

В. В. КАРАГОДИН

## ОСОБЕННОСТИ ОПТИМАЛЬНОГО ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИЯ ИНТЕГРИРУЮЩИМ ЗВЕНОМ С ПРИСОЕДИНЕННЫМ ГАРМОНИЧЕСКИМ ОСЦИЛЛЯТОРОМ

Рассматривается задача оптимального управления объектом, состоящим из интегрирующего звена и присоединенного гармонического осциллятора. Показано, что возникающие трудности при ее численном решении объясняются особенностями оптимального управления рассматриваемым объектом.

**Ключевые слова:** оптимальное управление, гармонический осциллятор, система нелинейных уравнений, длительность интервалов управления, начальное приближение.

**Введение.** Рассмотрим задачу определения оптимального управления объектом, состоящим из интегрирующего звена и присоединенного гармонического осциллятора, как функции времени (задача расчета оптимальной программы).

Учитывая смену знака управляющего воздействия, используя метод приспособывания и результаты [1], позволяющие определить необходимое число интервалов управления для перевода такого объекта из начального положения  $\mathbf{x}^0$  фазового пространства в начало координат  $\mathbf{x}^k$ , можно получить трансцендентную алгебраическую систему уравнений относительно длительности интервалов оптимального управления [2].

При численном решении этой системы уравнений возникает необходимость выбора начальных приближений неизвестных (длительности интервалов управления). Попытки решить систему уравнений относительно длительности интервалов управления, полученную для данного объекта, содержащего присоединенный гармонический осциллятор (без демпфирования), часто приводят к неудачам из-за незнания начального приближения длительности интервалов управления.

В отдельных случаях, даже после того как получено решение такой системы уравнений для конкретных начальных значений фазовых координат, их незначительное изменение может приводить к расходящемуся вычислительному процессу несмотря на, казалось бы, „хорошее“ начальное приближение, выбираемое в соответствии с рекомендациями [2]. Таким образом, необходимо исследовать особенности оптимального управления объектами данного типа.

**Постановка задачи.** Структурная схема рассматриваемого объекта представлена на рис. 1 ( $k_0, k$  — коэффициенты передачи звеньев, входящих в состав объекта управления;  $T$  — постоянная времени гармонического осциллятора;  $u$  — управляющее воздействие,  $|u| \leq u_{\max}$ ;  $x_0, x_1, x_2$  — фазовые координаты объекта).

Движение рассматриваемого объекта описывается системой дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_0 &= k_0 u; \\ \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{T} x_1 + \frac{k}{T} u. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

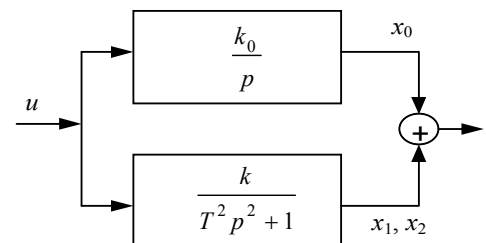


Рис. 1

Будем считать, что требуется перевести данный объект из точки фазового пространства  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0 = (x_0^0; x_1^0; x_2^0)^T$  в начало координат  $\mathbf{x}(T_k) = \mathbf{x}^k = 0$  за минимальное время при наличии ограничения на управление  $|u| \leq u_{\max}$ .

Оптимальное по быстродействию управление рассматриваемым объектом является кусочно-постоянной функцией времени. В общем случае число интервалов управления зависит от положения начальной  $\mathbf{x}^0$  и конечной  $\mathbf{x}^k$  точек и может превосходить порядок объекта.

Будем полагать для простоты и наглядности, что начальные значения координат осциллятора  $x_1(0) = 0$ ,  $x_2(0) = 0$ , т.е. осциллятор находится в состоянии покоя. В этом случае в соответствии со статьей [1] можно полагать, что точка фазового пространства  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$ , из которой требуется перевести объект, принадлежит области  $\mathbf{G}_3(\mathbf{x})$ , из которой перевод объекта в начало координат возможен не более чем за три интервала управления, т.е.  $\mathbf{x}(0) \in \mathbf{G}_3(\mathbf{x})$  [2].

Тогда система нелинейных уравнений относительно длительности интервалов управления будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} t_1 - t_2 + t_3 + \frac{x_0^0}{k_0 u} &= 0; \\ (x_1^0 - ku) \cos \lambda(t_1 + t_2 + t_3) + \frac{x_2^0}{\lambda} \sin \lambda(t_1 + t_2 + t_3) + \\ &+ 2ku \cos \lambda(t_2 + t_3) - 2ku \cos \lambda t_3 + ku = 0; \\ -(x_1^0 - ku) \sin \lambda(t_1 + t_2 + t_3) + \frac{x_2^0}{\lambda} \cos \lambda(t_1 + t_2 + t_3) - \\ &- 2ku \sin \lambda(t_2 + t_3) + 2ku \sin \lambda t_3 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где  $t_1, t_2, t_3$  — длительность интервалов управления;  $\lambda = 1/T$ .

Для численного решения этой системы уравнений необходимо выбрать начальное приближение длительности интервалов управления  $t_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

Очевидно, что для рассматриваемой задачи длительность первого интервала управления будет в основном определяться временем перевода интегрирующего звена из начальной точки  $x_0^0$  в начало координат. Из первого уравнения системы (2) можно получить

$$t_1 = -\frac{x_0^0}{k_0 u} + t_2 - t_3.$$

Считая, что для заданных начальных условий  $\mathbf{x}(0)$  известна длительность первого интервала  $t_1$  оптимального управления, найдем длительность интервалов  $t_2, t_3$ , учитывая при этом, что они не должны превышать величину  $\pi T$  [2]. Для этого определим значения фазовых координат осциллятора в конце первого интервала управления, воспользовавшись решением двух последних дифференциальных уравнений системы (1):

$$\begin{aligned} x_1(t_1) &= (x_1^0 - ku) \cos \lambda t_1 + \frac{x_2^0}{\lambda} \sin \lambda t_1 + ku = -ku \cos \lambda t_1 + ku; \\ x_2(t_1) &= -(x_1^0 - ku) \lambda \sin \lambda t_1 + x_2^0 \cos \lambda t_1 = ku \lambda \sin \lambda t_1, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $u$  — значение управляющего воздействия, равное  $u_{\max}$  с соответствующим знаком управления на первом интервале.

Подставив значения  $x_1(t_1)$  и  $x_2(t_1)$  вместо начальных значений координат осциллятора  $x_0^0, \dot{x}_0^0$  [1], с учетом смены знака управления на втором интервале в выражения для длительности интервалов

$$t_2 = T \arccos \left( 1 - \frac{(x_0^0 - ku)^2 + (\dot{x}_0^0 / \lambda)^2 - (ku)^2}{4(ku)^2} \right), \quad (4)$$

$$t_1 = T \arccos \left( \frac{(x_0^0 - ku)ku(1 - 2 \cos \lambda t_2) + 2ku(\dot{x}_0^0 / \lambda) \sin \lambda t_2}{(x_0^0 - ku)^2 + (\dot{x}_0^0 / \lambda)^2} \right) - t_2, \quad (5)$$

которые найдены для оптимального управления гармоническим осциллятором по переводу его в начало координат из любой точки области фазовой плоскости, ограниченной окружностью радиуса  $2|ku|$  с центром в начале координат [1], получим:

$$\left. \begin{aligned} t_3 &= T \arccos \left[ 1 - \frac{x_1^2(t_1) + 2kux_1(t_1) + (x_2(t_1) / \lambda)^2}{4(ku)^2} \right] = T \arccos(\cos \lambda t_1) = t_1 - 2\pi n; \\ t_2 &= T \arccos \left[ \frac{(x_1(t_1) + ku)ku(2 \cos \lambda t_3 - 1) - 2ku(x_2(t_1) / \lambda) \sin \lambda t_3}{(x_1(t_1) + ku)^2 + (x_3(t_1) / \lambda)^2} \right] - t_3 = \\ &= T \arccos \left( \frac{-4 + 5 \cos \lambda t_1}{5 - 4 \cos \lambda t_1} \right) - t_3 = T \arccos \left( \frac{-4 + 5 \cos \lambda t_1}{5 - 4 \cos \lambda t_1} \right) - t_1 + 2\pi n, \\ & n = 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Подставив выражения (6) для  $t_2, t_3$  в первое уравнение (2), получим равносильное ему

$$\varphi(t_1) = \frac{x_1^0}{k_0 u} - T \arccos \left( \frac{-4 + 5 \cos \lambda t_1}{5 - 4 \cos \lambda t_1} \right) + 3t_1. \quad (7)$$

Очевидно, что функция  $\varphi(t_1)$  определена на интервале  $0 \leq t_1 < \infty$ .

В точках  $t_1 = \pi T + 2\pi T$ , являющихся критическими точками функции,

$$\frac{d\varphi(t_1)}{dt_1} = \frac{-12 + 12 \cos \lambda t_1}{5 - 4 \cos \lambda t_1} = 0.$$

На интервалах  $0 + 2\pi T \leq t_1 \leq \pi T + 2\pi T$  функция монотонно возрастает ( $\varphi'(t_1) \geq 0$ ), поэтому решение на этих интервалах для конкретных начальных координат объекта управления будет единственным.

С использованием численных решений системы (2) были построены графики (рис. 2) зависимости длительности интервалов оптимального по быстрдействию управления интегрирующим звеном с присоединенным гармоническим осциллятором от начального значения выходной координаты интегрирующего звена  $x(0) \in \mathbf{G}_3(x)$  (начальные значения координат гармонического осциллятора равны нулю).

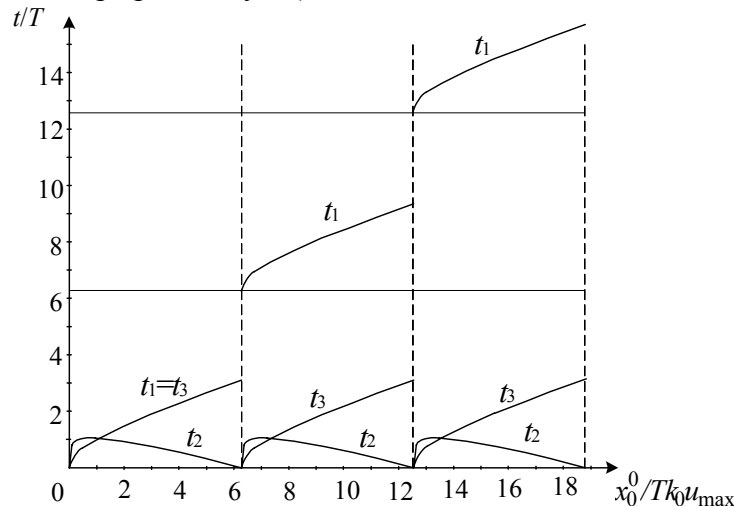


Рис. 2

Из рис. 2 следует, что функции

$$t_i = f_i(x_0^0), i = 1, 2, 3, \dots$$

в точках

$$x_0^0 = 2\pi r T k_0 u_{\max}, r = 1, 2, 3, \dots$$

терпят разрыв.

Данные значения координаты интегрирующего звена соответствуют значениям  $t_1 = \pi T + 2\pi T$ , которые являются критическими точками функции (7).

Наличием разрывов функций  $t_i = f_i(x_0^0)$  объясняются сложности, которые могут возникнуть при численном решении задачи нахождения оптимального управления рассматриваемым объектом для различных начальных условий.

Так, например, если при нахождении оптимального управления для перевода рассматриваемого объекта из начальной точки, принадлежащей интервалу

$$0 \leq x_0^0 \leq 2\pi r T k_0 u_{\max}, r = 2, 3, \dots,$$

в качестве начального приближения длительности интервалов управления использовать, например, значения длительности интервалов оптимального управления по переводу объекта из начальной точки, принадлежащей

$$0 \leq x_0^0 \leq 2\pi T k_0 u_{\max},$$

без учета скачков функций  $t_i = f_i(x_0^0)$ , то вычислительный процесс может оказаться *расходящимся*.

Следует отметить, что и при определенных ненулевых начальных условиях фазовых координат гармонического осциллятора появляются разрывы (скачки) функций  $t_i = f_i(x_0^0)$ .

Справедливость полученных результатов была проверена многочисленными решениями на ЭВМ задачи нахождения оптимального управления рассматриваемым объектом.

В качестве примера, подтверждающего полученные выводы, в таблице представлены результаты численного решения задачи оптимального по быстродействию перевода рассматриваемого объекта (см. рис. 1) с параметрами  $k_0 = 1 \text{ с}^{-1}$ ;  $k = 1$ ;  $T = 1 \text{ с}$  в начало координат из точек  $(-5, 0, 0)$  и  $(-10, 0, 0)$ .

$x_0, x_1, x_2$	$t_1, \text{ с}$	$t_2, \text{ с}$	$t_3, \text{ с}$
-5, 0, 0	2,659	0,319	2,659
-10, 0, 0	8,453	0,623	2,170

**Заключение.** Полученные результаты позволяют сделать следующий вывод: зависимости длительности интервалов оптимального по быстродействию управления объектом, состоящим из интегрирующего звена и присоединенного гармонического осциллятора, от начального значения фазовой координаты интегрирующего звена при определенных начальных значениях фазовых координат присоединенного гармонического осциллятора являются *кусочно-непрерывными функциями*.

Наличие точек разрыва приводит к трудностям выбора начального приближения длительности интервалов оптимального управления при численном решении задачи нахождения оптимального управления рассматриваемым объектом.

Отмеченные особенности оптимального управления представляют теоретический интерес и полезны для практики. Их учет позволит избежать указанных сложностей при расчете оптимального управления для данного типа объектов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Герасимов А. Н., Карагодин В. В. Определение числа интервалов оптимального по быстродействию управления объектом с присоединенным гармоническим осциллятором // Изв. вузов. Приборостроение. 1990. Т. 33, № 9. С. 15—19.
2. Карагодин В. В. Метод последовательных опорных решений в задачах оптимального быстродействия. СПб: ВКА им. А. Ф. Можайского, 2013. 144 с.

**Владимир Викторович Карагодин** —

*Сведения об авторе*

канд. техн. наук, профессор; Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского, кафедра энергоснабжения, Санкт-Петербург

Рекомендована кафедрой энергоснабжения

Поступила в редакцию 19.06.13 г.

УДК 620.1, 531.7

В. М. МУСАЛИМОВ, Г. Б. ЗАМОРУЕВ, Ю. С. МОНАХОВ

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ  
МОНИТОРИНГА ПОДЗЕМНЫХ КАМЕР**

Рассматриваются особенности моделирования динамики скважинного гидроакустического прибора для мониторинга подземных камер. Предложена математическая модель механической системы, определены ее основные параметры, выведена передаточная функция и выполнено моделирование.

*Ключевые слова:* скважинный гидроакустический прибор, измерительная система, моделирование динамики, передаточная функция.

Скважинные гидроакустические приборы применяются в современной технике для контроля за состоянием подземных камер при добыче полезных ископаемых и хранении жидких углеводородов [1]. При разработке полезных ископаемых закрытым способом на расстоянии от нескольких сотен метров до нескольких километров под поверхностью земли образуются пустоты (камеры), мониторинг которых представляет весьма нетривиальную инженерную задачу, связанную с необходимостью проводить измерения объемных характеристик камер на большой глубине (до 2,5 км), зачастую в агрессивной среде (например, рассол) при гидростатическом давлении до 25 МПа.

Используемый для мониторинга подземных камер скважинный прибор (рис. 1, а) с помощью каротажной станции опускается через технологическую трубу в скважину для исследования пространственного расположения стенок камеры и ее свода. Радиальное измерение расстояний до стенок камеры обеспечивается поворотом блока преобразователей вокруг оси прибора с помощью встроенных в блок кинематики редуктора и электродвигателя.

Моделирование динамики измерительной системы позволяет оптимизировать ее конструктивные параметры для повышения точности и сокращения времени измерений [2].

Математическая модель рассматриваемой электромеханической измерительной системы приведена на рис. 1, б. Подвижные блоки прибора представлены в виде двух масс, связанных между собой и с наземным неподвижным основанием упругими и диссипативными связями. Движения рассматриваемой системы описываются следующими дифференциальными уравнениями:

$$\begin{cases} J_1 \ddot{\varphi}_1 + c_1 \varphi_1 + c_2 (\varphi_1 - \varphi_2) + b_2 (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) + b_1 \dot{\varphi}_1 = 0, \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 + c_2 (\varphi_2 - \varphi_1) + b (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) = M, \end{cases} \quad (1)$$