В. В. Григорьев, В. И. Бойков, С. В. Быстров, А. И. Рябов, О. К. Мансурова

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПОЗИТИВНЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ КАЧЕСТВЕННОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ*

Введено понятие качественной экспоненциальной устойчивости для класса динамических позитивных дискретных систем, на основе которой проводится оценка качества сходящихся и расходящихся процессов.

Ключевые слова: *динамические системы, устойчивость, оценка качества, метод Ляпунова, модульные функции, позитивные системы.*

Введение. Целью настоящей работы является расширение понятия качественной экспоненциальной устойчивости и неустойчивости на более широкий класс динамических систем, а именно на позитивные системы — системы сравнения, позволяющие анализировать различные виды устойчивости и неустойчивости многосвязных систем, оценивать качество сходящихся и расходящихся процессов.

Если свойство асимптотической устойчивости определяет сходимость или расходимость процессов в течение времени, то свойство экспоненциальной устойчивости определяет скорость сходимости или расходимости процессов, характеризуя тем самым быстродействие системы. Выполнение условий качественной экспоненциальной устойчивости позволяет судить о средней скорости сходимости или расходимости процессов, а также о текущих отклонениях поведения процессов от осредненного, что дает информацию о характере поведения переходных процессов (колебательность, перерегулирование).

Разработка аналитических и вычислительных технологий для анализа устойчивости и неустойчивости систем сравнения, и как следствие — многосвязных систем, а также качества процессов является практически необходимой задачей исследования. Современные аппаратные средства вычислительной техники и компьютерные технологии анализа поведения многосвязных динамических систем позволяют реализовать эффективные алгоритмы построения систем сравнения на базе функций Ляпунова, получаемых при синтезе многосвязных систем. Использование модульных функций Ляпунова значительно упрощает процедуры исследования поведения позитивных систем [1—3]. Полученные на основе этих функций условия

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП „Научные и научно-педагогические кадры инновационной России“ на 2009—2013 гг. (государственный контракт № 16.740.11.0553).

экспоненциальной и качественно экспоненциальной устойчивости и неустойчивости позволяют судить о поведении процессов и их качестве для многосвязных систем [4—6].

Постановка задачи. Получим матричные неравенства и уравнения типа Ляпунова при использовании модульных функций Ляпунова применительно к стационарным дискретным системам, все значения которых принимают неотрицательные значения. К классу позитивных относятся, например, системы сравнения, используемые для анализа свойств многосвязных систем на основе метода векторных функций Ляпунова.

Пусть движение линейной дискретной системы задано разностным уравнением

$$\nu(m+1) = A\nu(m) \ , \tag{1}$$

где ν — k-мерный вектор состояния системы, все переменные которого принимают только неотрицательные значения при любом значении m= 0,1,2,…; A — (k×k)-матрица с неотрицательными элементами.

Введем модульную функцию Ляпунова для системы (1) в виде

$$V(\nu) = \sum_{i=0}^{k} p_{0i} \left\|\nu_i\right\|, \tag{2}$$

где p_{0i} — положительные весовые коэффициенты, а ν_i — переменные вектора состояния позитивной системы (ν=[ν_1, ν_2, …, ν_k]^T). Учитывая неотрицательность значений переменных вектора состояния $\nu_i \geq 0$, знак модуля в выражении (2) можно опустить и переписать его в более компактной матричной форме

$$V(\nu) = P_0\nu \ , \tag{3}$$

где $P_0 = \left[p_{01}, p_{02}, ..., p_{0k}\right]$ — (1×k)-матрица с положительными элементами. В дальнейшем, хотя и будем пользоваться более простой формой записи модульной функции Ляпунова, необходимо помнить, что первообразной является первичная форма задания (3). Поэтому следует оговорить, что если A — квадратная (k×k)-матрица, то соотношение

$$V(A\nu) = P_0 A\nu \tag{4}$$

справедливо только в том случае, если элементы матрицы A неотрицательны.

Матричные неравенства и уравнения для линейных позитивных систем. Приведем матричное неравенство и уравнения типа Ляпунова, определяющие локальное достаточное условие экспоненциальной устойчивости позитивной системы, на основе выражения (4). Запишем неравенство для предшествующего и последующего значений модульных функций Ляпунова на траекториях движения позитивной системы

$$V\left(A\nu(m)\right) \leq \lambda V(\nu(m)), \quad 0<\lambda<1. \tag{5}$$

Элементы матрицы A неотрицательны, следовательно, неравенство (5) можно переписать в виде

$$P_0 A\nu(m) \leq \lambda P_0\nu(m) . \tag{6}$$

Полученное неравенство должно выполняться при любых m и любых неотрицательных значениях вектора $\nu(m)$, поэтому оно эквивалентно матричному неравенству

$$P_0 A \leq \lambda P_0 , \tag{7}$$

которое следует понимать так: каждый элемент матрицы строки $P_0 A$ меньше соответствующего элемента матрицы P_0, умноженного на значение параметра λ, либо равен ему.

Если выполняется матричное уравнение

$$P_0 A - \lambda P_0 = Q_0 , \tag{8}$$

где Q_0 — (1×k)-матрица с неотрицательными элементами, то из него следует матричное неравенство (7). Выражение (8) является модифицированным уравнением типа Ляпунова для анализа экспоненциальной устойчивости позитивных систем с неотрицательными значениями переменных состояния и элементов матрицы описания движения системы.

Назовем пару $P_0 A\nu$, $\mu P_0\nu$ пучком линейных форм с положительными элементами, где $\nu \in \mathbb{R}_t^k$. Установим минимаксные свойства этого пучка, записанного в виде неравенства:

$$\mu_- \le \frac{P_0 A\nu}{P_0\nu} \le \mu_+(m). \tag{9}$$

Представим матрицу A в виде $A = [a_1, a_2, ..., a_k]$, где a_i — матрица-столбец размерности (k×1). Тогда значения μ_+ и μ_- в выражении (9) могут быть определены следующим образом

$$\mu_+ = \max_i \left\{ \frac{P_0 a_i}{P_{0i}} \right\}, \tag{10}$$

$$\mu_- = \min_i \left\{ \frac{P_0 a_i}{P_{0i}} \right\}. \tag{11}$$

При $\lambda = \mu_+$, согласно соотношению (10), из (9) следует выполнение неравенства, являющегося условием экспоненциальной устойчивости. Таким образом, получаем значение параметра λ, определяющего оценку быстродействия позитивной системы. Согласно определению экспоненциальной устойчивости [1], $\rho = C_2/C_1$. Значения C_1 и C_2 определяются из минимаксных свойств пучка линейных форм (10) и (11) с положительными элементами

$$C_1 \le \frac{P_0\nu}{I_0\nu} \le C_2, \tag{12}$$

$I_0 = [1, 1, ..., 1]$ — (1×k)-матрица с единичными элементами. Следовательно, значения C_1 и C_2 определяются выражениями

$$C_1 = \min_i \{ p_{0i} \}, \tag{13}$$

$$C_2 = \max_i \{ p_{0i} \}. \tag{14}$$

Дадим геометрическую интерпретацию локальных достаточных условий экспоненциальной устойчивости позитивной системы при использовании модульных функций Ляпунова. Часть пространства R^k, содержащего все векторы с неотрицательными значениями элементов, будем обозначать $R_+^k \left(R_+^k \subset R^k \right)$. На рисунке, *а* для случая k=2 дана интерпретация модульной функции Ляпунова.

Поверхность постоянного уровня (прямая линия), определяемая уравнением

$$P_0\nu = P_0\nu(m),$$

отсекает в R_+^2 область с заштрихованными границами. Поверхность постоянного уровня

$$I_0\nu = C_i V\left(\nu(m)\right), \quad i = 1, 2, \tag{15}$$

определяет минимаксные ограничения для модульной функции Ляпунова, определяемой матрицей P_0. На рисунке, *б* показано, что для экспоненциально устойчивой системы в случае выполнения локальных достаточных условий при $0 < \lambda < 1$ при любом значении $\nu(m) \in R_+^2$ последующее значение вектора $\nu(m)$ будет принадлежать заштрихованной области, т.е. области, отсекаемой от R_+^2 поверхностью

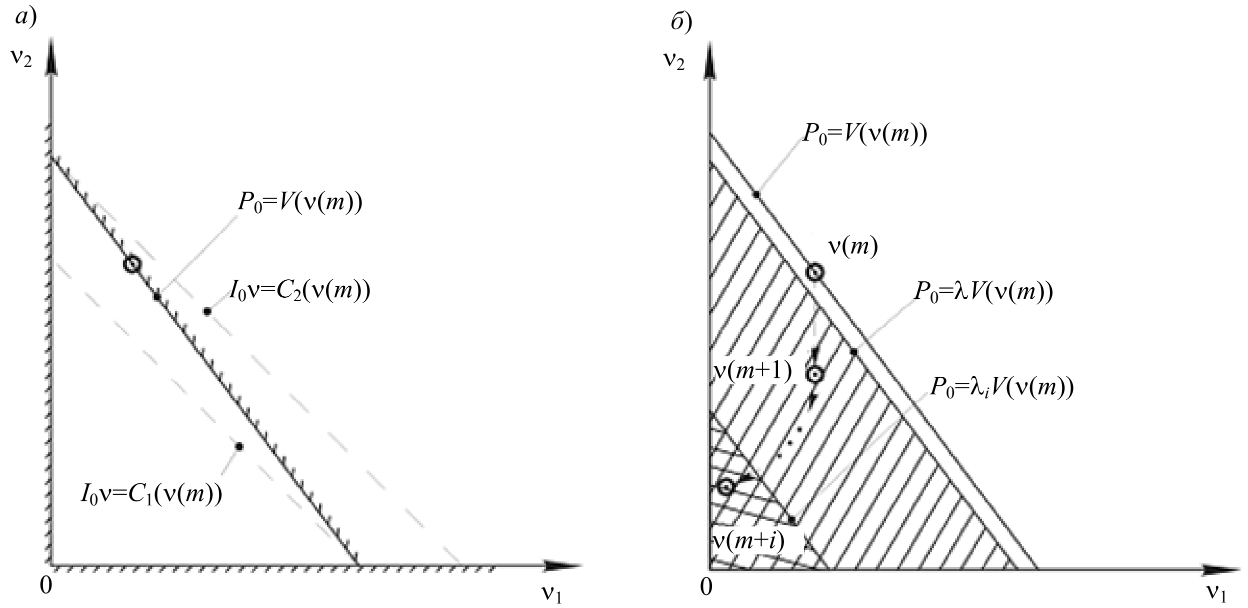
$$P_0 A = \lambda V \nu(m). \tag{16}$$

Другими словами, если поверхность, ограничивающая область расположения последующих значений вектора состояний системы

$$P_0\nu = V\left(\nu(m)\right), \tag{17}$$

проходит через конец вектора $\nu(m)$, то значение ее постоянного уровня уменьшается λ раз (λ<1) в соответствии с (16).

На рисунке двойной штриховкой обозначена область расположения вектора состояния через i интервалов дискретности. С увеличением числа интервалов m при λ<1 эти области стягиваются к началу координат, следовательно, и значения вектора состояния стремятся к нулю.



Виды устойчивости дискретных позитивных систем. Перепишем модифицированное уравнение Ляпунова для стационарного случая позитивной системы

$$P_0 A - \lambda P_0 = -Q_0, \tag{18}$$

когда элементы матрицы A не зависят от интервала дискретности. При λ=1 получаем уравнение типа Ляпунова для стационарных позитивных дискретных систем, позволяющее проводить анализ устойчивости линейных стационарных дискретных систем, когда матрица A имеет неотрицательные элементы.

Сформулируем утверждение, являющееся аналогом теоремы Ляпунова.

Утверждение 1. Пусть заданы позитивная система и квадратная матрица A с неотрицательными элементами и вектор $\nu(0)\in R_+^2$. Тогда для того чтобы позитивная система была асимптотически устойчивой, достаточно, чтобы для какой-либо матрицы Q_0 с положительными элементами при λ=1 решение P_0 уравнения типа Ляпунова (18) содержало только положительные элементы.

Достаточное условие утверждения 1 позволяет получить простой алгоритм анализа устойчивости стационарных дискретных систем. Задаваясь произвольной матрицей Q_0 с положительными элементами, решаем линейное матричное уравнение (18) относительно неизвестной матрицы P_0 и проверяем, чтобы ее элементы были положительными. Решение уравнения Ляпунова (λ=1) имеет вид

$$P_0 = Q_0 (I - A)^{-1}, \tag{19}$$

где матрица $(I - A)$ имеет обратную, если собственные числа A лежат в единичном круге.

Утверждение 2. Пусть заданы позитивная система и квадратная матрица A с неотрицательными элементами и вектор $\nu(0)\in R_+^2$. Тогда для того чтобы позитивная система была экспоненциально устойчивой, достаточно, чтобы для какой-либо матрицы Q_0 с положительными элементами, при $\lambda<1$ решение P_0 уравнения типа Ляпунова (18) содержало только положительные элементы.

Решение уравнения Ляпунова ($\lambda < 1$) имеет вид

$$P_0 = Q_0 (I - \lambda A)^{-1}, \tag{20}$$

где матрица $(I - \lambda A)$ имеет обратную, если собственные числа A лежат в единичном круге радиуса λ с центром в начале координат.

Утверждение 3. Пусть заданы позитивная система, квадратная матрица A с неотрицательными элементами и вектор $\nu(0) \in R_+^2$. Тогда для того чтобы позитивная система была качественно экспоненциально устойчивой, требуется существование параметров $r > 0$ и $-1 < \beta + r < 1$. При этом достаточно, чтобы для какой-либо матрицы Q_0 с положительными элементами решение P_0 уравнения типа Ляпунова (18) при этих значениях содержало только положительные элементы

$$P_0 (A - \beta I) - r P_0 = -Q_0 .$$

Решение уравнения Ляпунова при λ=1 имеет вид

$$P_0 = Q_0 (A - (\beta - r) I)^{-1}, \tag{21}$$

β — среднее значение скорости сходимости процессов к положению равновесия, а r — отклонение от среднего значения траектории. Отметим, что модифицированное уравнение Ляпунова (20) при $\lambda = 1$ совпадает с уравнением (19), а (21) при значениях параметров β=0, r<1 совпадает с уравнением (20) и при β=0, r=1 — с уравнением Ляпунова (19). Поэтому можно сделать вывод, что при выполнении условий качественной экспоненциальной устойчивости позитивных дискретных систем выполняются условия экспоненциальной и асимптотической устойчивости позитивных систем.

Заключение. Условия качественной экспоненциальной устойчивости позволяют строить мажоранты и миноранты [4, 6], дающие оценки как сходимости процессов, так и колебательности (отклонений и средней составляющей) процессов. В случае $\beta + r > 1$ имеет место качественная экспоненциальная неустойчивость, что позволяет прогнозировать поведение процессов в аварийных ситуациях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Григорьев В. В., Коровьяков А. Н.* Анализ процессов в многосвязных дискретных системах на основе векторных функций Ляпунова // АиТ. 1984. № 4. С. 38—47.
2. *Григорьев В. В., Коровьяков А. Н.* Исследование качества многосвязных дискретных систем на основе метода сравнения // Там же. 1988. № 9. С. 58—66.
3. *Григорьев В. В., Дроздов В. Н., Лаврентьев В. В., Ушаков А. В.* Синтез дискретных регуляторов при помощи ЭВМ. Л.: Машиностроение, 1983. 245 с.
4. *Григорьев В. В.* Качественная экспоненциальная устойчивость непрерывных и дискретных динамических систем // Изв. вузов. Приборостроение. 2000. Т. 43, № 1—2. С. 18—23.
5. *Grigoriev V. V., Mansurova O. K.* Qualitative exponential stability and instability of dynamical systems // 5th IFAK Symp. on Nonlinear Control Systems (NOLCOS'01). St. Petersburg, 2001.
6. *Григорьев В. В., Дудров П. В., Медынский Ю. В.* Построение систем сравнения и оценка качества процессов подсистем // Науч.-техн. вестн. СПбГУ ИТМО. 2006. Вып. 33. С. 3—7.

Сведения об авторах

Валерий Владимирович Григорьев — д-р техн. наук, профессор; Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; E-mail: grigvv@yandex.ru

Владимир Иванович Бойков — канд. техн. наук, доцент; Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; E-mail: viboikov@mail.ru

Сергей Владимирович Быстров — канд. техн. наук; Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; E-mail: sbystrov@mail.ru

Александр Игоревич Рябов — аспирант; Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; E-mail: ryabov.alex.ig@gmail.com

Ольга Карибековна Мансурова — канд. техн. наук; Национальный минерально-сырьевой университет „Горный“, Санкт-Петербург; доцент; E-mail: erke7@mail.ru

Рекомендована кафедрой
систем управления и информатики

Поступила в редакцию
13.12.12 г.