

---

---

# ТЕПЛОВЫЕ РЕЖИМЫ ПРИБОРОВ И СИСТЕМ

---

---

УДК 519.8

С. А. АСТАФЬЕВ

## РЕШЕНИЕ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПЕРЕНОСА В ЗАДАЧЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЛЕСНОГО ПОЖАРА

Изложен ход решения интегродифференциального уравнения теплопереноса, используемого как базовое для описания изменения параметров теплового потока в модели распространения лесного пожара.

*Ключевые слова:* моделирование процесса распространения пожара, тепловой поток, интегродифференциальное уравнение теплопереноса, напряжение трения теплового потока.

**Введение.** На активно охраняемой территории лесного фонда России ежегодно регистрируется от 10 до 35 тыс. лесных пожаров, охватывающих площади 0,5—2,5 млн га. Уничтожение бесценных запасов древесины в результате лесных пожаров сопровождается выгоранием большого объема кислорода и выбросом в атмосферу сажи, копоти, двуокиси углерода, а также радиоактивных частиц [1].

Физика распространения лесного пожара состоит в следующем: тепловой поток, создаваемый низовым пожаром, поднимаясь наклонно по направлению ветра, подогревает кроны деревьев на значительном расстоянии впереди фронта огня. При воспламенении хотя бы одной из кроны почти мгновенно воспламеняются и другие, и огонь „скачет“ по подогретым кронам, но затем вне сферы действия подогрева затухает. Когда низовой огонь приближается к фронту пожара, процесс подогрева полог повторяется и опять происходит „скачок огня“. Верховые пожары, выделяя большое количество теплоты, вызывают восходящие потоки продуктов горения и нагретого воздуха и образуют конвективные колонки диаметром в несколько сотен метров. Их поступательное движение совпадает с направлением продвижения фронта пожара. Пламя в середине колонки может подниматься на высоту до 100—120 м. Конвективная колонка увеличивает приток воздуха в зону пожара и порождает ветер, который усиливает горение. Таким образом, низовой пожар стимулирует развитие верхового и наоборот [1].

Основными задачами охраны лесов от пожаров являются их предупреждение, обнаружение, ограничение распространения и тушение. Для эффективной борьбы с лесными пожарами необходим прогноз возможного положения кромки пожара и силы горения.

При математическом моделировании процесса распространения лесного пожара можно выделить четыре группы моделей:

- 1) модели прогноза скорости распространения пожара;
- 2) модели прогноза контура и площади пожара;

3) модели прогноза характеристик теплового течения и массопереноса во фронте и в зоне пожара;

4) общие математические модели, в рамках которых могут быть предсказаны все характеристики во фронте и в зоне пожара (в том числе, поля температур, концентрации и скорости распространения газовых и мелкодисперсных компонентов окружающей среды) [2].

Однако большинство разрабатываемых в настоящее время моделей базируются либо на статистических данных о скорости распространения огня в зависимости от погодных условий, либо на рассмотрении лесного пожара с позиций аэротермохимии. Исходя из этого более перспективным в решении задачи моделирования процесса распространения лесного пожара представляется использование одновременно двух подходов.

При первом — *вероятностном* — подходе [3, 4] модель прогноза контура и площади пожара к заданному моменту времени строится на основе определения вероятностей распространения огня через дискретные области (по результатам обработки аэрофотоснимков местности) и среднестатистических скоростей распространения пожара в разных направлениях в зависимости от скорости и направления ветра.

При втором подходе — с использованием *интегродифференциального уравнения теплопереноса* — для расчета параметров теплового потока в зависимости от местоположения относительно фронта пожара используются физические характеристики окружающей среды; кроме того, такой подход позволяет учитывать данные о рельефе местности.

В настоящей статье предложено решение интегродифференциального уравнения теплопереноса для применения его при моделировании процесса распространения лесного пожара.

**Интегродифференциальное уравнение.** Для моделирования за основу было взято интегродифференциальное уравнение, приведенное в работе [5]. Автор данного уравнения (профессор Томского государственного университета А. М. Гришин) предложил его в качестве математической модели стационарных двумерных квазиравновесных тепловых течений, описывающих процесс распространения лесного пожара:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + \left( v_w - \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \rho \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\sin \alpha}{Fr} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \int_0^y \frac{1}{\rho} \frac{\partial \ln P}{\partial x} dy,$$

где  $u$  — скорость теплового потока;  $v_w$  — безразмерная скорость внешнего потока (вдува);  $\mu=18,27 \cdot 10^{-6}$  Па·с — динамическая вязкость воздуха;  $\rho=1,2$  кг/м<sup>3</sup> — плотность воздуха;  $Fr$  — критерий Фруда (безразмерная величина) — один из критериев подобия движения жидкостей и газов;  $\alpha$  — угол между касательной к поверхности и горизонтальной плоскостью;  $P$  — давление окружающей среды в зоне пожара.

Система координат  $хоу$ , используемая в уравнении, показана на рис. 1.

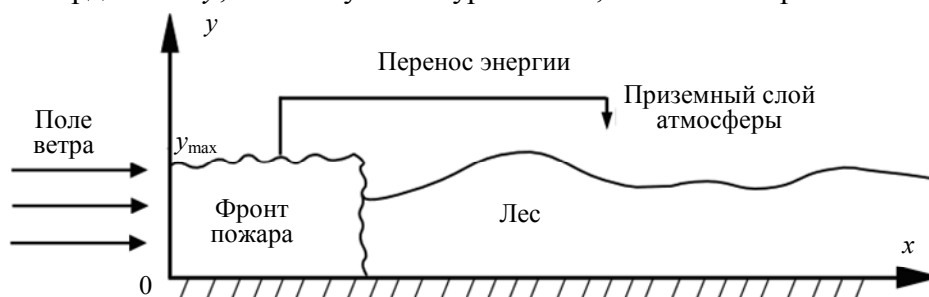


Рис. 1

**Метод решения.** В 80-е годы прошлого века, когда прикладные компьютерные программы для ведения сложных математических расчетов еще не обладали достаточной производительностью и гибкостью и не были широко распространены, автором уравнения было осуществлено его аналитическое решение с использованием различных методов, допущений

и замен переменных (например, вывод уравнений методом Прандтля, приближение Буссинеска, переход к переменным Дородницына — Хоурта, решение уравнений методом Швеца). Как следствие, аналитическое решение является достаточно громоздким, а большое количество преобразований повышает вероятность ошибки; кроме того, к недостаткам такого способа решения можно отнести большие затраты времени на пересчет результатов при изменении входных данных и отсутствие быстрой визуализации результатов вычислений.

На современном этапе степень развития вычислительных систем и приложений позволяет произвести *численное решение* сложного интегродифференциального уравнения с использованием среды математического моделирования MatLab. Данное программное средство содержит большой набор встроенных функций, предназначенных для решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Так, функции ODE реализуют одношаговый явный метод Рунге — Кутты 2-го, 3-го порядка (ode23) и 4-го, 5-го порядков (ode45); неявный метод Рунге — Кутты, использующий формулы обратного дифференцирования 2-го порядка (ode23tb); адаптивный многошаговый метод Адамса — Башворта — Мултона переменного порядка (ode113); одношаговый метод, использующий модифицированную формулу Розенброка 2-го порядка (ode23s), и метод трапеций с интерполяцией (ode23t). Функция pdepe служит для решения систем параболических и эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных по двум переменным при заданных начальных и граничных условиях. Данная функция преобразует уравнения в частных производных в набор обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием дискретизации 2-го порядка точности на основе фиксированного набора заданных пользователем узлов. Интегрирование осуществляется с помощью функции ode15s, которая реализует адаптивный многошаговый метод переменного порядка (от 1 до 5), использующий формулы численного дифференцирования.

Таким образом, главной задачей при решении исходного уравнения в среде MatLab является его запись в форме, адекватной предусмотренной в программном пакете.

**Исходные данные, начальные и граничные условия.** В качестве параметра  $v_w$  и координат  $x, y$  в процессе решения уравнения использовались безразмерные величины (исходя из предположения, что  $v_{w\max}=30$  м/с — максимальная скорость внешнего потока;  $y_{\max}=30$  м — характерная высота пограничного теплового слоя;  $x_{\max}=120$  м — характерное расстояние теплового воздействия фронта пожара).

В качестве *исходных данных* условно было задано давление среды в зависимости от координат, выраженное формулой

$$P(x, y) = 0,2 + \exp\{-0,48(x-0,5)^2 - 0,16(y-0,8)^2\}.$$

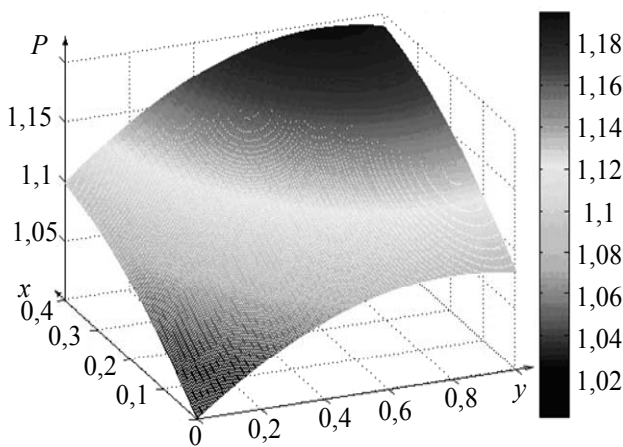


Рис. 2

Такой вид зависимости был выбран исходя из предположения, что в зоне прогрева давление среды экспоненциально растет с увеличением высоты ( $y$ ) над поверхностью и расстояния ( $x$ ) от задней границы фронта пожара, и после достижения максимального значения давление вновь снижается до нормального. Заданное изменение давления в зависимости от координат графически представлено на рис. 2.

В качестве *начального условия* (при  $x=0$ ) было принято экспоненциальное увеличение скорости теплового потока в зависимости от высоты:

$$u_0(y) = 1,0 - 1,0 \exp(-2,5y).$$

В качестве *нижнего граничного условия* (при  $y=0$ ), согласно данным из работы [5], было принято нулевое значение скорости теплового потока:  $u_n = 0$ , а в качестве *верхнего граничного условия* (при  $y=y_{\max}$ ) — экспоненциальное уменьшение скорости теплового потока с увеличением расстояния от фронта пожара:

$$u_b(x) = 1,0 \exp(-17x).$$

Файл-функция, задающая граничные условия, содержит два параметра, определяющие отсутствие „теплопроводности“ на нижней границе пограничного слоя и свободное распространение теплового потока на его верхней границе.

**Ход решения.** На первом этапе решения исходное интегродифференциальное уравнение теплопереноса было упрощено путем исключения из него интегрального слагаемого

$$\int_0^{y_{\max}} \frac{\partial u}{\partial x} dy.$$

Решение параболического дифференциального уравнения в частных производных производилось с использованием функции `pdepe`, имеющей следующий вид:

$$\text{sol} = \text{pdepe}(m, @\text{tepfun}, @\text{teploinit}, @\text{teplound}, y, x),$$

где

`u=sol(:, :, 1)` — искомая скорость теплового потока;

`m` — параметр, соответствующий типу дифференциального уравнения;

`tepfun` — функция, определяющая компоненты решаемого дифференциального уравнения;

`teploinit` — функция, определяющая начальные условия;

`teplound` — функция, определяющая граничные условия.

Для решения дифференциального уравнения в пакете MatLab оно должно иметь следующую форму записи:

$$c\left(y, x, u, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \frac{\partial u}{\partial x} = y^{-m} \frac{\partial}{\partial y} \left( y^m f\left(y, x, u, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \right) + s\left(y, x, u, \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Для параболического дифференциального уравнения  $m=0$ .

Таким образом, исходное уравнение должно быть записано в виде следующей системы:

$$\left. \begin{aligned} c &= u; \\ f &= \left( -v_w + \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) u + \mu \rho \frac{\partial u}{\partial y}, \\ s &= -\frac{\sin \alpha}{Fr} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \int_0^y \frac{1}{\rho} \frac{\partial \ln P}{\partial x} dy. \end{aligned} \right\}$$

В первую очередь были рассчитаны частная производная давления по координате  $x$  —  $\frac{\partial P}{\partial x}$ , частная производная давления по координате  $y$  —  $\frac{\partial P}{\partial y}$  и частная производная логарифма давления по координате  $x$  —  $\frac{\partial \ln P}{\partial x}$ . График значений интеграла  $A = \int_0^{y_{\max}} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \ln P}{\partial x} dy$  представлен

на рис. 3.

В результате решения дифференциального уравнения теплопереноса были рассчитаны значения скорости теплового потока в зависимости от координат  $u(x, y)$ , частная производная

скорости теплового потока по координате  $x$  —  $\frac{\partial u}{\partial x}$  и частная производная скорости теплового потока по координате  $y$  —  $\frac{\partial u}{\partial y}$  (рис. 4, а—в).

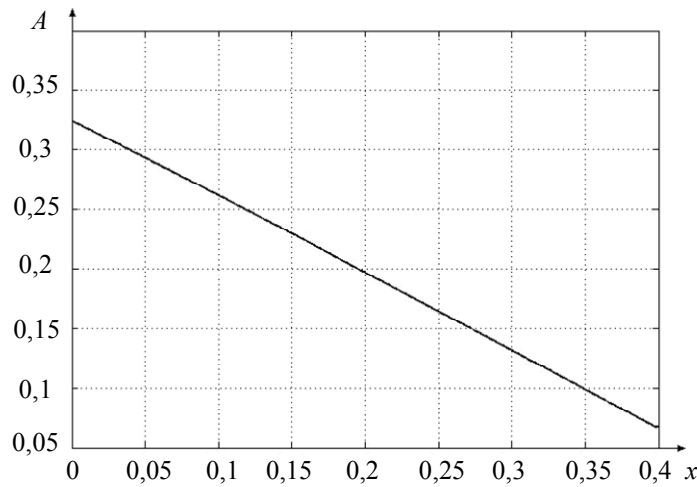


Рис. 3

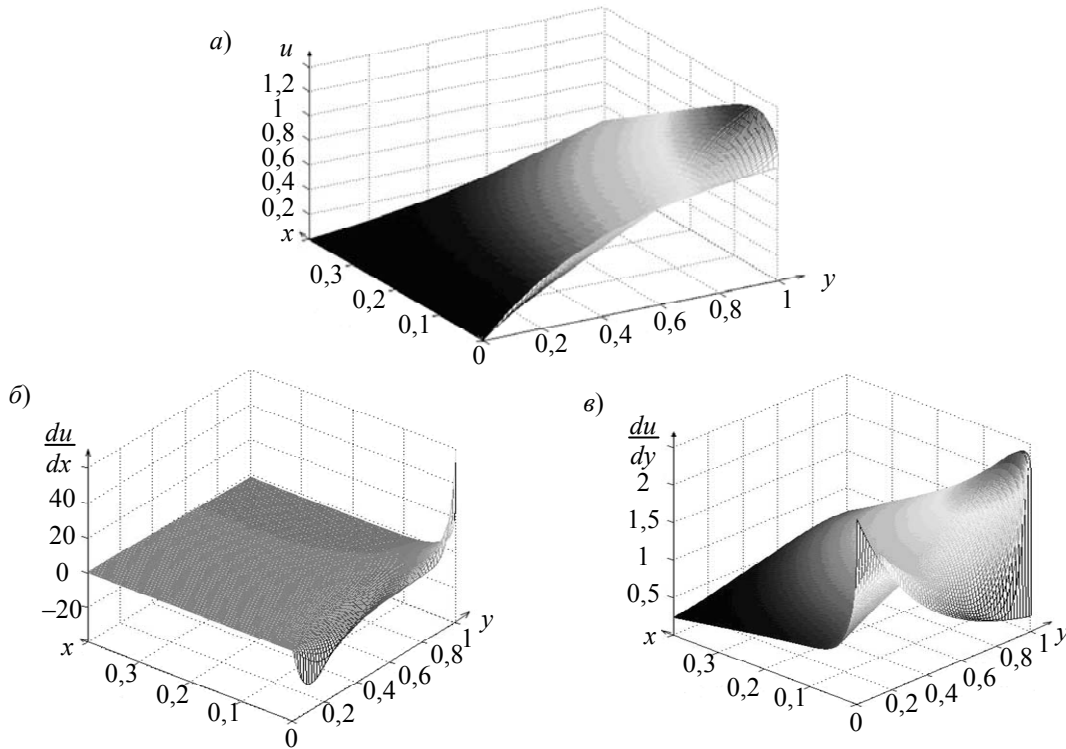


Рис. 4

Затем по формулам  $\tau_w = \mu \rho \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}$  и  $\tau_e = \mu \rho \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=y_{\max}}$  были вычислены напряжение тре-

ния теплового потока на обтекаемой поверхности и напряжение трения теплового потока на внешней границе пограничного слоя (рис. 5).

Физический смысл параметра  $\tau$  заключается в том, что при  $\tau_w = 0$  происходит „отрыв“ теплового потока от поверхности, что означает смену типа теплового течения: вместо течения, при котором линии потока вдали от фронта пожара почти параллельны обтекаемой поверхности, образуется конвективная колонка.

Вид зависимости  $\tau_w(x)$  вполне согласуется с графиком, представленным в работе [5]: с увеличением  $x$  значение  $\tau_w$  уменьшается, причем его резкое уменьшение в пределах фронта пожара далее переходит в плавное и стремится к нулю.

Вместе с тем следует заметить, что в операциях интегрирования и дифференцирования (с использованием функций `trapz` и `diff`) результат вычислений зависит от шага интегрирования (дифференцирования), и поэтому необходимо использовать масштабные коэффициенты.

Одна из особенностей решения состоит в том, что вычисления производились методом последовательных приближений. Так, в первом цикле вычислений рассчитывалось значение

интеграла  $B = \int_0^{y_{\max}} \frac{\partial u}{\partial x} dy$ , которое затем использовалось в последующей итерации. В результате

после нескольких расчетных циклов значение интеграла, вычисленное по окончании программы, сходится к значению, заданному на входе. График значений интеграла  $B$  представлен на рис. 6.

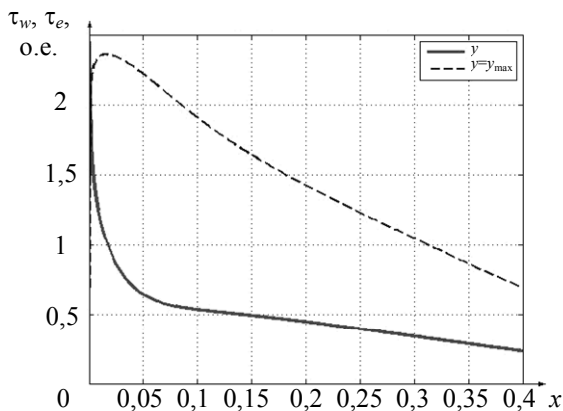


Рис. 5

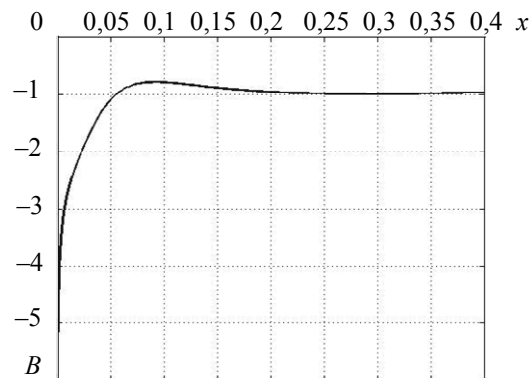


Рис. 6

**Заключение.** Представленное решение интегродифференциального уравнения теплопереноса осуществлено при условно принятых начальных и граничных условиях, подобранных таким образом, что обеспечивается устойчивое решение уравнения. Ход вычислений отдельных параметров имеет графическую визуализацию. Впоследствии необходимо произвести согласование параметров модели с реальными условиями распространения огня путем проведения натурных экспериментов и исследований параметров реальных пожаров.

Таким образом, использование уравнения теплопереноса в основе модели распространения лесного пожара позволяет в перспективе обеспечить возможность прогнозирования эволюции пожара путем учета конкретных физических параметров окружающей среды. Среди параметров модели наиболее значимым, с точки зрения предсказания развития лесного пожара во времени, представляется напряжение трения теплового потока. Дальнейшие исследования целесообразно направить на выявление характерных изменений данного параметра в зависимости от внешних условий.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воробьев Ю. Л., Акимов В. А., Соколов Ю. И. Лесные пожары на территории России: Состояние и проблемы / Под общ. ред. Ю. Л. Воробьева. М.: ДЭКС-ПРЕСС, 2004. 312 с.
2. Гришин А. М. О математическом моделировании природных пожаров и катастроф // Вестн. Томск. гос. ун-та. Математика и механика. 2008. № 2(3).
3. Астафьев С. А., Лысенко Д. Ю., Широков А. С. Моделирование процесса распространения лесного пожара с применением теории перколяции // Изв. вузов. Приборостроение. 2012. Т. 55, № 6. С. 70—74.

4. Астафьев С. А. Применение вероятностного подхода в задаче моделирования распространения лесного пожара // IX Всерос. конф. молодых ученых; V сессия науч. школы „Проблемы механики и точности в приборостроении“: Сб. докл. СПб: НИУ ИТМО, 2012. Вып. 1. 152 с.
5. Гришин А. М. Математические модели лесных пожаров. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1981. 277 с.

**Сведения об авторе**

**Сергей Алексеевич Астафьев**

— аспирант; Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра мехатроники; E-mail: Rokkolo287@yandex.ru

Рекомендована кафедрой  
мехатроники

Поступила в редакцию  
14.12.12 г.