

А. В. ДЕНИСОВ, М. А. БЕЛЯНСКИЙ

## ОСОБЕННОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ ИОНОСФЕРЫ В ЗАДАЧЕ О РАСПРОСТРАНЕНИИ РАДИОВОЛН В ОКОЛОЗЕМНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

На основе канонического разложения Пугачева рассмотрена задача моделирования случайно-неоднородной составляющей одномерного ионосферного профиля электронной концентрации. В предположении, что случайное поле флуктуаций электронной концентрации нормально и стационарно, выбраны автокорреляционные функции для разных областей экваториальной ионосферы и получены характеристики случайных коэффициентов разложения.

**Ключевые слова:** случайные поля, моделирование неоднородностей ионосферы.

**Введение.** Для решения задач навигации и обеспечения дальней радиосвязи расчет радиополей необходимо осуществлять на протяжении всей трассы распространения радиоволн. На радиополя источников в приземном волноводном канале большое влияние оказывает состояние нижних слоев ионосферы, которая характеризуется концентрацией электронов  $N_e(z)$  и эффективной частотой  $\nu_{ij}(z)$  соударения составляющих ионосферу частиц, здесь  $z$  — расстояние от поверхности Земли.

Детерминированная модель ионосферы используется как при моделировании процессов распространения радиоволн в двумерно-нерегулярных сферических волноводных каналах [1, 2], так и при рассмотрении трехмерных крупномасштабных неоднородностей [3, 4].

Представим одномерную концентрацию электронов в ионосфере выражением

$$N_e(s) = N_e^{(0)}(s) + N_e^{(r)}(s),$$

где  $N_e^{(0)}(s)$  — регулярная составляющая,  $N_e^{(r)}(s)$  — случайная составляющая,  $s = z/l$  — безразмерная переменная,  $l$  — характерный масштаб элементарной неоднородности.

Аналитическое задание случайной составляющей  $N_e^{(r)}(s)$ , на которую влияет множество факторов, не представляется возможным. В ограниченных пространственно-временных масштабах можно использовать стационарные модели. При допущении, что случайная составляющая профиля является нормальным стационарным случайным полем, достигается компромисс между достоверностью модели и ее сложностью.

Отметим, что в данном случае рассматривается дискретно-слоистая среда, размер каждого случайно выбранного слоя которой  $l \ll 30$  км.

**Моделирование случайного поля.** При моделировании стационарного случайного поля  $N_e^{(r)}(s)$  задается либо его спектральная плотность, либо автокорреляционная функция (АКФ), которые связаны между собой взаимным преобразованием Фурье (по теореме Винера — Хинчина).

Спектральная плотность задается на основе априорной информации, обусловленной различными факторами, влияющими на образование неоднородностей в ионосфере: в основном это акустико-гравитационные волны [5], метеоритные дожди, ионно-рекомбинационные процессы, землетрясения, терминатор, антропогенное воздействие, старты космических аппаратов, подземные, наземные и воздушные взрывы, эксперименты по высокочастотному нагреву ионосферы [6].

Ионосферу принято разделять на верхнюю (100—500 км от поверхности Земли) и нижнюю (50—100 км) области. В нижней области ионосферы преобладают мелкомасштабные неоднородности турбулентного характера. Как показывают расчеты [7], такое условное разделение связано с тем, что на высоте, превышающей примерно 100 км, для дневного состояния  $N_e(z)$  ионосферы выполняются соотношения квазипродольной аппроксимации электромагнитных полей приземных источников; для ночного состояния эта высота составляет примерно 150 км.

В задачах распространения радиоволн СДВ-диапазона наибольший интерес представляют размеры области, существенной для отражения электромагнитных полей [8]; ее размер в дневных условиях составляет примерно 20—30 км от границы ионосферы [9], что соответствует нижней области ионосферы и в дневном, и в ночном состоянии.

Обратимся сначала к простому случаю, когда неоднородности крупномасштабные и описываются случайными полями. Это соответствует верхней области ионосферы, где турбулентность отсутствует. Рассмотрим следующую модель автокорреляционной функции:

$$K(s) = \sigma^2 \left( \frac{\sin(\Omega s)}{\Omega s} \right)^\rho \cos(\beta s), \quad s \in (-\infty; +\infty), \quad \rho = 2, \rho = 3, \quad (1)$$

где  $\sigma^2$  — дисперсия;  $\Omega$  — параметр, характеризующий случайное поле;  $\beta$  — преобладающая гармоника.

Для нижней области ионосферы, где турбулентность существенна, а следовательно, неоднородности носят мелкомасштабный характер, случайное поле описывается более сложной функцией, состоящей из суперпозиции двух АКФ вида (1):

$$K(s) = \sigma^2 \left[ C_1 \left( \frac{\sin(\Omega s)}{\Omega s} \right)^\rho \cos(\beta s) + C_2 \left( \frac{\sin(2\Omega s)}{2\Omega s} \right)^\rho \cos(2\beta s) \right], \quad (2)$$

$$s \in (-\infty; +\infty), \quad \rho = 2, \rho = 3.$$

Будем считать, что вне области  $(-\pi/\Omega; +\pi/\Omega)$  АКФ (1) и (2) обращаются в нуль. Тогда, периодически продолжая АКФ на остальной оси, получаем периодическую в среднеквадратическом смысле функцию с периодом  $L = 2\pi/\Omega$ , которую можно разложить в ряд Фурье:

$$K(s) = a_0 + a_1 \cos\left(\frac{2\pi s}{L}\right) + a_2 \cos\left(\frac{2\pi 2s}{L}\right) + \dots \quad (3)$$

Разложение АКФ в ряд Фурье соответствует каноническому разложению случайного поля флуктуаций [10]:  $N_e^{(r)}(s) = N_e^{(0)} X(s)$ , где

$$X(s) = A_0 + A_1 \cos\left(\frac{2\pi s}{L}\right) + B_1 \sin\left(\frac{2\pi s}{L}\right) + A_2 \cos\left(\frac{2\pi 2s}{L}\right) + \dots, \quad (4)$$

здесь  $A_i, B_k$  — некоррелированные между собой случайные величины, распределенные по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и значениями дисперсий  $a_i, a_k$ , которые определены разложением в ряд (3).

Для верхней области ионосферы эти коэффициенты определяются выражениями

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{2\sigma^2}{\pi} \int_0^\pi \left( \frac{\sin x}{x} \right)^\rho \cos\left(\frac{x}{q}\right) dx, \quad q \equiv \Omega/\beta; \\ a_k &= \frac{2\sigma^2}{\pi} \int_0^\pi \left( \frac{\sin x}{x} \right)^\rho \cos\left(\frac{x}{q}\right) \cos(kx) dx, \quad q \equiv \Omega/\beta. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Мелкомасштабность неоднородностей нижней области ионосферы находит свое математическое выражение в том, что членов ряда в каноническом разложении Пугачева [10] больше, чем в случае, определяемом выражением (2):

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= C_1 \frac{2\sigma^2}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\sin x}{x}\right)^p \cos\left(\frac{x}{q}\right) dx + C_2 \frac{2\sigma^2}{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\sin x}{x}\right)^p \cos\left(\frac{x}{q}\right) dx, \\ a_k &= C_1 \frac{2\sigma^2}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\sin x}{x}\right)^p \cos\left(\frac{x}{q}\right) \cos(kx) dx + C_2 \frac{2\sigma^2}{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\sin x}{x}\right)^p \cos\left(\frac{x}{q}\right) \cos(kx) dx. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Спектр АКФ для  $\rho=2$  и  $\rho=3$  оказывается финитным. Сужение области определения АКФ вызывает изменение спектра — он становится инфинитным и может принимать отрицательные значения. Это приводит к тому, что ряд элементарных дисперсий  $a_k$ , начиная с некоторого номера, становится знакопеременным рядом, и эти члены не учитываются. Таким образом, каноническое разложение поля флуктуаций представляет собой конечный ряд Фурье.

**Результаты численных расчетов.** Сначала определим нули функции  $a_0(q)$ . Обращение в нуль постоянной составляющей в разложении Пугачева (4) соответствует только колебательному характеру поля неоднородностей, считаем это предположение априори выполненным. Если рассматривать спектральную плотность для всей области определения АКФ, не сужая ее, то значения  $q=1/2$  соответствуют спектральной плотности, равной нулю. Поэтому при моделировании из корней выражения  $a_0(q)=0$  выберем только крайние справа значения параметра  $q$ .

На рис. 1 приведены графики коэффициентов разложения  $a_i(q)/\sigma^2$  при разных показателях степени  $\rho$  (см. выражения (5)) для верхней области ионосферы. Крайние справа значения  $q$ , при которых постоянная составляющая  $a_0$  обращается в нуль, равны:  $q = 0,42666$  при  $\rho=2$  (рис. 1, а) и  $q = 0,32332$  при  $\rho=3$  (рис. 1, б).

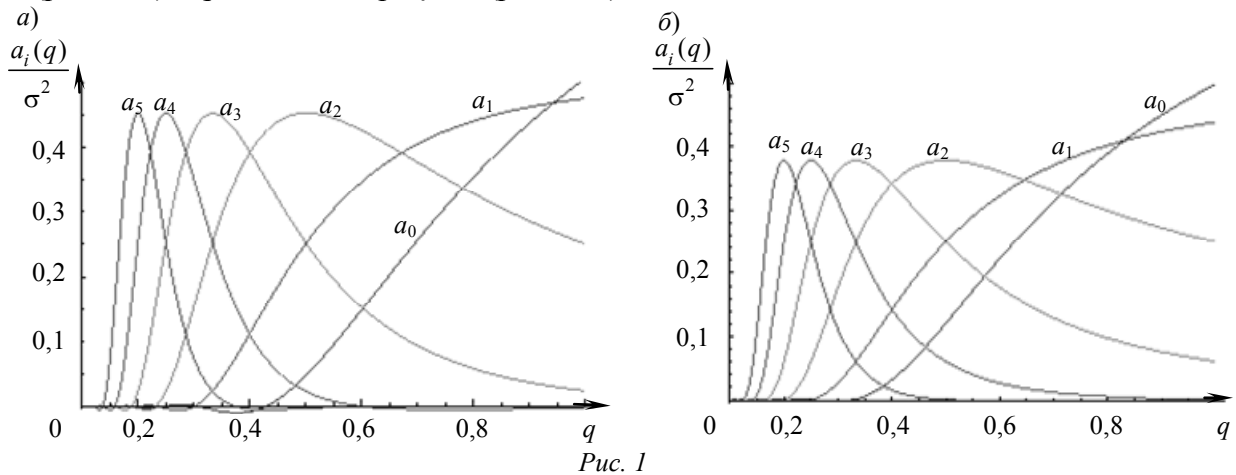


Рис. 1

Точность моделирования определяется количеством членов в выражении  $1/\sigma^2 \left(\sum a_i\right)$  при фиксированных значениях параметра  $q$ . Суммирование ведется до первого неотрицательного значения, после чего ряд становится знакопеременным. Как известно [12], сумма отброшенных членов ряда не превосходит по абсолютной величине первого из отброшенных членов. Именно такое количество неотрицательных при  $a_0(q)=0$  коэффициентов  $a_i(q)$  показано на рис. 1, 2. В результате для указанных значений  $q$  при  $\rho=2$  имеем  $1/\sigma^2 \left(\sum a_i\right) = 0,997$  и при  $\rho=3$  имеем  $1/\sigma^2 \left(\sum a_i\right) = 0,999$ , что свидетельствует о точности выбранных АКФ (1).

Аналогичные графики приведены и для нижней области ионосферы (см. формулы (6)) для  $C_1 = C_2 = 0,5$  (рис. 2). В данном случае  $q=0,434363$  при  $\rho=2$  (рис. 2, а) и  $q=0,324705$  при  $\rho=3$  (рис. 2, б);  $1/\sigma^2(\sum a_i)=0,987$  при  $\rho=2$  и  $1/\sigma^2(\sum a_i)=0,999$  при  $\rho=3$ , что также хорошо характеризует выбор АКФ для нижней области (2).

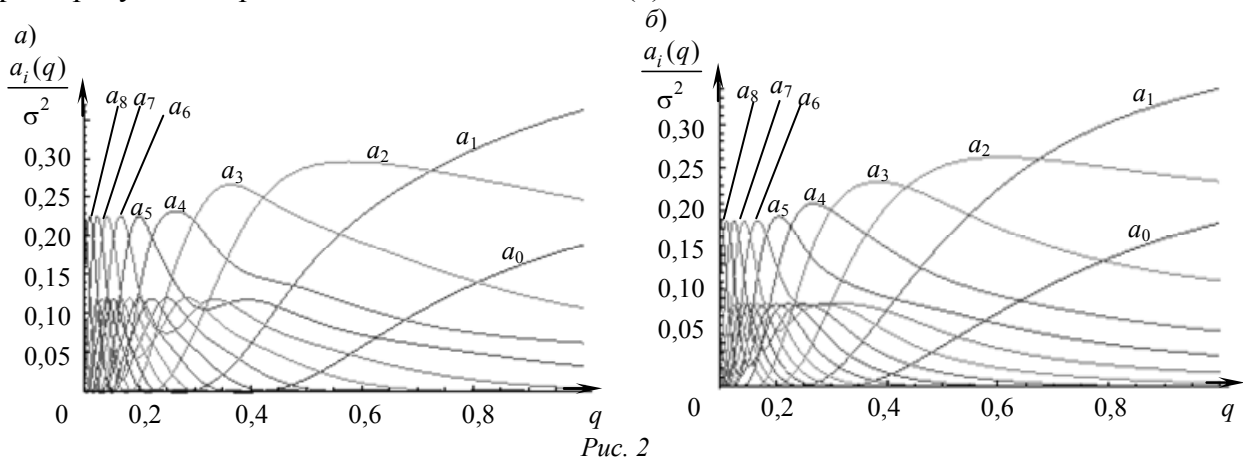


Рис. 2

**Закключение.** Предложенный в статье метод использования канонического разложения Пугачева для математического описания случайно-неоднородной составляющей одномерного ионосферного профиля экваториальной ионосферы оказывается эффективным при правильном выборе автокорреляционных функций. Рассмотренный способ моделирования одномерных неоднородностей может быть распространен и на объемные неоднородности. В последнем случае трехмерное случайное поле может быть задано как произведение трех взаимно некоррелированных полей. Отметим, что формально можно рассматривать каноническое разложение, выбрав в качестве периода разложения  $L$  всю ионосферу, но в этом случае невозможно задать АКФ. Предложенный подход представляется практичным в вычислительном плане, поскольку позволяет осуществлять контроль точности, что важно при решении численных задач расчета радиополей наземных или ионосферных источников.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Макаров Г. И., Новиков В. В., Рыбачек С. Т. Распространение радиоволн в волноводном канале Земля — ионосфера и в ионосфере. М.: Наука, 1993. 150 с.
2. Иванов В. И., Рыбачек С. Т., Сенина В. Л. Электромагнитные поля, возбуждаемые в анизотропной ионосфере электрическими и магнитными диполями произвольной ориентации, расположенными в нерегулярном волноводе Земля — ионосфера // Вестн. Санкт-Петерб. ун-та. Сер. 4. Физика, химия. 1996. Вып. 1(№ 4). С. 31—45.
3. Соловьев О. В. Распространение низкочастотных радиоволн в возмущенном трехмерной крупномасштабной неоднородностью приземном волноводе // Изв. вузов. Радиофизика. 1998. Т. XLI, № 5. С. 588—601.
4. Коган Л. П. О распространении электромагнитных волн в волноводе Земля — ионосфера с плавной периодической неоднородностью импеданса верхней границы // Изв. вузов. Радиофизика. 1998. Т. XLI, № 3. С. 374—381.
5. Ахмедов Р. Р. Численное моделирование генерации акустико-гравитационных волн и ионосферных возмущений от наземных и атмосферных источников: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 2004.
6. Excitation of artificial airglow by high power radio waves from the “Sura” ionospheric heating facility / P. A. Bernhart, W. A. Scales, S. M. Grash et al. // Geophys. Res. Lett. 1991. Vol. 18, N 8. P. 1477—1480.
7. Рыбачек С. Т., Белянский М. А. Основные особенности электромагнитных полей, создаваемых в нижней ионосфере низкочастотными приземными антеннами. Результаты численных расчетов // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. 2011. № 6 (76). С. 44—48.

8. Кириллов В. В. Области, существенные при отражении электромагнитных волн от неоднородных проводящих слоев // Проблемы дифракции и распространения волн. 1986. № 20. С. 165—181.
9. Рыбачек С. Т. Электромагнитные поля плоской волны в неоднородной анизотропной ионосфере // Проблемы дифракции и распространения волн. 1981. № 18. С. 221—237.
10. Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М.: Физматлит, 1960. 884 с.
11. Хургин Я. И., Яковлев В. П. Финитные функции в физике и технике. М.: Книжный дом „ЛИБРОКОМ“, 2010. 416 с.
12. Смирнов В. И. Курс высшей математики. СПб: БХВ — Петербург, 2008. Т. 1. 624 с.

**Сведения об авторах**

- Александр Владимирович Денисов** — канд. физ.-мат. наук; Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, кафедра радиотехники и телекоммуникаций; E-mail: A.V.Denisov@inbox.ru
- Максим Анатольевич Белянский** — ОАО «НТЦ „Завод Ленинец“», Санкт-Петербург; зам. начальника отдела; E-mail: maxim\_belyansky@mail.ru

Рекомендована кафедрой  
оптико-цифровых систем  
и технологий НИУ ИТМО

Поступила в редакцию  
24.10.13 г.