УДК 535.391; 537.876

А. В. ДЕНИСОВ, Н. П. СИДОРОВА

ВЫСОКОЧАСТОТНАЯ АСИМПТОТИКА МОДУЛЯ КОЭФФИЦИЕНТА ОТРАЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ ОТ ПЛОСКОСЛОИСТОЙ СРЕДЫ

Представлен асимптотический расчет электромагнитного поля, отраженного от плоскослоистой среды. Рассматривается падение волны на переходные слои диэлектрика с неоднородной диэлектрической проницаемостью, непрерывно зависящей от глубины слоя. Приведены выражения для модуля коэффициента отражения с использованием метода фазовых интегралов.

Ключевые слова: *высокочастотная асимптотика, коэффициент отражения, метод фазовых интегралов.*

Изучение закономерностей распространения плоских гармонических волн в неоднородной среде предполагает, в частности, определение коэффициента отражения. Поиск аналитической зависимости коэффициента отражения R от частоты волны, параметров среды и угла падения на нее волны имеет большое практическое значение при радиофизических и геофизических исследованиях. Определению коэффициентов отражения волн от различных слоистых сред посвящен ряд публикаций [1—8]. В настоящей статье исследуется отражение волн от плоскослоистых, зависящих от одной переменной (z), бесконечно протяженных сред с неоднородной диэлектрической проницаемостью. Определение зависимости коэффициента R от параметров среды во всем частотном диапазоне и при любых углах падения волны на слой возможно только при рассмотрении небольшого числа зависимостей диэлектрической проницаемости $\varepsilon(z)$, при которых уравнения для комплексных амплитуд электрического или магнитного поля, вытекающие из уравнений Максвелла, можно свести к известным уравнениям математической физики. Однако число таких моделей весьма ограничено.

Если рассматривать функции $\varepsilon=\varepsilon(z)$, $z\in\left(-\infty,+\infty\right)$, для которых значения $\varepsilon_{\text{нач}}=\lim\limits_{z\to-\infty}\varepsilon(z)$ и $\varepsilon_{\text{кон}}=\lim\limits_{z\to+\infty}\varepsilon(z)$ конечны, то, насколько известно авторам, существуют только три зависимости $\varepsilon=\varepsilon(z)$, сводящие волновые уравнения к известным обыкновенным дифференциальным уравнениям:

1) слой Эпштейна [1, 3]:

$$k^2\varepsilon(z)=k^2-k_2^2-\frac{\left[4k_1^2-\left(e^{2z/\alpha}+1\right)\left(k_2^2-k_3^2\right)\right]e^{2z/\alpha}}{\left(e^{2z/\alpha}+1\right)^2},$$

где α — положительная константа; k_1, k_2, k_3 — произвольные параметры, зависящие от частоты при анизотропии параметров среды или наличии потерь;

2) слой, заданный в неявном виде и характеризующийся переменным масштабом изменения значений $\varepsilon(z)$ [7, 8]:

$$\varepsilon(x(z))=\frac{1}{\alpha}\frac{e^{x(z)}+\alpha}{e^{x(z)}+1},\ x'(z)=\varepsilon(x(z))-\beta,$$

где $\alpha>0,\ \beta<1/\alpha$ — постоянные;

3) слой Хединга [6]:

$$k^2\varepsilon(z)=k^2-\frac{k_1^2+k_2^2\operatorname{sh}\left(z/\alpha\right)}{\operatorname{ch}^2\left(z/\alpha\right)},\ \ \alpha>0\,.$$

Цель данной статьи заключается в том, чтобы (для первой или второй вышеуказанной модели слоя) на основе метода фазовых интегралов и с использованием равномерной на всей вещественной оси аппроксимации исходной функции $\varepsilon(z)$ некоторой другой аналитической функцией $\varepsilon_{\text{апр}}(z)$ без затруднений определить высокочастотную асимптотику модуля коэффициента отражения.

Рассмотрим известную задачу о падении плоской гармонической ($e^{-i\omega t}$) волны горизонтальной (другие названия — s или TE) поляризации на переходный слой Эпштейна при отсутствии в нем потерь. Выберем декартову систему координат $\{x, y, z\}$, при которой волна падает в плоскости (xz) со стороны $z=-\infty$ под углом θ к оси $(0z)$. Запишем уравнение для диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon(z)=\frac{1}{\alpha}\frac{e^{z/l}+\alpha}{e^{z/l}+1}, \tag{1}$$

где

$$0<\alpha<1\big/\sin^2\theta; \tag{2}$$

l — характерный масштаб изменения функции $\varepsilon(z)$; условие (2) гарантирует отсутствие точки поворота на вещественной оси (z) [9].

В выбранной системе координат волна характеризуется компонентами E_y, H_x, H_z. Электрическое поле представим выражением $E_y=E(z)\exp\left(ikx\sin\theta-i\omega t\right)$, где k — волновое число в вакууме. Дифференциальное уравнение для комплексной амплитуды $E(z)$, вытекающее из системы уравнений Максвелла, имеет следующий вид [1, 7]:

$$\frac{d^2E}{ds^2}+\eta_0{}^2\left(\varepsilon(s)-\sin^2\theta\right)E=0, \tag{3}$$

где $s=z/l$ — безразмерная переменная, $\eta_0=\omega l/c$, c — скорость света в вакууме.

Коэффициент $\eta_0{}^2\left(\varepsilon(s)-\sin^2\theta\right)$ уравнения (3) для зависимости (1) при ограничении (2) характеризуется наличием на комплексной плоскости (s) бесконечной серии точек поворота s_{0i}, $i=\overline{1,\infty}$, при которых он обращается в нуль, и бесконечной серии простых полюсов s_{pi}, при которых он стремится к бесконечности. При ограничении (2), как показано в работах [9, 10], на основе топологии линий Стокса и сопряженных с ними линий „антистокса“ (на которых соответственно вещественная и мнимая части интеграла $\int\limits_0^s\eta_0\sqrt{\left(\varepsilon(\tilde{s})-\sin^2\theta\right)}\cdot d\tilde{s}$ равны нулю) при одновременном обходе точек поворота и полюсов простые полюсы не влияют на асимптотику $|R|$, а влияют только точки поворота. Далее это утверждение докажем, опираясь на метод последовательных приближений решения волнового уравнения (3).

При достаточно больших значениях частоты волны можно ограничиться учетом только двух ближайших к вещественной оси точек поворота: s_{0+}, s_{0-} — соответственно выше и ниже вещественной оси. Согласно сложившейся в теории метода фазовых интегралов терминологии, при ограничении (2) имеем задачу о надбарьерном отражении [9]. В этом случае модуль коэффициента отражения определяется известной формулой [9]:

$$
|R| = \exp\left(i\eta_0 \int\limits_{s_{0_-}}^{s_{0+}} \sqrt{\varepsilon(s) - \sin^2\theta} \cdot ds \right), \tag{4}
$$

где для рассматриваемого слоя (1) ближайшими к вещественной оси s точками поворота являются

$$
s_{0_-} = \ln\left(\frac{\cos^2\theta}{\varepsilon_{\text{кон}} - \sin^2\theta} \right) - i\pi \text{ и } s_{0+} = \ln\left(\frac{\cos^2\theta}{\varepsilon_{\text{кон}} - \sin^2\theta} \right) + i\pi .
$$

Интеграл, входящий в показатель экспоненты (4), для рассматриваемой функции $\varepsilon(s)$ можно вычислить и непосредственно, однако его значительно проще найти следующим образом: проведем на комплексной плоскости (s) из точек разветвления подынтегральной функции разрезы, как показано, например, на рис. 1 и 2, и заменим интегрирование на участке AD интегрированием по трем сторонам AB, BC, CD. При этом внутри прямоугольника $ABCD$ функция $\sqrt{\varepsilon(s) - \sin^2\theta}$ будет однозначной регулярной функцией, если прямоугольник построить правее точек s_{0+}, s_{0-} в случае, когда они расположены правее точек s_{p+}, s_{p-} (см. рис. 1), либо левее от них в противоположном случае, т.е. если точки s_{0+}, s_{0-} размещены левее полюсов (см. рис. 2).

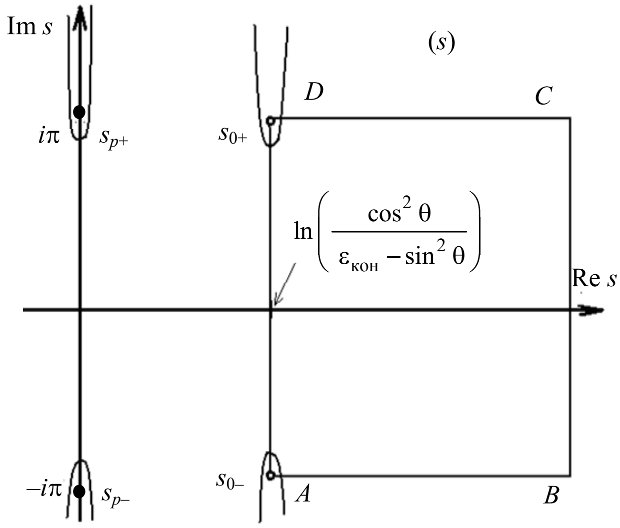

Рис. 1

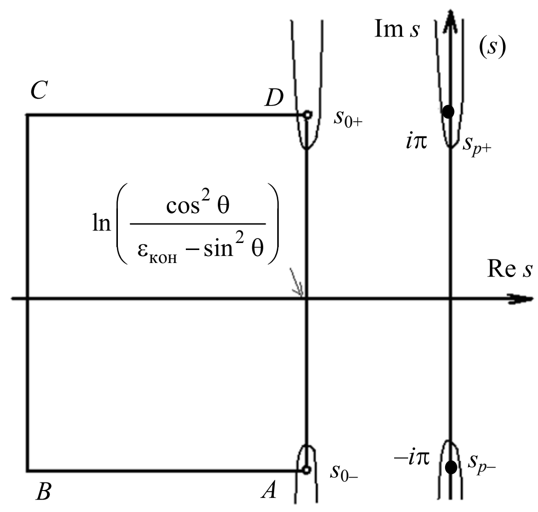

Рис. 2

Устремим затем точки B и C к бесконечности, при этом на участке BC подынтегральная функция в формуле (4) будет постоянной (так как существуют конечные пределы значений диэлектрической проницаемости), а интегралы на участках CD и AB взаимно уничтожатся. Тогда с учетом теоремы Коши для модуля коэффициента отражения (4) окончательно получаем

$$
|R| \cong \begin{cases} \exp\left(-2\pi\eta_0 \sqrt{\varepsilon_{\text{кон}} - \sin^2\theta}\right), \text{ если } \varepsilon_{\text{кон}} > 1; \\ \exp\left(-2\pi\eta_0 \cos\theta\right), \text{ если} \sin^2\theta < \varepsilon_{\text{кон}} < 1. \end{cases} \tag{5}
$$

Обратимся теперь к задаче о распространении плоской волны вертикальной (p или ТМ) поляризации, характеризующейся в выбранной ранее системе координат компонентами H_y, E_x, E_z. Уравнение для комплексной амплитуды в этом случае имеет следующий вид [1]:

$$
\frac{d^2H}{ds^2} - \frac{1}{\varepsilon(s)} \frac{d\varepsilon}{ds} \frac{dH}{ds} + \eta_0^{\,2} \left(\varepsilon(s) - \sin^2\theta \right) H = 0 . \tag{6}
$$

Рассмотрим функцию диэлектрической проницаемости переходного слоя без потерь, заданную в неявном виде [7]:

$$\varepsilon(s)=\frac{1}{\alpha}\frac{e^{x(s)}+\alpha}{e^{x(s)}+1}, \tag{7}$$

где $\alpha>0$, $x'_s=\varepsilon(s)\Leftrightarrow e^x(e^x+\alpha)^{\alpha-1}=A_0e^s=e^s$, $A_0>0$ (без потери общности константу выберем произвольно, так как она влияет только на фазу волны).

Перейдем в уравнении (6) к новой независимой переменной x:

$$\frac{d^2H}{dx^2}+\eta_0{}^2\left(\frac{\varepsilon(s)-\sin^2\theta}{\varepsilon^2(s)}\right)H=0. \tag{8}$$

Коэффициент уравнения (8) для функции (7) характеризуется наличием на комплексной плоскости (x) двух серий точек поворота $x_{0i}^{(1)},x_{0i}^{(2)}$, соответствующих корням уравнений $e^x+\dfrac{\cos^2\theta}{\varepsilon_{\text{кон}}-\sin^2\theta}=0$, $e^x+1=0$, и наличием серии полюсов x_{pi} второй кратности, для которых $e^x+\alpha=0$. Как и в предыдущем случае, будем при нахождении модуля коэффициента отражения опираться на метод фазовых интегралов и учитывать только две ближайшие к вещественной оси точки $x_{0_\pm}^{(1)},x_{0_\pm}^{(2)}$ и не учитывать полюсы, что будет обосновано далее. Будем считать, что угол падения волны не равен углу Брюстера $\theta_{\text{Бр}}=\arcsin\sqrt{\dfrac{1}{\alpha+1}}=\arcsin\sqrt{\dfrac{\varepsilon_{\text{кон}}}{\varepsilon_{\text{кон}}+1}}$. Тогда количество точек поворота, ближайших к вещественной оси s, будет равно четырем, и при достаточно больших значениях ω можно рассматривать каждую из симметричных относительно оси s пар точек как две независящие друг от друга локальные неоднородности. С математической точки зрения это означает, что обход вокруг каждой такой пары точек будет осуществляться порознь. При учете одной пары точек получим $|R|\cong\exp\left(-\pi\eta_0C_1\right)$, а при учете другой — $|R|\cong\exp\left(-\pi\eta_0C_2\right)$, где $C_j=\operatorname{Im}\int\limits_{x_{0-}^{(j)}}^{x_{0+}^{(j)}}\sqrt{\dfrac{\varepsilon-\sin^2\theta}{\varepsilon^2}}\cdot dx;\ \ j=1,2$. Тогда, учитывая, что $\eta_0>>1$ и $C_j>0$, получаем

$$|R|\cong\exp\left(-\pi\eta_0\min\left\{C_1,C_2\right\}\right). \tag{9}$$

При вычислении C_j, так же как и ранее, заменим интегрирование на участке $\left(x_{0-}^{(j)},x_{0+}^{(j)}\right)$ интегрированием по трем сторонам прямоугольника. Тогда с учетом соотношения (9) для модуля коэффициента отражения получаем

$$|R|=\begin{cases}\exp(-2\pi\eta_0\cos\theta),\ \theta\in(0,\theta_{\text{Бр}}),\varepsilon_{\text{кон}}<1;\ \theta\in\left(\theta_{\text{Бр}},\pi/2\right),\varepsilon_{\text{кон}}>1;\\ \exp\left(-2\pi\eta_0\sqrt{\varepsilon_{\text{кон}}-\sin^2\theta}\right),\ \theta\in(0,\theta_{\text{Бр}}),\varepsilon_{\text{кон}}>1;\ \theta\in\left(\theta_{\text{Бр}},\pi/2\right),\varepsilon_{\text{кон}}<1.\end{cases}$$

Этот результат согласуется с точным аналитическим решением, полученным в работе [7].

Обоснуем утверждение об отсутствии влияния полюсов на модуль коэффициента отражения. Для этого рассмотрим решение уравнения (1) методом последовательных приближений. Вместо зависимости $\varepsilon(s)=\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{e^s+\alpha}{e^s+1}$ обратимся к зависимости $\varepsilon_{\text{апр}}(s)=\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{e^u+\alpha}{e^u+1}$, где величина u неявно задана уравнением $e^s = \frac{e^u(e^u + 1 + \delta)}{e^u + 1} = e^u + \frac{\delta e^u}{e^u + 1}$, и бесконечно малый параметр $\delta > 0$ выберем так, чтобы его порядок был меньше, чем модуль коэффициента отражения, который вычисляется при учете только точек поворота, при этом будет справедливо неравенство $\left|\eta_0\left(\varepsilon_{\text{апр}} - \varepsilon\right)\right| << 1$.

Будем искать решение уравнения (3) методом последовательных приближений:

$$\frac{d^2E}{ds^2} + \eta_0^2\left(\varepsilon_{\text{апр}} - \sin^2\theta\right)E = \eta_0^2\left(\varepsilon_{\text{апр}} - \varepsilon\right)E. \qquad (10)$$

В нулевом приближении правую часть выражения (10) не учитываем. Пусть $R^{„0“}$ — коэффициент отражения волны от аппроксимирующего слоя, найденный методом фазовых интегралов при учете только точек поворота. Тогда из решения уравнения (10) в первом приближении с учетом граничных условий, вытекающих из постановки задачи, нетрудно для коэффициента отражения волны получить $R = R^{„0“} + \Delta R$, где относительная поправка $|\Delta R/R^{„0“}| \Rightarrow 0$ при $\delta/R^{„0“} \Rightarrow 0$. Поскольку $R^{„0“} \neq 0$ для любого конечного значения частоты, то в схеме метода последовательных приближений можно ограничиться нулевым приближением.

Аналогичную схему можно использовать и для слоя с переменным масштабом изменения функции $\varepsilon(z)$, если в качестве $\varepsilon_{\text{апр}}$ рассмотреть функцию $x'_s = \varepsilon_{\text{апр}}(s) = \frac{1}{\alpha}\frac{e^u + \alpha}{e^u + 1}$, где $e^x = e^u + \frac{\delta e^u}{e^u + 1}$. Таким образом, можно сделать вывод о том, что в общем случае задания функции диэлектрической проницаемости посредством рациональной дроби от аргумента $\exp(z/l)$ наличие полюсов не влияет на асимптотику модуля коэффициента отражения.

Использование предложенного (более простого относительно предшествующих) способа определения высокочастотной асимптотики зависимости коэффициента отражения от неоднородного диэлектрического слоя позволяет получать асимптотические (часто совпадающие с точными) приближения для профилей диэлектрической проницаемости более широкого вида. Ценность результата заключается также в обосновании отсутствия роли простых полюсов с позиций теории приближения функции $\varepsilon(z)$ другими функциями, имеющими полюсы в бесконечно удаленной точке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.
2. *Альперт Я. Л.* Распространение электромагнитных радиоволн и ионосфера. М.: Изд-во АН СССР, 1960. 480 с.
3. *Epshtein P.* Reflection of waves in an inhomogeneous absorbing medium // Proc. Nat. Acad. Sci. Amer. 1930. Vol. 16. P. 627—637.
4. *Westcott B. S.* Exact solutions for vertically polarized electromagnetic waves in horizontally stratified isotropic media // Proc. Camb. Phil. Soc. 1969. Vol. 66, pt. 3. P. 675—684.
5. *Rawer K.* Electrische Wellen in einem geschichteten Medium // Ann. Phys. 1939. Bd. 35 (5). P. 385—416.
6. *Heaading J.* Investigation into a new stratified hyperbolic profile // Proc. Camb. Phil. Soc. 1967. Vol. 63, pt. 3. P. 439—450.
7. *Денисов А. В.* Точное аналитическое решение задачи распространения волны горизонтальной поляризации через переходный слой без потерь с переменным масштабом изменения диэлектрической проницаемости // Вестн. СПбГУ. 2002. Сер. 4, вып. 1 (№ 4). С. 124—128.

8. *Денисов А. В., Леонтьев В. А.* Особенности отражения плоской волны горизонтальной поляризации от переходного плазменного слоя с переменным масштабом изменения плазменной частоты // Информация и космос. 2010. № 1. С. 45—50.

9. *Заславский Г. М., Мейтлис В. П., Филоненко Н. Н.* Взаимодействие волн в неоднородных средах. Новосибирск: Наука, 1982. 177 с.

10. *Хединг Дж.* Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ) / Пер. с англ.; Под ред. *В. П. Маслова*. М.: Мир, 1965. 238 с.

Сведения об авторах

Александр Владимирович Денисов — канд. физ.-мат. наук; Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, кафедра высшей математики;
E-mail: A.V.Denisov@inbox.ru

Наталия Петровна Сидорова — студентка; Санкт-Петербургский государственный горный институт им. Г. В. Плеханова (технический университет); кафедра геофизических и геохимических методов поиска и разведки;
E-mail: archie3@mail.ru

Рекомендована кафедрой
геофизических и геохимических
методов поиска и разведки
СПГГИ(ТУ)

Поступила в редакцию
22.09.10 г.