

Д. С. БИРЮКОВ, Н. А. ДУДАРЕНКО, А. В. УШАКОВ

КОНТРОЛЬ ВЫРОЖДЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ И СИСТЕМ: ГРАМИАННЫЙ ПОДХОД*

Рассматривается задача контроля вырождения динамических объектов и систем. Для решения задачи используется грамианный подход, основанный на вычислении сингулярных чисел грамианов управляемости отношений системы вход—выход с последующим применением аппарата функционалов вырождения.

Ключевые слова: динамическая система, функционал вырождения, критерияльная матрица, грамиан управляемости.

Введение. В ходе исследований в области разработки технологии контроля вырождения динамических объектов и систем [1] авторы настоящей статьи поставили задачу, не прибегая к моделированию потока возможных входных заявок, сформировать априорную экспресс-оценку потенциальной возможности вырождения системы. Решение этой проблемы было найдено в результате объединения аппарата функционалов вырождения и технологии системных грамианов [2, 3]. В настоящей статье рассматривается задача контроля вырождения динамических объектов и систем на основе грамианов управляемости.

Технология конструирования функционалов вырождения. Сведем некоторую многоканальную динамическую систему посредством математических преобразований к линейной алгебраической задаче (ЛАЗ) вида

$$\eta(w) = N(w, \theta)\chi(w), \quad (1)$$

где $N(w, \theta)$ — $(m \times m)$ -матрица для любых w, θ ; $\eta(w), \chi(w)$ — p -мерные векторы; θ — p -мерный параметр, изменяющий алгебраические свойства матрицы N . Аппарат функционалов вырождения J_{Dv} формируется на спектре $\sigma_\alpha \{N\}$ сингулярных чисел $\alpha_j (j = \overline{1, m})$ критерияльной матрицы N с использованием ЛАЗ (1):

$$\sigma_\alpha \{N\} = \left\{ \alpha_j = |\mu_j^{1/2}|; j = \overline{1, m} \right\} \quad (2)$$

(μ_i — корни уравнения $\det(\mu I - N^T N) = 0$), вычисляемых в силу соотношений

$$J_{Dv} \{N\} = \alpha_v \{N\} / \alpha_1 \{N\}; v = \overline{m, 1}. \quad (3)$$

Свойства функционалов вырождения приведены в работе [1].

Если воспользоваться сингулярным разложением матрицы (SVD-процедурой) [4], то матрица N запишется следующим образом:

$$N = U_N \Sigma_N V_N^T, \quad (4)$$

$$NV_{Nj} = \alpha_j U_{Nj}, j = \overline{1, m}.$$

Это векторно-матричное соотношение придает исходной линейной алгебраической задаче (1) геометрический смысл: вектор $\chi = V_{Nj} (j = \overline{1, m})$ отражается в подпространство, натянутое на j -й элемент U_{Nj} левого сингулярного базиса U_N так, что соответствующий ему

* Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение № 14.В37.21.1928).

вектор имеет норму, равную α_j . Тогда задача вырождения формализуется как задача контроля перехода критериальной матрицы N из сферы, расположенной в пространстве, натянутом на векторы χ , в эллипсоид, натянутый на левый сингулярный базис U_N с полуосями, по размеру совпадающими с сингулярными числами матрицы N .

Вырождение матрицы N в смысле достижения ею значения единицы функционала вырождения J_D , записанного в форме (3), означает „сплющивание“ этого эллипсоида вдоль p -й полуоси, т.е. вдоль p -го левого сингулярного вектора U_{Np} . Нетрудно видеть, что если параметр θ модифицирует матрицу $N(\theta)$ таким образом, что последовательно, начиная с α_p , принимают нулевые значения остальные $p-1$ сингулярных чисел, кроме α_1 , то в пространстве, натянутом на левый сингулярный базис, будет наблюдаться последовательное „сплющивание“ эллипсоида вдоль векторов $U_{Np}, U_{Np-1}, \dots, U_{N2}$. В итоге сфера отобразится в отрезок прямой. Таким образом, функционалы вырождения J_{Dv} используются для количественной оценки вырождения динамических систем и объектов.

Интегральная экспресс-оценка вырождения динамической системы на спектре сингулярных чисел грамианов управляемости вход—выход. Пусть задана многоканальная непрерывная динамическая система вида

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gg(t), \quad x(0); \quad y(t) = Cx(t), \quad (5)$$

где x, g, y — векторы состояния, задающего воздействия и выхода соответственно; $x \in R^n$, $g, y \in R^m$; F, G, C — матрицы состояния системы, входа и выхода непрерывного объекта управления соответственно, согласованные по размерности с размерностью векторов x, g , и y так, что $F \in R^{n \times n}$, $G, C^T \in R^{n \times m}$.

При использовании грамианной технологии для непрерывной многоканальной системы вида (5) задается грамиан управляемости по состоянию с помощью интегральных соотношений

$$W_x(t) = \int_0^t x(\tau, g)x^T(\tau, g)dt \Big|_{g=\delta(t)} = \int_0^t e^{F\tau}GG^T e^{F^T\tau}d\tau. \quad (6)$$

Дифференциальный аналог соотношения (6) принимает вид

$$\dot{W}_x(t) = FW_x(t) + W_x(t)F^T + GG^T, \quad W_x(0) = 0. \quad (7)$$

Из (6), (7) видно, что если матрица F системы (5) является гурвицевой, то грамиан управляемости имеет установившееся значение W_x , удовлетворяющее предельному переходу

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W_x(t) = W_x, \quad (8)$$

при этом скорость его изменения как функция времени удовлетворяет соотношению

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{W}_x(t) = 0. \quad (9)$$

Если условия (9) и (8) подставить в (7), то для вычисления матрицы W_x можно воспользоваться алгебраическим матричным уравнением типа уравнения Ляпунова

$$FW_x(t) + W_x(t)F^T = -GG^T. \quad (10)$$

Грамиан управляемости отношения „вход—выход“ W_y по выходу может быть вычислен с помощью матричного выражения

$$W_y = CW_xC^T. \quad (11)$$

Для случая многоканальных дискретных систем грамианы отношений „вход—состояние“ и „вход—выход“ строятся следующим образом. Пусть задана многомерная дискретная динамическая система вида

$$x(k+1) = \bar{F}x(k) + \bar{G}g(k), \quad x(0); \quad y(k) = \bar{C}x(k), \quad (12)$$

где $x \in R^n$; $g, y \in R^m$; \bar{F} , \bar{G} , \bar{C} — матрицы состояния системы, входа и выхода дискретного объекта управления, согласованные по размерности с размерностью векторов x , g , и y так, что $\bar{F} \in R^{n \times n}$; $\bar{G}, \bar{C}^T \in R^{n \times m}$; k — дискретное время, выраженное в числе интервалов дискретности длительностью Δt ($t = k(\Delta t)$). Представим дискретную систему (12) в виде:

$$\left. \begin{aligned} x(1) &= \bar{F}x(0) + \bar{G}g(0), \\ x(2) &= \bar{F}x(1) + \bar{G}g(1) = \bar{F}^2x(0) + \bar{F}\bar{G}g(0) + \bar{G}g(1), \\ &\vdots \\ x(k) &= \bar{F}^kx(0) + \bar{F}^{k-1}\bar{G}g(0) + \bar{F}^{k-2}\bar{G}g(1) + \dots + \bar{G}g(k-1) \Big|_{x(0)=0} = \\ &= \begin{bmatrix} \bar{G} & \bar{F}\bar{G} & \dots & \bar{F}^{k-2}\bar{G} & \bar{F}^{k-1}\bar{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(k-1) & g(k-2) & \dots & g(0) \end{bmatrix}^T. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Здесь для вектора состояния $x(k)$ введена матрица управляемости системы по состоянию на k первых интервалах дискретности

$$Q_x(k) = \begin{bmatrix} \bar{G} & \bar{F}\bar{G} & \dots & \bar{F}^{k-2}\bar{G} & \bar{F}^{k-1}\bar{G} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

На этой матрице может быть сконструирован грамиан управляемости по состоянию $\bar{W}_x(k)$ на первых k интервалах дискретности в форме

$$\bar{W}_x(k) = Q_x(k)Q_k^T(k). \quad (15)$$

Очевидно, что для момента $(k+1)$ грамиан управляемости отношения „вход—состояние“ дискретной системы (12) $\bar{W}_x(k+1)$ в силу определения (15) запишется как

$$\bar{W}_x(k+1) = Q_x(k+1)Q_k^T(k+1), \quad (16)$$

где

$$Q_x(k+1) = \begin{bmatrix} \bar{G} & \bar{F}\bar{G} & \dots & \bar{F}^{k-1}\bar{G} & \bar{F}^k\bar{G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{G} & \bar{F}Q_x(k) \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Подстановка (17) в (16) с использованием представления (15) дает

$$\bar{W}_x(k+1) = Q_x(k+1)Q_k^T(k+1) = \begin{bmatrix} \bar{G} & \bar{F}Q_x(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{G}^T \\ Q_x^T(k)\bar{F}^T \end{bmatrix} = \bar{G}\bar{G}^T + \bar{F}\bar{W}_x(k)\bar{F}^T. \quad (18)$$

Установившееся значение грамиана управляемости по состоянию зададим в форме предельных соотношений

$$\bar{W}_x = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{W}_x(k); \quad \bar{W}_x = \lim_{(k+1) \rightarrow \infty} \bar{W}_x(k+1). \quad (19)$$

Подстановка соотношений (19) в выражение (18) позволяет получить уравнение вида матричного дискретного уравнения Ляпунова

$$\bar{W}_x = \bar{F}\bar{W}_x\bar{F}^T + \bar{G}\bar{G}^T. \quad (20)$$

Формирование системного грамиана управляемости по выходу отношений „вход—выход“ может быть осуществлено с помощью матричного уравнения

$$\bar{W}_y = \bar{C}\bar{W}_x\bar{C}^T. \quad (21)$$

Если теперь к сконструированным грамианам отношения „вход—выход“ (11) и (21) соответственно многоканальной непрерывной системы (5) и многоканальной дискретной сис-

темы (12) применить процедуру сингулярного разложения матриц, с тем чтобы вычислить алгебраические спектры сингулярных чисел указанных грамианов с последующим вычислением на их спектре функционалов вырождения, то можно сформировать априорную экспресс-оценку возможного вырождения многоканальной динамической системы.

Алгоритм контроля вырождения динамических объектов и систем на основе грамианов управляемости

1. Сформировать векторно-матричное описание многоканальной динамической системы и зафиксировать ее параметры.

2. Составить уравнение типа уравнения Ляпунова для случая непрерывного векторно-матричного представления многоканальной системы в форме (10) и для случая многоканальной дискретной динамической системы в форме (20), решить его относительно грамиана управляемости по состоянию.

3. Вычислить грамиан управляемости по выходу многоканальной системы в силу соотношения (11) для случая ее непрерывного модельного представления и в форме (21) для дискретного векторно-матричного представления многоканальной динамической системы.

4. Построить сингулярное разложение грамиана управляемости по выходу.

5. Построить функционалы вырождения в форме (3).

6. Полученные результаты передать системному аналитику на предмет интерпретации и принятия системных решений.

Заключение. Аппарат функционалов вырождения совместно с методом системных грамианов позволяет сформировать априорную оценку склонности многоканальной динамической системы и объекта к вырождению без необходимости моделирования потока возможных входных заявок. Следует ожидать, что эти оценки в силу структуры соотношений (10), (11) и (20), (21) будут совпадать с оценками функционалов вырождения, полученных при моделировании потока входных заявок стационарным в широком смысле стохастическим экзогенным воздействием типа „белый шум“.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дударенко Н., Ушаков А. Анализ многомерных динамических систем: технология контроля вырождения. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011. 232 с.
2. Мироновский Л. А. Функциональное диагностирование динамических систем. М.—СПб: Изд-во МГУ-ГРИФ, 1998.
3. Moore B.C. Principal Component Analysis in Linear Systems: Controllability, Observability and Model Reduction // IEEE Trans. on Automatic Control. 1981. Vol. AC-26, N 1. P. 17—31.
4. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. М.: Мир, 1999. 548 с.

Сведения об авторах

Дмитрий Сергеевич Бирюков

— аспирант; Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; E-mail: quaint03@mail.ru

Наталья Александровна Дударенко

— канд. техн. наук, доцент; Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; доцент; E-mail: dudarenko@yandex.ru

Анатолий Владимирович Ушаков

— д-р техн. наук, профессор; Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; E-mail: ushakov-avg@yandex.ru

Рекомендована кафедрой систем управления и информатики

Поступила в редакцию 13.12.12 г.