) - 2 \cdot 1(\tau - \tau_{1bn}) + 1(\tau - \tau_{1cn})]/3; \\ u_c &= (u_{ca} - u_{bc})/3 = E[1(\tau - \tau_{1an}) - 1(\tau - \tau_{1cn}) + 1(\tau - \tau_{1bn}) - 1(\tau - \tau_{1cn})]/3 = \\ &= E[1(\tau - \tau_{1an}) + 1(\tau - \tau_{1bn}) - 2 \cdot 1(\tau - \tau_{1cn})]/3, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где $\tau = t - nT$.

Интегрирование уравнений (5)—(7) для n -го периода позволяет записать:

$$\begin{aligned} i_{j(n+1)} &= \exp(-\alpha T) i_{jn} + \frac{1}{L+M} \int_0^T \exp(-\alpha(T-\tau)) u_j(\tau) d\tau - \\ &- \frac{1}{L+M} \int_0^T \exp(-\alpha(T-\tau)) e_j(\tau) d\tau, \quad j = a, b, c, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\alpha = r / (L + M)$.

Для получения дифференциальных уравнений предельной непрерывной модели контура необходимо вычислить значения производных:

$$\frac{di_j}{dt} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{i_{j(n+1)} - i_{jn}}{T}. \quad (13)$$

Из выражения (12) получаем

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow 0} \frac{i_{j(n+1)} - i_{jn}}{T} &= \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\exp(-\alpha T) - 1}{T} i_{jn} + \\ &+ \frac{1}{L+M} \lim_{T \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \exp(-\alpha(T-\tau)) u_j(\tau) d\tau \right\} - \\ &- \frac{1}{L+M} \lim_{T \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \exp(-\alpha(T-\tau)) e_j(\tau) d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Несложно вычислить первый предел в правой части выражения (14):

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{\exp(-\alpha T) - 1}{T} = -\alpha = -\frac{r}{L+M}, \quad (15)$$

а второй предел, используя правило интегрирования по частям, можно представить в виде суммы:

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \exp(-\alpha(t-\tau)) u_j(\tau) d\tau \right\} &= \\ &= \lim_{T \rightarrow 0} \frac{v_j(T)}{T} - \lim_{T \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \alpha \exp(-\alpha(T-\tau)) v_j(\tau) d\tau \right\}, \end{aligned} \quad (16)$$

где $v_j(\tau) = \int_0^\tau u_j(\tau) d\tau$, $v_j(0) = 0$.

Отношение $v_j(T)/T$ представляет собой среднее значение импульсного напряжения в фазе j , $j=a, b, c$, в n -м периоде коммутации:

$$U_{jn} = \frac{v_j(T)}{T} = \frac{1}{T} \int_0^T u_j(\tau) d\tau, \quad j=a, b, c. \quad (17)$$

Согласно описанию ШИМ (8) при уменьшении периода T и сохранении неизменными значений ошибок регулирования δ_{jn} фазных токов форма импульсов фазных напряжений, описываемых выражениями (11), не изменяется. Следовательно, не изменяются и их средние значения (17).

С учетом неравенств $\exp(-\alpha T) < \exp(-\alpha(T - \tau)) < 1$, $|v(\tau)| \leq 2E\tau/3$, справедливых при $0 < \tau < T$, несложно определить оценку модуля интеграла

$$\left| \int_0^T \alpha \exp(-\alpha(T - \tau)) v_j(\tau) d\tau \right| < \int_0^T \alpha \frac{2E}{3} \tau d\tau = \alpha \frac{E}{3} T^2,$$

доказывающую равенство нулю второго предела в правой части выражения (16).

Также несложно вычислить и значение третьего предела в правой части уравнения (14):

$$\lim_{T \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \exp(-\alpha(T - \tau)) e_j(\tau) d\tau \right\} = e_j(0), \quad e_j(0) = e_j(t) \Big|_{t=nT}. \quad (18)$$

Учитывая выражения (15), (16) и (18), можно записать

$$\frac{di_j}{dt} = -\alpha i_j + \frac{1}{L+M} (U_j - e_j), \quad j = a, b, c. \quad (19)$$

Согласно уравнениям (8), (11) и (17) получены средние значения фазных напряжений:

$$\left. \begin{aligned} U_a &= E[2\gamma_a - \gamma_b - \gamma_c]/3 = E[2\text{sat}(k\delta_a) - \text{sat}(k\delta_b) - \text{sat}(k\delta_c)]/6; \\ U_b &= E[-\gamma_a + 2\gamma_b - \gamma_c]/3 = E[-\text{sat}(k\delta_a) + 2\text{sat}(k\delta_b) - \text{sat}(k\delta_c)]/6; \\ U_c &= E[-\gamma_a - \gamma_b + 2\gamma_c]/3 = E[-\text{sat}(k\delta_a) - \text{sat}(k\delta_b) + 2\text{sat}(k\delta_c)]/6, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

где $k = k_p / \delta_m$; $\gamma_j = \tau_{1j} / T = [1 + \text{sat}(k\delta_j)] / 2$; $j = a, b, c$; $\delta_j = i_{3j} - i_j$.

Объединяя выражения (19) и (20), систему дифференциальных уравнений предельной непрерывной модели контура регулирования токов статора можно записать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} (L+M)di_a/dt + ri_a &= E[2\text{sat}(k(i_{3a} - i_a)) - \text{sat}(k(i_{3b} - i_b)) - \text{sat}(k(i_{3c} - i_c))]/6 - e_a; \\ (L+M)di_b/dt + ri_b &= E[-\text{sat}(k(i_{3a} - i_a)) + 2\text{sat}(k(i_{3b} - i_b)) - \text{sat}(k(i_{3c} - i_c))]/6 - e_b; \\ (L+M)di_c/dt + ri_c &= E[-\text{sat}(k(i_{3a} - i_a)) - \text{sat}(k(i_{3b} - i_b)) + 2\text{sat}(k(i_{3c} - i_c))]/6 - e_c. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

При работе контура в линейной зоне ШИМ, т.е. при выполнении условия (9), система уравнений (21) допускает декомпозицию на три независимых уравнения:

$$(L+M)di_j/dt + (r + k_p E / 2\delta_m)i_j = (k_p E / 2\delta_m)i_{3j} - e_j, \quad j = a, b, c. \quad (22)$$

Дифференциальные уравнения (21) и (22) получены для нечетных периодов коммутации (см. рис. 2). В четные периоды коммутации (см. рис. 3) импульсы фазных напряжений (при тех же значениях δ_{jn}) являются зеркальным отражением импульсов в нечетных периодах.

Это означает равенство средних значений импульсов и, следовательно, совпадение дифференциальных уравнений предельной непрерывной модели контура, полученных для четных и нечетных периодов.

Экспериментальная проверка результатов. Проверить, является ли период коммутации достаточно малым для замены реальной системы ее предельной непрерывной моделью, можно методом математического моделирования. Для этого целесообразно использовать две модели контура: дискретную, содержащую широтно-импульсный автономный инвертор, и непрерывную, построенную в соответствии с системой дифференциальных уравнений (21). Обе модели, полученные с использованием программного пакета Matlab 6.5, Simulink 5, Sim Power Systems,

представлены на рис. 4: слева — дискретная модель, справа — непрерывная. Каждая из моделей учитывает только задающие воздействия i_{3j} , $j = a, b, c$, представляющие собой трехфазную симметричную систему токов, а возмущающие воздействия, т.е. ЭДС вращения, приняты равными нулю (для сравнения моделей это несущественно). Источник задающего воздействия, представляющий собой программируемый трехфазный генератор напряжений (3-Phase Programmable Voltage Source 1), трехфазную активную нагрузку (3-Phase Series Branch) и трехфазный измеритель (3-Phase V-I Measurement 1), является общим для непрерывной и дискретной моделей.

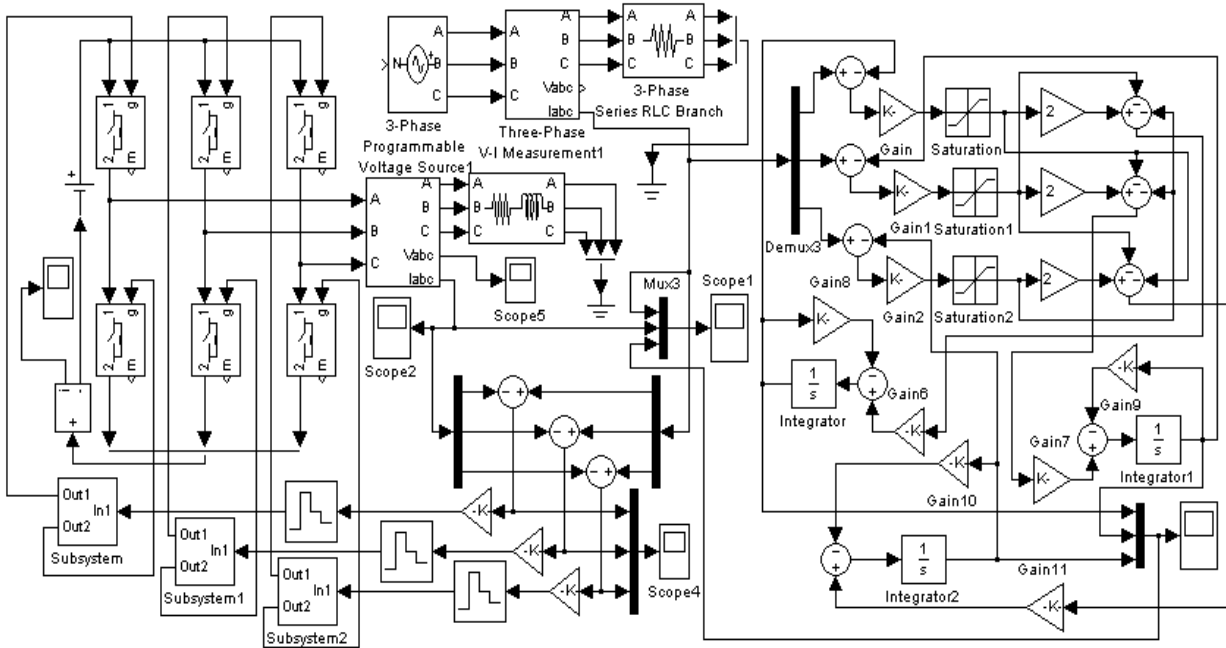


Рис. 4

Трехфазный измеритель рассогласования непрерывной модели состоит из демультиплектора Demux 3 и трех сумматоров, вычисляющих разность $\delta_j = i_{3j} - i_j$, $j = a, b, c$. Сигналы рассогласования усиливаются усилителями (Gain, 1, 2) с коэффициентом $k = k_p / \delta_m$. В соответствии с системой уравнений (21) коэффициент передачи усилителей (Gain 8, 9, 10) в цепи обратной связи каждого из трех интеграторов (Integrator, 1, 2) равен $r / (L + M)$, а выходные сигналы сумматоров сигналов блоков насыщения (Saturation, 1, 2) проходят через усилители (Gain 6, 7, 11) с коэффициентом $k = E / [6(L + M)]$.

Результаты моделирования в виде заданных значений фазных токов i_{3j} и действительных токов i_j , $j = a, b, c$, полученные для дискретной (i_{jd}) и непрерывной (i_{jn}) моделей соответственно, наблюдаются с помощью мультимплектора Mux 3 на осциллографе Scope 1.

Моделирование проводилось при следующих значениях параметров системы: $E = 50$ В, $L + M = 0,01$ Гн, $r = 6$ Ом, $\delta_m = 1$ А, $k_p = 1,6$, $T = 2,5 \cdot 10^{-4}$ с, амплитуде заданных токов $I_{3m} = 1,6$ А и частоте заданных токов $f_3 = 20$ Гц. Выбран метод интегрирования ode 15S при шаге не более 10^{-7} .

На рис. 5 представлены результаты отработки заданных токов в первом полупериоде при нулевых начальных условиях. Из рисунка очевидно, что кривые токов i_{jn} практически совпадают с кривыми токов i_{jd} . Наибольшее различие токов i_{jn} и i_{jd} демонстрирует представленный на рис. 6 график переходного процесса, соответствующего началу отработки заданных токов. Заметим, что переходный процесс в контуре наблюдается в течение первых двух периодов коммутации в зоне насыщения модулятора, а затем — в линейной зоне.

В линейной зоне модулятора можно выбрать коэффициент k_p , соответствующий отработке постоянного задающего воздействия за один период коммутации. Такой режим формируется при выборе очень низкой частоты задающего воздействия, т.е. при $f_3 T \ll 1$. Оптимальное по

быстродействию значение k_p , в силу нелинейности системы разностных уравнений, изменяется при изменении I_{zm} . При постоянной времени, значительно превосходящей период коммутации ($(L+M)/r \gg T$), это изменение не очень существенно, поскольку система нелинейных разностных уравнений приближается к линейной. Причина этого заключается в приближении экспоненциальной зависимости к линейной при малых значениях ее аргумента.

На рис. 7 представлен график переходного процесса оптимальной по быстродействию отработки трехфазного задающего воздействия: $I_{zm} = 0,624$ А, $f_3 = 0,0002$ Гц при $k_p = 1,47$. В этом случае особенно заметно различие токов i_{jn} и i_{jd} , что естественно, поскольку непрерывная модель линейна в линейной зоне ШИМ, а дискретная модель нелинейна даже в этой зоне. Однако спустя 3—4 периода коммутации различие токов становится практически незаметным.

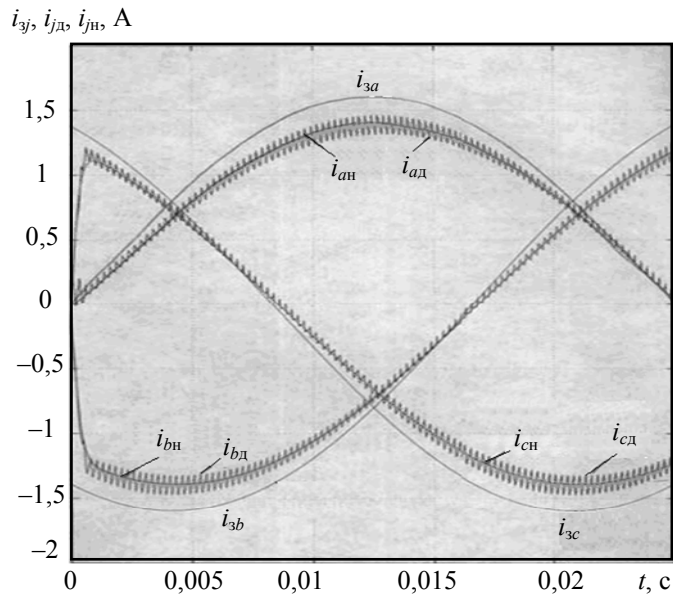


Рис. 5

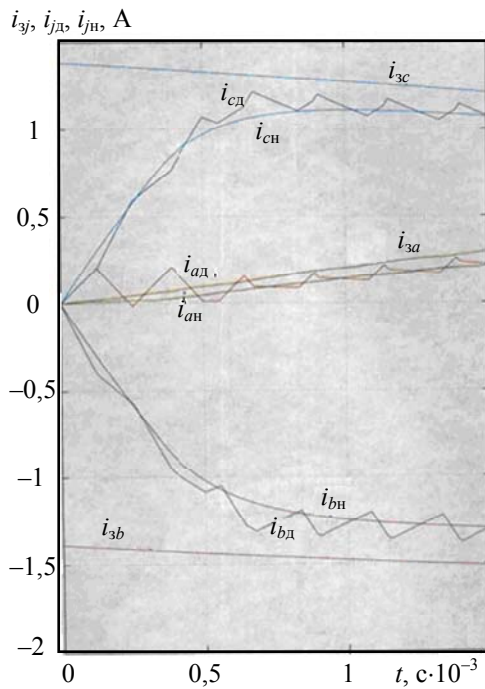


Рис. 6

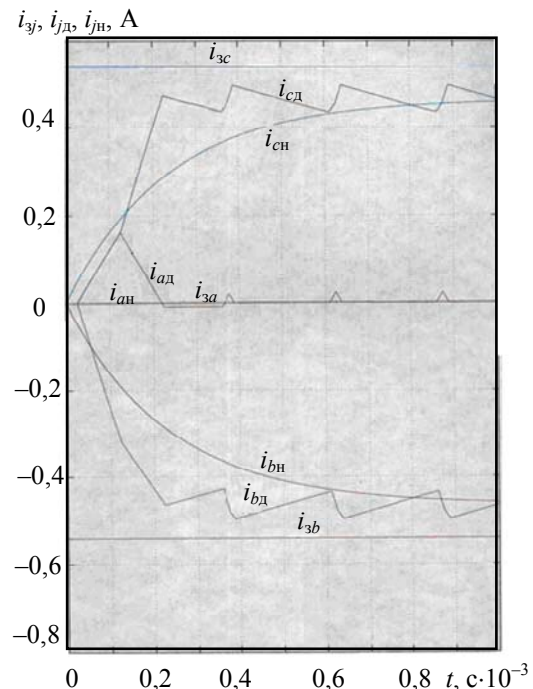


Рис. 7

При больших значениях k_p различие между моделями увеличивается. В дискретной модели, представляющей собой замкнутую широтно-импульсную систему, может наблюдаться

колебательный свободный процесс. Увеличение значения k_p сверх критического ($k_p > k_{p,кр}$) приводит к потере устойчивости системы, что не наблюдается в непрерывной модели [4, 5].

При выполнении условия $(L+M)/r \gg T$ контур регулирования токов статора можно описать тремя автономными линейными разностными уравнениями, из которых следует условие устойчивости:

$$k_p < k_{p,кр} = 4(L + M) / (ET). \quad (23)$$

Обеспечение запаса устойчивости контура регулирования тока по амплитуде ($k_{p,кр} / k_p > 3 \dots 5$), что необходимо для его нормальной работы, позволяет исключить значения k_p , при которых различие токов становится существенным.

Выводы.

1. Трехфазный контур регулирования токов статора синхронного двигателя с постоянными магнитами при достаточно высокой частоте коммутации автономного инвертора и пропорциональных регуляторов можно описать системой трех дифференциальных уравнений первого порядка (22).

2. При выборе параметров контура регулирования тока необходимо обеспечить условие его устойчивости (23), учитывающее дискретный характер управления трехфазным автономным инвертором, чтобы исключить нежелательные проявления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коршунов А. И. Предельная непрерывная модель системы с высокочастотным периодическим изменением структуры // Изв. вузов. Приборостроение. 2009. Т. 52, № 9. С. 42—48.
2. Глазенов Т. А., Гончаренко Р. Е. Полупроводниковые преобразователи частоты в электроприводах. Л.: Энергия, 1969.
3. Вейнгер А. М. Регулируемый синхронный электропривод. М.: Энергоатомиздат, 1985.
4. Коршунов А. И. Устойчивость вынужденных движений в широтно-импульсных системах с модуляцией второго рода // Автоматика и телемеханика. 1977. № 6.
5. Коршунов А. И. Определение параметров автоколебаний в системах с широтно-импульсными преобразователями // Изв. вузов СССР. Приборостроение. 1978. Т. 21, № 10. С. 25—30.

Сведения об авторе

Анатолий Иванович Коршунов

— д-р техн. наук, профессор; Военно-морской институт радиоэлектроники им. А. С. Попова, кафедра радиоэлектроники, Санкт-Петербург;
E-mail: a.i.korshunov@mail.ru

Рекомендована кафедрой
радиоэлектроники

Поступила в редакцию
03.10.11 г.