

В. В. ГРИГОРЬЕВ, А. Б. БУШУЕВ, А. Н. КОРОВЬЯКОВ, Ю. В. ЛИТВИНОВ

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ВЕТРОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ НА СИСТЕМУ СТАБИЛИЗАЦИИ КУРСА ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ*

Предложена удобная для практического применения численная характеристика эффективности функционирования систем стабилизации летательных аппаратов в условиях влияния случайных возмущений.

Ключевые слова: беспилотный летательный аппарат, робот, система стабилизации, случайные возмущения.

В пилотажно-навигационных комплексах летательных аппаратов (ЛА) на функционирование радиоэлектронных систем автоматического управления полетом влияет множество интенсивных возмущающих воздействий случайной природы. Учет этого влияния требует использования сложного математического аппарата и редко приводит к численно выраженным наглядным практическим результатам.

В настоящей работе предлагается использовать не требующую громоздких вычислений численную характеристику динамических и точностных свойств линейной дискретной системы с аддитивным случайным возмущением. В качестве характеристики используется объем эллипсоида правдоподобия (рассеяния), в котором с заданной вероятностью находится вектор состояния системы.

* Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП „Научные и научно-педагогические кадры инновационной России“ на 2009—2013 гг. (соглашение № 14.В37.21.0406).

Движение ЛА описывается уравнениями движения центра масс, вращательного движения вокруг центра масс, а также кинетическими уравнениями [1]. Дискретизованную модель замкнутой системы стабилизации ЛА представим в виде:

$$\left. \begin{aligned} x(m+1) &= Fx(m) + Gw(m), \\ y(m) &= Cx(m), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где $x \in R^n$ — n -мерный вектор состояния дискретной модели системы, y — измеренное значение угла курса ЛА ($y \in R^1$), w — случайное возмущение, действующее на параметр y , m — номер интервала дискретности ($m=0, 1, 2, \dots$), $F=A-Bk$ — динамическая матрица дискретной модели системы стабилизации курса, G — матрица, определяющая точку приложения случайного возмущения, C — матрица выходов.

Рассмотрим задачу стабилизации заданного курса ЛА, положив в системе (1):

$$M[x(0)] = \bar{x}(0) = 0,$$

где $M[\]$ — операция взятия математического ожидания вектора $x(0)$.

Пусть матрица ковариаций вектора начальных отклонений в системе (1) равна

$$M[x(0)x^T(0)] = X_0.$$

Составляющую ветрового возмущения, проявляющегося в случайных отклонениях курса ЛА, будем моделировать в виде скалярного случайного процесса $w(m)$ с дискретным временем и следующими статистическими характеристиками:

1) математическое ожидание

$$M[w(m)] = \bar{w}(m),$$

2) дисперсия возмущения

$$M[(w(m) - \bar{w}(m))^2] = \delta_m^2,$$

будем считать ее неизменной во времени $\delta_m = \delta_0$,

3) состояния системы (1) некоррелированы с возмущением

$$M[x(k)w^T(m)] = 0, \quad k=0, 1, 2, \dots,$$

4) возмущение $w(m)$ имеет нормальное распределение.

С учетом перечисленных условий проанализируем изменение во времени первых двух моментов от вектора состояния системы (1), в случае нормального распределения возмущения, полностью характеризующих вероятностные свойства процессов в системе стабилизации курса.

Взяв математическое ожидание из выражений (1), получим:

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}(m+1) &= F\bar{x}(m) + G\bar{w}(m), \\ \bar{y}(m) &= C\bar{x}(m). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Если $\bar{x}(0) = 0$ и $\bar{w}(m) = 0$ ($m=0, 1, 2, \dots$), то математическое ожидание вектора состояния системы (1) $x(m)$ равно нулю для любого момента времени.

Уравнение для поведения матрицы дисперсий системы во времени получено следующим образом [2]: вычтя (2) из (1), умножив полученное выражение на результат его транспонирования и взяв математическое ожидание от обеих сторон полученного равенства, найдем:

$$X_{m+1} = FX_m F^T + G\delta_m^2 G^T, \quad X_0 = X(0), \quad (3)$$

где $X_m = M[(x(m) - \bar{x}(m))(x(m) - \bar{x}(m))^T]$ — матрица ковариаций (дисперсий) вектора состояния системы стабилизации курса.

Дисперсия выходной переменной (измеренного значения угла курса ЛА) определяется выражением:

$$M[(y(m) - \bar{y}(m))^2] = CX_m C^T. \quad (4)$$

Если дисперсия возмущения является неизменной во времени величиной ($\delta_m^2 = \delta_0^2$) и замкнутая система стабилизации курса асимптотически устойчива (т.е. все собственные числа матрицы F лежат в единичном круге), то решение разностного матричного уравнения (3) сходится к стационарному значению, являющемуся решением алгебраического матричного уравнения

$$X = FXF^T + G\delta_0^2 G^T. \quad (5)$$

Решение уравнения (5) позволяет найти матрицу дисперсий в установившемся режиме, т.е. значение матрицы после окончания переходных процессов. Уравнения для математического ожидания от вектора состояния системы стабилизации (2) и для матрицы дисперсий (3) не связаны друг с другом, поэтому последовательности $\bar{x}(m)$ и X_m можно вычислять раздельно.

Рассмотрим поведение системы стабилизации курса самолета при возмущениях с нулевым математическим ожиданием.

В этом случае математическое ожидание от вектора состояния системы стабилизации курса равно нулю для любого момента времени, и статистические свойства процессов в системе полностью и наиболее наглядно характеризуются динамикой изменения матрицы дисперсий X_m . Анализ поведения этой матрицы представляет собой удобный для вычислений способ оценки влияния случайного возмущения на динамику системы стабилизации курса.

Вероятность нахождения вектора состояния системы внутри эллипсоида правдоподобия [3]:

$$(x - \bar{x})^T X_m^{-1} (x - \bar{x}) = \chi^2 \quad (6)$$

подчиняется χ^2 -распределению с n степенями свободы, где n — размерность вектора состояния системы. Вероятность нахождения вектора состояния системы стабилизации курса самолета внутри эллипсоида правдоподобия (6) удобно вычислять как значение функции χ^2 -распределения

$$P[(x - \bar{x})^T X_m^{-1} (x - \bar{x}) \leq \chi^2] = P[\chi^2] = F[\chi^2, n],$$

приведенной в таблице.

$\chi^2 \backslash n$	1	2	3	4	5
1	0,683	0,393	0,199	0,090	0,037
4	0,954	0,865	0,739	0,594	0,451
3	0,997	0,989	0,971	0,939	0,891

Если в результате решения уравнения (3) вычислены матрицы дисперсий X_m с начальной матрицей X_0 , то для любого момента времени t можно построить эллипсоид правдоподобия с заданными значениями χ^2 , соответствующий некоторому значению вероятности $P(\chi^2)$ нахождения в данный момент траектории системы стабилизации времени в этом эллипсоиде.

Совокупность таких эллипсоидов правдоподобия образует „трубку“ равновероятностного уровня ($P[\chi^2]$), характеризующую поведение системы стабилизации курса самолета при случайных воздействиях. В каждый из моментов времени t вероятность нахождения траектории

движения системы стабилизации внутри трубки равна $P[\chi^2]$. При $\delta_m^2 = \delta_0^2$ значение постоянного уровня эллипсоидов правдоподобия с течением времени стремится к χ^2

$$(x - \bar{x})^T X^{-1} (x - \bar{x}) = \chi^2, \quad (7)$$

где X^{-1} — обратная матрица к X , определяемой из решения алгебраического матричного уравнения (5). Соотношение (7) позволяет построить стационарную „трубку“ равновероятного уровня, характеризующую установившийся режим работы системы стабилизации курса самолета.

Использование „трубок“ равновероятностного уровня позволяет получить информацию о статистических и динамических свойствах системы стабилизации курса в наглядной графической форме. Для многомерных процессов с увеличением размерности вектора состояния системы наглядность геометрических образов теряется, а трудоемкость построения эллипсоидов правдоподобия быстро возрастает. Поэтому введем скалярную характеристику, связанную с эллипсоидом правдоподобия. Вычислим объем эллипсоида правдоподобия (6):

$$V_m = [\det X_m^{-1}]^{-1/2} V_0 = [\det X_m]^{1/2} V_0,$$

где V_0 — объем сферы, описываемой выражением $(x - \bar{x})^T (x - \bar{x}) = \chi^2$, радиуса χ .

Значение V_m в момент времени t характеризует тот объем в пространстве состояний, в котором с вероятностью $P[\chi^2]$ может находиться траектория системы стабилизации курса.

Характер изменения V_m определяется динамическими свойствами системы стабилизации курса самолета, а именно сходимостью процессов.

Значение объема эллипсоида правдоподобия в установившемся режиме (7) характеризует точностные показатели системы.

Приведем конкретный пример расчета объема эллипсоида правдоподобия [4] по итерационной процедуре, основанной на решении уравнения (3).

Пусть для интервала дискретизации $T=0,05$ с матрица F будет следующей

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0,05 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0,05 & 0 \\ -0,048 & -0,059 & 0,964 & 0,05 \\ -1,371 & -2,839 & -1,851 & 0,425 \end{bmatrix},$$

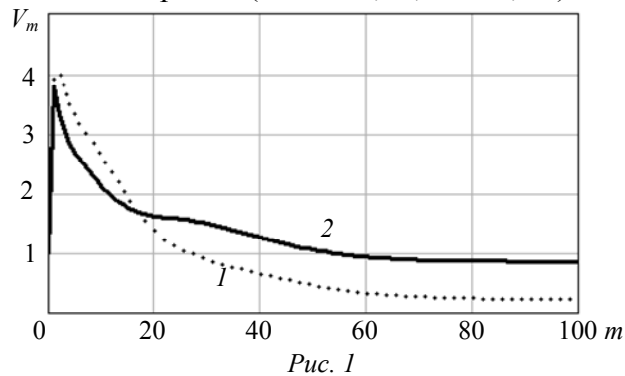
а для $T=0,1$ с

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0,1 & 0 \\ -0,033 & 4 \cdot 10^{-4} & 0,944 & 0,1 \\ -0,281 & -2,297 & -2,126 & 0,15 \end{bmatrix}.$$

Матрицу входов G для обоих значений интервалов T (0,05 и 0,1 с) выбираем в следующем виде:

$$G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \delta_m^2 = 1.$$

Уравнение (3) решалось итерационно, в результате получены графики изменения объема эллипсоида, представленные на рис. 1 (1 — $T=0,05$; 2 — $0,1$ с).



Для матрицы входов

$$G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}, \delta_m^2 = 1$$

графики приведены на рис. 2 (1 — $T=0,05$; 2 — $0,1$ с).

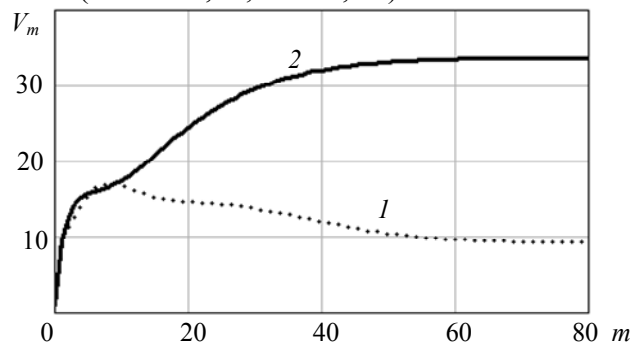


Рис. 2

На рис. 3 приведены графики (1 — $T=0,05$; 2 — $0,1$ с) для следующей матрицы

$$G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 400 \end{pmatrix}.$$

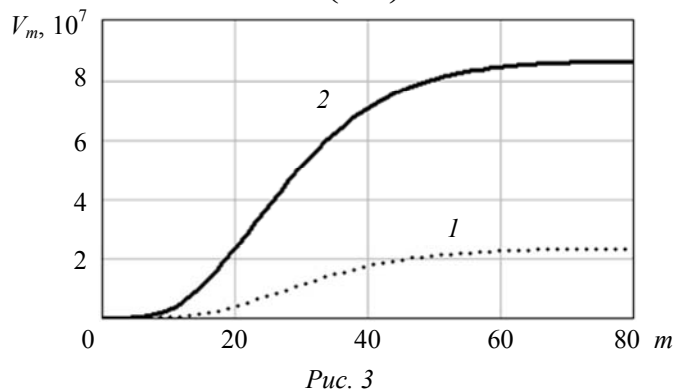


Рис. 3

Анализ полученных зависимостей показал, что во всех рассмотренных случаях объемы эллипсоидов правдоподобия достаточно быстро сходятся к установившимся значениям, зависящим не только от интенсивности случайного возмущения, действующего на систему, но и от интервала дискретизации T .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Брайсон А., Хо Ю. Ши.* Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972.
2. *Топчиев Ю. И., Потемкин В. Г., Иваненко В. Г.* Системы стабилизации. М.: Машиностроение, 1974. 248 с.
3. *Григорьев В. В., Козис Д. В., Коровьяков А. Н., Литвинов Ю. В.* Анализ поведения автоматических радиодальномеров при случайных возмущениях // Изв. вузов. Приборостроение. 2010. Т. 53, № 7. С. 26—32.
4. *Бушуев А. Б., Григорьев В. В., Коровьяков А. Н., Литвинов Ю. В.* Оценка работоспособности измерителя дальности в посадочном комплексе беспилотного летательного аппарата // Авиация и космонавтика Publishing house Education and Science. 2011.
5. *Быстров С. В., Григорьев В. В., Рабыш Е. Ю., Мансурова О. К.* Анализ качества переходных процессов в непрерывных и дискретных системах на основе условий качественной экспоненциальной устойчивости // Мехатроника, Автоматизация, Управление. 2012. № 9. С. 32—36.

Сведения об авторах

- Валерий Владимирович Григорьев** — д-р техн. наук, профессор; Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; E-mail: grigvv@yandex.ru
- Александр Борисович Бушуев** — канд. техн. наук, доцент; Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики
- Анатолий Николаевич Коровьяков** — канд. техн. наук, доцент; Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики
- Юрий Володарович Литвинов** — канд. техн. наук, доцент; Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики

Рекомендована кафедрой
систем управления и информатики

Поступила в редакцию
13.12.12 г.