

И. Б. ФУРТАТ

## РОБАСТНЫЙ СТАТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫМИ ОБЪЕКТАМИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Предложен робастный статический алгоритм управления динамическими объектами в условиях неопределенности и запаздывания, обеспечивающий достаточную близость выходного сигнала объекта к эталонному. Приведены результаты моделирования, иллюстрирующие работоспособность алгоритма.

*Ключевые слова:* робастное управление, наблюдатель производных, сингулярно возмущенный объект.

**Введение.** Проектирование схем управления объектом в условиях неопределенности и возможности измерения только его выходного сигнала является актуальной задачей современной теории и практики автоматического регулирования. В настоящее время предложено достаточно много решений для построения регуляторов на основе способов робастного управления.

Если относительная степень объекта ( $\gamma$ ) больше единицы, то для реализации робастных систем управления необходимо получить оценки производных соответствующих сигналов с использованием динамических наблюдателей. Так, в работе [1] рассматривается закон управления, позволяющий реализовать оценку производных выходного сигнала объекта с помощью динамического наблюдателя с переменной структурой (sliding mode observer), порядок которого равен размерности вектора состояния модели объекта. В работе [2] для синтеза сис-

темы стабилизации нелинейных динамических объектов используется закон управления, зависящий от оценок производных выходного сигнала объекта, которые получены с помощью динамического наблюдателя с большим коэффициентом усиления (high-gain observer), при этом порядок наблюдателя равен размерности вектора состояния модели. Робастный закон управления по ошибке слежения синтезируется в работе [3], где для оценки производных сигнала ошибки слежения используется наблюдатель с динамическим порядком, равным  $\gamma - 1$ . В работе [4] синтезированы робастные системы управления с компенсацией внутренних и внешних возмущений с применением вспомогательного контура. Здесь для оценки производных сигнала, содержащего информацию о возмущениях объекта, используется предложенный в работе [2] наблюдатель с динамическим порядком  $\gamma - 1$ . Анализ данных публикаций показал, что разработчики стремятся получить как простые в расчете регуляторы, так и регуляторы с невысоким динамическим порядком. Решению задачи построения регулятора, не содержащего динамического наблюдателя, посвящена настоящая статья.

В статье рассматривается задача построения робастной системы управления по выходу линейными динамическими объектами в условиях параметрической, сигнальной неопределенности и запаздывания. Для оценки производных в системе управления используется наблюдатель, основанный на левых разностях. Такой подход исключает применение интегрирующих звеньев в наблюдателе, что делает его статическим.

**Постановка задачи.** Рассмотрим объект управления, динамические процессы в котором описываются уравнением

$$Q(p)y(t) + D(p)y(t - \tau(t)) = kR(p)u(t) + f(t), \quad (1)$$

где  $y(t) \in R$  — регулируемая переменная, доступная измерению;  $u(t) \in R$  — сигнал управления;  $f(t)$  — внешнее неконтролируемое ограниченное возмущение;  $Q(p)$ ,  $R(p)$ ,  $D(p)$  — линейные дифференциальные операторы,  $\deg Q(p) = n$ ,  $\deg D(p) < n$ ,  $\deg R(p) = m$ ;  $k > 0$ ;  $\tau(t) > 0$  — неизвестное время запаздывания;  $p = d/dt$  — оператор дифференцирования.

Требуется спроектировать непрерывную систему управления, обеспечивающую выполнение целевого условия

$$|y(t) - y_{\text{эт}}(t)| < \delta \quad \text{при } t > T, \quad (2)$$

где  $y_{\text{эт}}(t)$  — гладкий эталонный сигнал;  $\delta > 0$  — достаточно малая величина;  $T > 0$  — время, по истечении которого с момента начала работы системы должно выполняться неравенство (2).

Решим сформулированную задачу при следующих ограничениях (предположениях).

**Предположение 1.** Неизвестные коэффициенты операторов  $Q(p)$ ,  $D(p)$ ,  $R(p)$  и число  $k > 0$  зависят от некоторого вектора неизвестных параметров объекта —  $\chi \in \Xi$ ,  $\Xi$  — известное множество.

**Предположение 2.** Известны порядки операторов  $Q(p)$  и  $R(p)$ , причем относительная степень  $\gamma = n - m > 1$ .

**Предположение 3.** Объект управления (1) минимально фазовый.

**Предположение 4.** В объекте управления доступен измерению только сигнал  $y(t)$ .

**Метод решения.** Сформируем уравнение, характеризующее точность слежения выходного сигнала объекта за эталонным сигналом, в виде  $e(t) = y(t) - y_{\text{эт}}(t)$ , где  $e(t)$  — ошибка слежения. В соответствии с выражениями (1) и (2) преобразуем уравнение ошибки слежения к форме

$$Q(p)e(t) = R(p)u(t) + f(t) - Qy_{\text{эт}}(t) - D(p)y(t - \tau(t)). \quad (3)$$

Зададим закон управления

$$u(t) = -\alpha M(p)\bar{e}(t), \quad (4)$$

где  $\alpha > 0$ ;  $M(p)$  — линейный дифференциальный оператор порядка  $\gamma$ , причем  $M(\lambda)$  — гурвицев,  $\lambda$  — комплексная переменная;  $\bar{e}(t)$  — оценка сигнала  $e(t)$ .

Следует отметить, что закон управления вида (4) использовался, например, в работах [2, 3], где последующий синтез системы управления осуществлялся с помощью динамических наблюдателей производных. В данной статье для дальнейшего синтеза системы управления используется статический наблюдатель производных.

Перепишем уравнение (3), подставив в него выражение (4):

$$F(p)e(t) = \psi(t), \quad (5)$$

где

$$F(p) = Q(p) + \alpha R(p)M(p), \quad \psi(t) = f(t) - Q(p)y_{\text{гр}}(t) - D(p)y(t - \tau(t)) + \alpha R(p)M(p)(e(t) - \bar{e}(t)).$$

Очевидно, что всегда существует  $\alpha$  и  $M(\lambda)$ , такие что  $F(\lambda)$  будет гурвицевым. Причем выбор значений коэффициента  $\alpha$  и полинома  $M(\lambda)$  обеспечивает требуемое распределение корней характеристического многочлена  $F(\lambda)$  замкнутой системы.

Для реализации закона управления (4) рассмотрим наблюдатель

$$\dot{\xi}(t) = G\dot{\xi}(t-h) + H(e(t) - e(t-h)), \quad \bar{e}(t) = L\xi(t), \quad (6)$$

где  $\xi(t) = [\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_\gamma(t)]^T$ ,  $G = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1/h & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1/h^\gamma & 1/h^{\gamma-1} & \dots & 1/h & 0 \end{bmatrix}$ ,  $H = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/h \\ \vdots \\ 1/h^\gamma \end{bmatrix}$ ,  $h > 0$  — малая

величина,  $L = [1, 0, \dots, 0]$ .

Отметим, что наблюдатель (6) представляет собой оценку производных с использованием левых разностей:

$$e(t) = e(t); \quad \dot{\xi}_1(t) = \frac{e(t) - e(t-h)}{h}, \quad \dot{\xi}_2(t) = \frac{\dot{\xi}_1(t) - \dot{\xi}_1(t-h)}{h}, \dots, \dot{\xi}_\gamma(t) = \frac{\dot{\xi}_{\gamma-1}(t) - \dot{\xi}_{\gamma-1}(t-h)}{h}.$$

Структурная схема такого наблюдателя приведена на рис. 1.

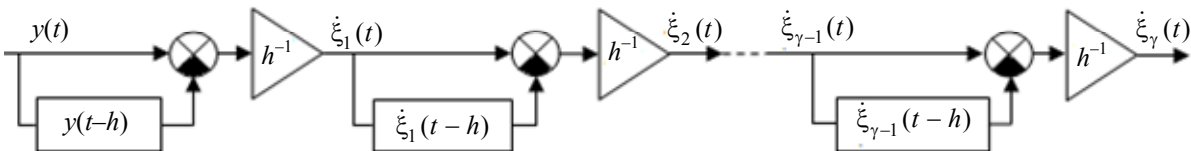


Рис. 1

Сформулируем утверждение, при выполнении условий которого система управления будет работоспособной.

**Утверждение.** Пусть выполнены предположения 1—4. Тогда существуют числа  $\alpha > 0$  и  $h_0 > 0$ , такие что при  $h \leq h_0$  система управления, характеризуемая уравнениями (4) и (6), обеспечивает выполнение целевого условия (2) и ограниченность всех сигналов в замкнутой системе.

*Доказательство* утверждения приведено в Приложении.

Проиллюстрируем полученные результаты на следующем примере.

**Пример.** Пусть математическая модель объекта управления описывается уравнением

$$(p^3 + q_2 p^2 + q_1 p + q_0)y(t) + (d_2 p^2 + d_1 p + d_0)y(t - \tau(t)) = r_0 u(t) + f(t). \quad (7)$$

Класс неопределенности  $\Xi$  модели (7) задан неравенствами:  $|q_i| \leq 5$ ;  $|d_i| \leq 5$ ;  $i = 0, 1, 2$ ;  $1 \leq r_0 \leq 5$ ;  $|f(t)| \leq 3$ . Зададим  $h = 0,01$ ,  $M(p) = p$  и сформируем систему управления, реализуемую наблюдателем  $\dot{\xi}_1(t) = 100(e(t) - e(t - 0,01))$ ,  $\dot{\xi}_2(t) = 100(\dot{\xi}_1(t) - \dot{\xi}_1(t - 0,01))$  и законом управления  $u(t) = -\alpha(\dot{\xi}_2(t) + 10\dot{\xi}_1(t) + 25e(t))$ .

Положим  $y_{\text{эт}}(t) = 1 + \sin t + \cos 2t$ . Пусть параметры модели объекта (7) определены следующим образом:  $q_2 = -5$ ,  $q_1 = -5$ ,  $q_0 = -5$ ,  $d_2 = 5$ ,  $d_1 = 5$ ,  $d_0 = 5$ ,  $\tau(t) = 2 + \exp(-0,5t)$ ,  $r_0 = 2$ ,  $f(t) = 10(2 + \sin 1,2t)$ .

На рис. 2, а—в представлены результаты моделирования переходного процесса по ошибке  $e(t)$ : а — при  $\alpha = 10$  и  $y(0) = \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = 1$ ; б — при  $\alpha = 20$  и  $y(0) = \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = 0$ ; в — при  $\alpha = 30$  и  $y(0) = \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = 0$ .

Как показали результаты моделирования, переходные процессы в системе управления не зависят существенно от параметров модели объекта, а зависят в основном от выбора полинома  $M(\lambda)$  и коэффициента  $\alpha$ . Так, при  $\alpha = 10$  ошибка слежения  $e(t)$  не превышает значения  $\delta = 0,15$  через 2,5 с после начала работы системы; при  $\alpha = 20$  значение  $|e(t)| < 0,08$  при  $t \geq 0,2$  с; при  $\alpha = 30$  ошибка  $|e(t)| < 0,05$  при  $t \geq 0,2$  с (см. рис. 2, а—в соответственно).

**Заключение.** Решена задача робастного управления линейными динамическими объектами в условиях их параметрической и сигнальной неопределенности и при доступности измерению только скалярного выходного сигнала объекта. В отличие от работ [1—4] для оценки производных использовался статический наблюдатель. Полученный алгоритм компенсирует внутренние и внешние возмущения с заданной точностью. Моделирование показало хорошие качества переходных процессов и подтвердило теоретические результаты.

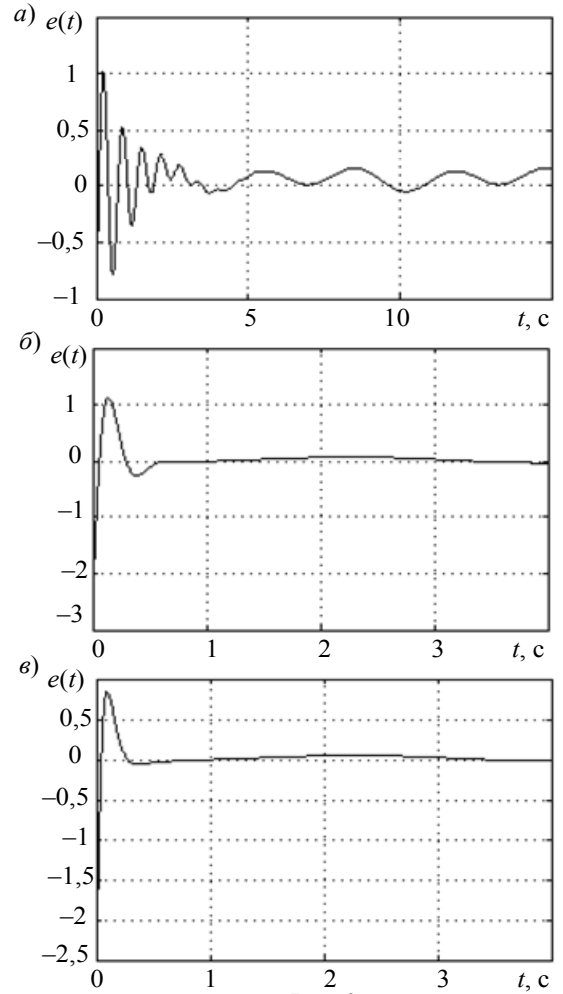


Рис. 2

ПРИЛОЖЕНИЕ

**Доказательство утверждения.** Перепишем уравнения (5) и (6):

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) &= A\varepsilon(t) + B\psi(t), \quad e(t) = L\varepsilon(t); \\ h^\gamma \dot{\xi}(t) &= \tilde{G}\xi(t-h) + \tilde{H}(e(t) - e(t-h)), \quad \bar{e}(t) = L\xi(t), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

здесь  $A$ ,  $B$  и  $L$  — матрицы, полученные при переходе от выражения (5) к первому уравнению системы (8),  $\tilde{G} = h^\gamma G$ ,  $\tilde{H} = h^\gamma H$ .

Воспользуемся теоремой, приведенной в работе [5, теорема 11.1]. Рассмотрим систему (8) при  $h = 0$ . Это равносильно тому, что решение второго уравнения системы позволит обеспечить точную оценку  $\gamma$ -производных сигнала  $e(t)$ . Значит, при  $h = 0$  получим, что  $\alpha R(p)M(p)(e(t) - \bar{e}(t)) = 0$ . Тогда, в силу ограниченности сигналов  $f(t)$  и  $y_{\text{эт}}(t)$ , функция  $\psi(t)$  будет ограниченной. В результате при  $h = 0$  система уравнений (8) асимптотически устойчива и все сигналы в ней ограничены.

Так как условия используемой теоремы [5] выполняются, то существует число  $h_0$ , такое что при  $h \leq h_0$  все переменные в замкнутой системе ограничены. Однако асимптотическая устойчивость редуцированной системы (8) при  $h = 0$  не гарантирует асимптотической устойчивости системы (8) при  $h > 0$ . Найдем значение  $h_0$ , при котором для  $h \leq h_0$  система (8) будет устойчивой.

Пусть в системе (8)  $h = h_0$ . Выберем функционал Ляпунова — Красовского в виде

$$V = \varepsilon^T(t)P_1\varepsilon(t) + \int_{t-h_0}^t \varepsilon^T(s)P_2\varepsilon(s)ds + \int_{t-h_0}^t \dot{\xi}^T(s)P_3\dot{\xi}(s)ds, \quad (9)$$

где  $P_1, P_2, P_3$  — положительно-определенные симметричные матрицы, матрица  $P_1$  является решением уравнения  $A^T P_1 + P_1 A = -W_1$ ,  $W_1 = W_1^T > 0$ .

Возьмем от функционала (9) производную по времени вдоль траекторий системы (8):

$$\dot{V} = -\varepsilon^T(t)Q_1\varepsilon(t) + 2\varepsilon^T(t)P_1B\psi(t) + \varepsilon^T(t)P_2\varepsilon(t) - \varepsilon^T(t-h_0)P_2\varepsilon(t-h_0) + \\ + \dot{\xi}^T(t)P_3\dot{\xi}(t) - \dot{\xi}^T(t-h_0)P_3\dot{\xi}(t-h_0). \quad (10)$$

Подставим в выражение (10) второе уравнение системы (8):

$$\dot{V} = -\varepsilon^T(t)W_1\varepsilon(t) + 2\varepsilon^T(t)P_1B\psi(t) + \varepsilon^T(t)P_2\varepsilon(t) - \varepsilon^T(t-h_0)P_2\varepsilon(t-h_0) + \\ + h_0^{-2\gamma}\dot{\xi}^T(t-h_0)\tilde{G}^T P_3\tilde{G}\dot{\xi}(t-h_0) + 2h_0^{-\gamma}\tilde{G}^T\dot{\xi}^T(t-h_0)P_3\tilde{H}L\varepsilon(t) + \\ - 2h_0^{-\gamma}\dot{\xi}^T(t-h_0)\tilde{G}^T P_3\tilde{H}L\varepsilon(t-h_0) + h_0^{-2\gamma}\varepsilon^T(t)L^T\tilde{H}^T P_3\tilde{H}L\varepsilon(t) + \\ + h_0^{-2\gamma}\varepsilon^T(t)L^T\tilde{H}^T P_3\tilde{H}L\varepsilon(t-h_0) + h_0^{-2\gamma}\varepsilon^T(t-h_0)L^T\tilde{H}^T P_3\tilde{H}L\varepsilon(t-h_0) - \dot{\xi}^T(t-h_0)P_3\dot{\xi}(t-h_0). \quad (11)$$

Рассмотрим оценки

$$2\varepsilon^T(t)P_1B\psi(t) \leq 2h_0^{-1}\varepsilon^T(t)P_1BB^T P_1\varepsilon(t) + 2h_0|\psi(t)|^2, \quad \bar{\psi} = \sup_t |\psi(t)|^2;$$

$$2h_0^{-\gamma}\dot{\xi}^T(t-h_0)\tilde{G}^T P_3\tilde{H}L\varepsilon(t) \leq 2h_0^{-\gamma}\dot{\xi}^T(t-h_0)\tilde{G}^T P_3\tilde{H}L\left(\tilde{G}^T P_3\tilde{H}L\right)^T \dot{\xi}(t-h_0) + 2h_0^{-\gamma}\varepsilon^T(t)\varepsilon(t);$$

$$2h_0^{-\gamma}\dot{\xi}^T(t-h_0)\tilde{G}^T P_3\tilde{H}L\varepsilon(t-h_0) \leq 2h_0^{-\gamma}\dot{\xi}^T(t-h_0)\tilde{G}^T P_3\tilde{H}L\left(\tilde{G}^T P_3\tilde{H}L\right)^T \dot{\xi}(t-h_0) + \\ + 2h_0^{-\gamma}\varepsilon^T(t-h_0)\varepsilon(t-h_0),$$

$$h_0^{-2\gamma}\varepsilon^T(t)L^T\tilde{H}^T P_3\tilde{H}L\varepsilon(t-h_0) \leq h_0^{-2\gamma}\varepsilon^T(t)L^T\tilde{H}^T P_3\tilde{H}L\left(L^T\tilde{H}^T P_3\tilde{H}L\right)^T \varepsilon(t) + \\ + h_0^{-2\gamma}\varepsilon^T(t-h_0)\varepsilon(t-h_0)$$

и введем следующие обозначения:

$$W_2 = W_1 - 2h_0^{-1}P_1BB^T P_1 - P_2 - h_0^{-2\gamma}L^T\tilde{H}^T P_3\tilde{H}L - 2h_0^{-\gamma}I - h_0^{-2\gamma}L^T\tilde{H}^T P_3\tilde{H}L\left(L^T\tilde{H}^T P_3\tilde{H}L\right)^T;$$

$$W_3 = P_2 - h_0^{-2\gamma}L^T\tilde{H}^T P_3\tilde{H}L - 2h_0^{-\gamma}I - h_0^{-2\gamma}I;$$

$$W_4 = P_3 - h_0^{-2\gamma}\tilde{G}^T P_3\tilde{G} - 2h_0^{-\gamma}\tilde{G}^T P_3\tilde{H}L\left(\tilde{G}^T P_3\tilde{H}L\right)^T - 2h_0^{-\gamma}\tilde{G}^T P_3\tilde{H}L\left(\tilde{G}^T P_3\tilde{H}L\right)^T,$$

где  $I$  — единичная матрица.

Очевидно, что существует такое  $h_0$ , для которого  $W_i \geq 0$ ,  $i = 2, 3, 4$ . Воспользовавшись оценками, перепишем уравнение (11) в виде

$$\dot{V} \leq -\varepsilon^T(t)W_2\varepsilon(t) - \varepsilon^T(t-h_0)W_3\varepsilon(t-h_0) - \dot{\xi}^T(t-h_0)W_4\dot{\xi}(t-h_0) + \\ + 2h_0\bar{\psi} \leq -\omega_{\min}(W_2)e^2(t) + 2h_0\bar{\psi}, \quad (12)$$

где  $\omega_{\min}(W_2)$  — наименьшее собственное число матрицы  $W_2$ .

Из выражения (12) следует, что при  $h \leq h_0$  выполняется неравенство  $|e(t)| \leq \sqrt{2h_0\bar{\psi}/\omega_{\min}(W_2)}$ . Следовательно, при  $h \leq h_0$ , изменяя  $\alpha$  и  $h$ , можно получить требуемые величины  $\delta$  и  $T$  в целевом условии (2). Следует отметить, что оценка ошибки  $e(t)$  доста-

точно груба, так как получена при исключении составляющих  $\varepsilon^T(t-h_0)W_3\varepsilon(t-h_0)$  и  $\xi^T(t-h_0)W_4\xi(t-h_0)$ , участвующих в компенсации величины  $2h_0\bar{\psi}$ .

Статья подготовлена по результатам работ, выполненных при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 12-08-01183 и № 12-01-31354) и федеральной целевой программы „Научные и научно-педагогические кадры инновационной России“ на 2009—2013 гг. (соглашение 14.В37.21.0871, соглашение 14.В37.21.1480).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Veluvolu K. C., Kim M. Y., Lee D. Nonlinear sliding mode high-gain observers for fault estimation // Intern. J. of Systems Science. 2011. Vol. 42, N 7. P. 1065—1074.
2. Atassi A. N., Khalil H. K. A separation principle for the stabilization of class of nonlinear systems // IEEE Trans. on Automatic Control. 1999. Vol. 44, N 9. P. 1672—1687.
3. Бобцов А. А. Алгоритм робастного управления в задаче слежения за эталонным сигналом // Автоматика и телемеханика. 2003. № 6. С. 104—113.
4. Цыкунов А. М. Алгоритмы робастного управления с компенсацией ограниченных возмущений // Там же. 2007. № 7. С. 103—115.
5. Халил Х. К. Нелинейные системы. М. — Ижевск: НИЦ „Регулярная и хаотическая динамика“, Ин-т компьютерных исследований, 2009.

#### Сведения об авторе

**Игорь Борисович Фуртат** — канд. техн. наук, доцент; Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; E-mail: cainenash@mail.ru

Рекомендована  
Институтом проблем  
машиноведения РАН

Поступила в редакцию  
25.07.12 г.