
ОПТИЧЕСКИЕ И ОПТИКО-ЭЛЕКТРОННЫЕ ПРИБОРЫ И СИСТЕМЫ

УДК 535.317

В. В. ЕЖОВА, В. А. ЗВЕРЕВ, И. Н. ТИМОЩУК

АБЕРРАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ТОНКОЙ ЛИНЗЫ В ШИРОКИХ И УЗКИХ ПУЧКАХ ЛУЧЕЙ

Показана возможность и определены условия не только стигматической, но и апланатической коррекции aberrаций третьего порядка в изображении, сформированном системой положительных линз. Приведены соотношения, определяющие положения входного зрачка тонкой линзы, при которых в полученном изображении отсутствуют первичная кома и астигматизм.

Ключевые слова: изображение, оптическая система, тонкая линза, aberrации, входной зрачок.

Принципиально задача построения изображения предмета решается с помощью оптической системы, состоящей из одной тонкой линзы. При этом сферическая aberrация, кома и астигматизм изображения определяются оптической силой и формой (прогибом) линзы, поперечным увеличением изображения (положением предмета относительно линзы) и положением входного зрачка. Для достижения требуемого качества изображения оптическую систему объектива, состоящую из одной тонкой линзы, приходится дополнять, как минимум, еще одной линзой. В общем случае это приводит к изменению поперечного увеличения изображения, изменению оптической силы и прогиба линзы и, как следствие, к изменению требуемого положения входного зрачка. Таким образом, изучение aberrационных свойств тонкой линзы можно рассматривать как необходимое условие грамотной композиции оптических систем.

Определим параметры тонкой линзы с помощью углов α_i , образованных осевым параксиальным лучом с оптической осью (рис. 1):

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 = V & & n_1 = 1 \\ \alpha_2 = \alpha & d = 0 & n_2 = n \\ \alpha_3 = \alpha' = 1 & & n_3 = 1, \end{array}$$

где V — поперечное увеличение изображения, n_i — показатель преломления материала линзы, d — расстояние между компонентами системы.

В области первичных aberrаций влияние конструктивных параметров тонкой линзы на aberrационные свойства изображения определяется коэффициентами сферической aberrации (S_I), комы (S_{II}) и астигматизма (S_{III}) [1]:

$$S_I = hP; \quad (1)$$

$$S_{II} = HP - JW; \quad (2)$$

$$S_{III} = \frac{H^2}{h} P - 2J \frac{H}{h} W + J^2 \varphi, \quad (3)$$

где h — высота точки пересечения осевого виртуального луча с главными плоскостями тонкой линзы: $h = 1 - V$; H — высота точки пересечения главного виртуального луча с главными плоскостями тонкой линзы: $H = a_p \beta_1$, здесь a_p — расстояние от тонкой линзы до центра входного зрачка системы, β_1 — угол, образованный главным парааксиальным лучом с оптической осью, при $\beta_1 = 1$ величина $H = a_p$; при принятых величинах параметров линзы инвариант Лагранжа — Гельмгольца равен $J = Va_p + V - 1$; линейные величины целесообразно выразить в масштабе фокусного рассеяния, т.е. $\varphi = 1$.

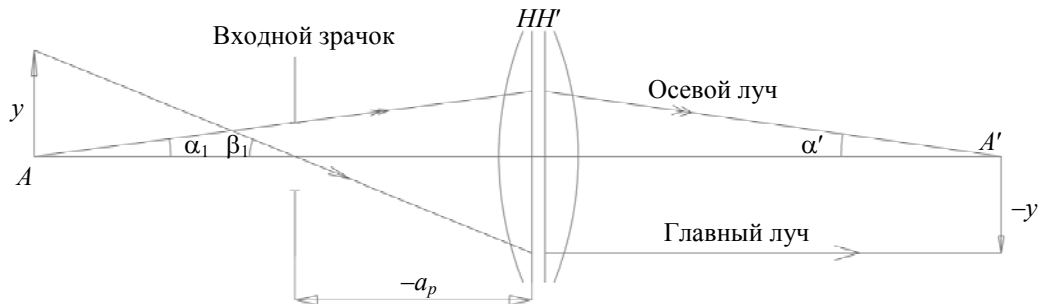


Рис. 1

Полученные соотношения позволяют выражения (1)—(3), определяющие коэффициенты первичных aberrаций, представить в следующем виде:

$$S_I = (1 - V) P, \quad (4)$$

$$S_{II} = a_p P + (1 - V - Va_p) W, \quad (5)$$

$$S_{III} = \frac{a_p^2}{1 - V} P + 2 \frac{1 - V - Va_p}{1 - V} a_p W + (1 - V - Va_p)^2. \quad (6)$$

В результате последующих преобразований получаем [3]

$$P = \frac{n(2+n)(1-V)}{(n-1)^2} \left[\alpha^2 - \frac{1+2n}{2+n} (1+V) \alpha + \frac{n}{2+n} \frac{1-V^3}{1-V} \right], \quad (7)$$

$$W = -\frac{n+1}{n-1} (1-V) \left[\alpha - \frac{n}{n+1} (1+V) \right]. \quad (8)$$

При $P = 0$ получаем уравнение

$$\alpha^2 - \frac{1+2n}{2+n} (1+V) \alpha + \frac{n}{2+n} \frac{1-V^3}{1-V} = 0, \quad (9)$$

решение которого можно представить в виде

$$\alpha = \frac{1}{2(2+n)} \left[(1+2n)(1+V) \pm \sqrt{(1-4n)V^2 + 2(1+2n^2)V + 1 - 4n} \right]. \quad (10)$$

Уравнение (10) имеет вещественные корни при условии, что подкоренное выражение больше или равно нулю. При равенстве нулю это выражение приобретает вид уравнения, корни которого удовлетворяют условию, т.е. оба решения определяют параметры одной и той же линзы, но в прямом и обратном ходе лучей.

На рис. 2 приведена зависимость $V(n)$, определяемая решением подкоренного выражения в уравнении (10). При значениях поперечного увеличения V , находящихся в области ме-

жду кривыми l и l' при углах α , определяемых уравнением (9), первичная сферическая аберрация изображения точки будет отсутствовать. Кривые 2 и $2'$ соответствуют значениям V , при которых в изображении отсутствуют первичные аберрации: сферическая аберрация и кома ($S_I = 0$, $S_{II} = 0$) [3].

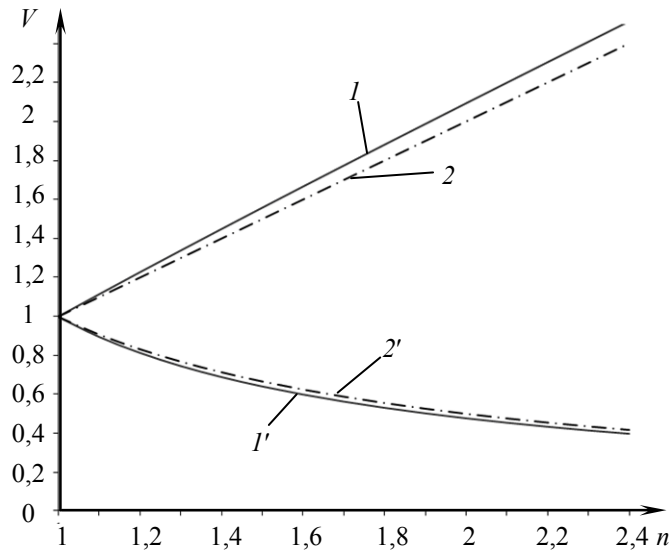


Рис. 2

Производная от функции $P = P(\alpha, V, n)$ по α равна

$$\frac{\partial P}{\partial \alpha} = \frac{n(2+n)(1-V)}{(n-1)^2} \left[2\alpha - \frac{1+2n}{2+n}(1+V) \right].$$

Положив $\frac{\partial P}{\partial \alpha} = 0$, получим $\alpha = \frac{1+2n}{2+n} \frac{1+V}{2}$, а подставив это значение угла α в формулы (7) и (8), получим

$$P_{\text{extr}} = P_0 = n \frac{1-V}{(n-1)^2} \left[\frac{(4n-1)(1+V)^2}{4(2+n)} - nV \right], \quad (11)$$

$$W_{\text{extr}} = W_0 = \frac{1-V^2}{2(2+n)}. \quad (12)$$

В общем случае из выражения (8) находим, что угол $\alpha = \frac{n}{n+1}(1+V) - \frac{n-1}{n+1} \frac{W}{1-V}$. Подставляя это выражение в формулу (7), в результате последующих преобразований и учитывая соотношения (11) и (12), получаем

$$P = P_0 + a(W - W_0)^2, \quad (13)$$

где

$$a = \frac{n(2+n)}{(n+1)^2(1-V)}, \quad W_0 = \frac{1-V^2}{2(2+n)},$$

$$P_0 = \frac{n(1-V)}{(n-1)^2} \left[\frac{(4n-1)(1+V)^2}{4(2+n)} - nV \right]. \quad (14)$$

При $W = 0$

$$P(W = 0) = aW_0^2 + P_0 = \frac{n^3(1-V)}{(n^2-1)^2} \left[V^2 - \frac{1+n^2}{n}V + 1 \right]. \quad (15)$$

Отсюда следует, что $P(W = 0) = 0$ при $V_1 = 0$ и при $V_{2,3} = \frac{n^2 + 1 \pm (n^2 - 1)}{2n}$.

В соответствии с выражением (8) при $W = 0$ угол $\alpha = \frac{n}{n+1}(1+V)$. Тогда при $V_2 = n$ угол $\alpha = n$, а при $V_3 = 1/n$ угол $\alpha = 1$. Таким образом, оба решения определяют разное положение одного и того же апланатического мениска.

Пусть $W = W_0$, тогда при $P = P_0$ в соответствии с выражением (4) коэффициент

$$S_1 = \frac{n(1-V)^2}{(n-1)^2} \left[\frac{(4n-1)(1+V)^2}{4(2+n)} - nV \right], \quad (16)$$

откуда следует, что при $V = 1^*$ и при равном нулю выражении в квадратных скобках коэффициент $S_1 = 0$, т.е. первичная сферическая aberrация изображения точки отсутствует.

Подставив полученные значения V в формулу (10), находим значения углов α , определяющих кривизну поверхностей линзы.

Зависимость $S_1(V)$, определяемая формулой (16), при трех значениях показателя преломления материала линзы $n = 1,5$, $n = 1,65$ и $n = 1,8$ представлена на рис. 3.

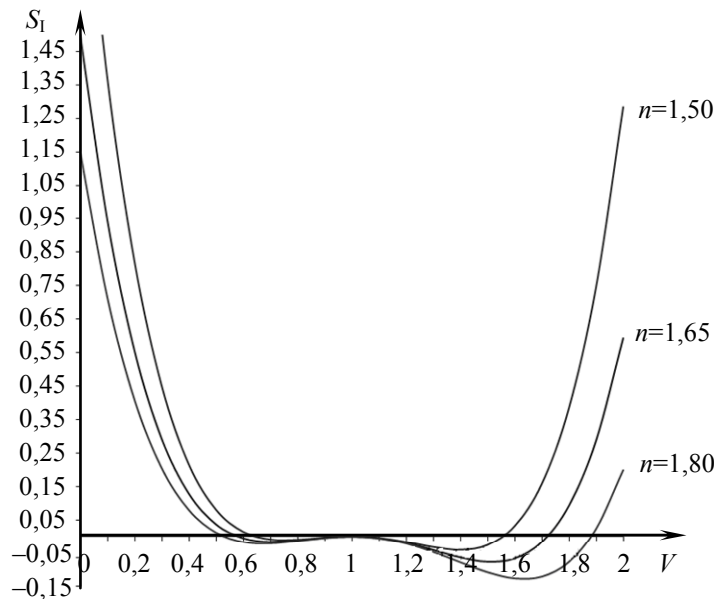


Рис. 3

Частный случай использования тонкой линзы — расположение предмета на бесконечно большом расстоянии от нее ($V = 0$). Тогда $S_1 = P$ (так как $h = 1$). При $V = 0$ формулы (13) и (14) принимают следующий вид [2, 4]:

$$P = P_0 + a(W - W_0)^2, \quad (17)$$

где

$$a = \frac{n(2+n)}{(n+1)^2}, \quad W_0 = \frac{1}{2(2+n)}, \quad P_0 = \frac{n(4n-1)}{4(2+n)(n-1)^2}.$$

Рассмотрим оптическую систему, состоящую из k тонких линз.

Оптическая сила системы $\varphi = \frac{\alpha_{2k+1} - \alpha_1}{h}$. При равенстве оптических сил линз в системе $\varphi_i = \varphi/k$; при $h=1$, $\alpha = 0$, $\alpha_{2k+1} = 1$ имеем $\varphi_i = 1/k$.

Обозначим порядковый номер линзы как j . Тогда выражение, определяющее величину нечетных углов $\alpha_i = \alpha_{2j-1}$, можно представить в виде $\alpha_{2j-1} = \frac{j-1}{k}$. Угол $\alpha_{2j-1+2} = \alpha_{2j+1}$, при этом $\alpha_{2j+1} - \alpha_{2j-1} = 1/k$. Тогда $\alpha_{2j+1} = j/k$. Угол прогиба линзы $\alpha_{i+1} = \alpha_{2j}$. При этих значениях углов для j -й тонкой линзы и в результате преобразований имеем

$$S_{1j} = \frac{n}{(n-1)^2} \left[n \frac{3j(j-1)+1}{k^3} - (1+2n) \frac{2j-1}{k^2} \alpha_{2j} + \frac{2+n}{k} \alpha_{2j}^2 \right]. \quad (18)$$

Условие минимума сферической аберрации определяется выражением

$$\frac{dS_{1j}}{d\alpha_{2j}} = \frac{n}{(n-1)^2} \left[(1+2n) \frac{1-2j}{k^2} + 2 \frac{2+n}{k} \alpha_{2j} \right] = 0.$$

Отсюда находим, что величина четных углов $\alpha_i = \alpha_{2j}$ определяется выражением $\alpha_{2j} = \frac{1+2n}{2+n} \frac{2j-1}{2k}$.

Пусть $k=2$, при этом в результате преобразований получаем

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 = 0 & & n_1 = 1 \\ \alpha_2 = \frac{1+2n}{2+n} \frac{1}{2k} & d_1 = 0 & n_2 = n \\ \alpha_3 = \frac{1}{k} & d_2 = 0 & n_3 = 1 \\ \alpha_4 = \frac{1+2n}{2+n} \frac{3}{2k} & d_3 = 0 & n_4 = n \\ \alpha_5 = \frac{2}{k} = 1 & & n_5 = 1. \end{array}$$

Сферическая аберрация изображения точки, сформированного полученной системой, определяется коэффициентом $S_1 = \frac{n}{(n-1)^3} \left[n - \frac{5}{16} \frac{(2n+1)^2}{n+2} \right]$. При $S_1 = 0$ выражение в квадратных скобках принимает вид уравнения $n^2 - 3n + \frac{5}{4} = 0$. Отсюда следует, что при $k=2$ в изображении точки сферическая аберрация третьего порядка отсутствует при $n = 2,5$.

Пусть $k=3$. При $S_1 = 0$ в результате преобразований, подобных предыдущим, имеем $n^2 - \frac{19}{8}n + \frac{35}{32} = 0$, откуда находим, что при $k=3$ в изображении точки сферическая аберрация третьего порядка отсутствует при $n = 1,75$.

При $k=4$ задача коррекции первичной сферической аберрации решается при $n = 1,5$.

Для j -й тонкой линзы параметры W_i и P_i равны

$$W_i = \frac{1}{n-1} \left[n(\alpha_{2j+1}^2 - \alpha_{2j-1}^2) - (n+1)(\alpha_{2j+1} - \alpha_{2j-1})\alpha_{2j} \right], \quad (19)$$

$$P_i = \frac{n}{(n-1)^2} \left[n(\alpha_{2j+1}^3 - \alpha_{2j-1}^3)^2 - (1+2n)(\alpha_{2j+1}^2 - \alpha_{2j-1}^2)\alpha_{2j} + (n+2)(\alpha_{2j+1} - \alpha_{2j-1})\alpha_{2j}^2 \right]. \quad (20)$$

В результате преобразований для оптической системы, состоящей из k тонких линз, имеем $W_k = \frac{\alpha_{2k+1}^2 - \alpha_1^2}{2(n+2)}$. При $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_{2k+1} = 1$ параметр $W_k = \frac{1}{2(n+2)}$, т.е. значение этого параметра не зависит от числа линз в системе.

При $W = 0$ параметр $P(W = 0)$ определяется формулой (15), тогда

$$S_I(W = 0) = \frac{n^3(1-V)^2}{(n^3-1)^2} \left(V^2 - \frac{n^2+1}{n}V + 1 \right), \quad (21)$$

$$S_I(W = 0) = 0 \text{ при } V_1 = 1/n, V_2 = 1^{\times}, V_3 = n.$$

Зависимость $S_I(W = 0) = S_I(V)$, определяемая формулой (21), при трех значениях показателя преломления материала линзы $n = 1,5$, $n = 1,65$ и $n = 1,8$ представлена на рис. 4.

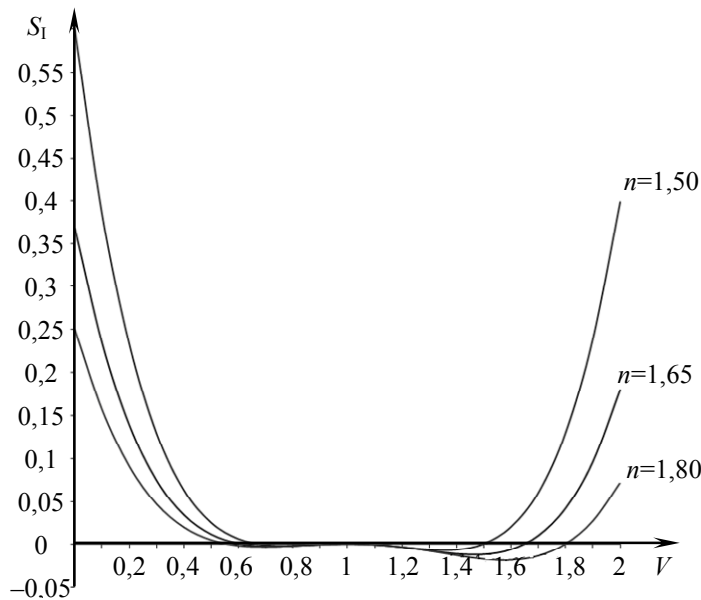


Рис. 4

Из выражения (20) при $W_i = 0$ находим, что угол $\alpha_{2j} = \frac{n}{n+1} \frac{2j-1}{k}$. При этом уравнение (18) принимает вид

$$S_{ij} = \frac{n}{k^3(n^2-1)^2} \left[n(2j-1)^2 - j(j-1)(n+1)^2 \right].$$

При $k = 3$ имеем $S_I = -\frac{n^2}{27(n^2-1)^2} (8n^2 - 19n + 8)$. Приравняв к нулю выражение в круг-

лых скобках, получим, что апланатическая коррекция первичных aberrаций в изображении, сформированном трехлинзовой оптической системой, достигается при $n = 1,828$.

Таким образом, при апланатической коррекции первичных aberrаций показатель преломления материала линз должен быть заметно больше, чем при стигматической.

Первичная кома изображения точки определяется коэффициентом S_{II} (см. выражение (5)). При $a_p = 0$ коэффициент $S_{II} = (1-V)W$, при этом, как следует из выражения (8), угол $\alpha = n \frac{1+V}{1+n}$. В результате преобразований получаем

$$P = \frac{n^3(1-V)}{(n^2-1)^2} \left[V^2 - \frac{1+n^2}{n}V + 1 \right].$$

Приравняв это выражение к нулю и решив его, находим, что $V_1 = n, V_2 = 1/n$, при этом $\alpha_1 = n$ и $\alpha_2 = 1$ соответствуют параметрам отрицательного и положительного апланатических менисков.

Из выражения (5) при $S_{II} = 0$ следует, что расстояние a_p определяется как

$$a_p = -\frac{(1-V)W}{P-VW}. \quad (22)$$

Выполнив замену параметров P и W в уравнении (22) выражениями (7) и (8), в результате преобразований получим

$$a_p = \frac{(n^2-1)\alpha - n(n-1)}{n(n+2)\alpha^2 - n(2n+1)\alpha + n^2}. \quad (23)$$

При изменении угла α экстремальные значения расстояния a_p определяются выражением

$$a_p = a_{p\text{extr}} = \frac{n^2-1}{n} \frac{n+1}{n-1 \pm 2n\sqrt{(n+2)}}.$$

Заметим, что при $\alpha = 0$ величина $a_p = -\frac{(n-1)}{n}$; при $\alpha = 2$ — $a_p = \frac{(n-1)}{n} \frac{n+2}{n+6}$; при $\alpha = -2$ — $a_p = -\frac{(n-1)}{n} \frac{3n+2}{9n+10}$.

Зависимость $a_p(\alpha)$, определяемая формулой (23), при изменении угла α в интервале $-2 \leq \alpha \leq 2$ для трех значений показателей преломления $n = 1,5$, $n = 1,65$ и $n = 1,8$ представлена на рис. 5.

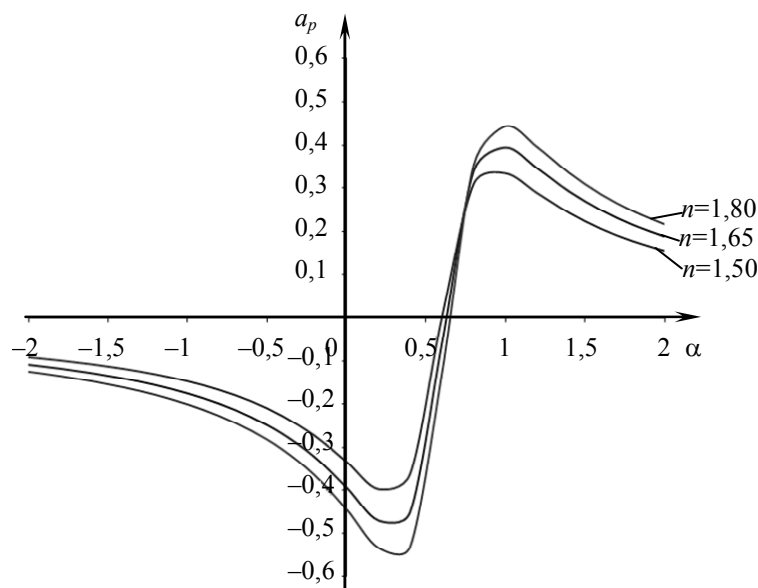


Рис. 5

Аберрации изображения внеосевой точки, сформированного узкими пучками лучей в меридиональной и сагиттальной плоскостях, принято называть кривизной поверхности и астигматизмом. Кривизна поверхности изображения определяется оптической силой линзы и показателем преломления ее материала, первичный астигматизм изображения характеризуется коэффициентом S_{III} , определяемым формулами (3) и (6).

При $S_{III} = 0$ выражение (6) можно преобразовать в квадратное уравнение относительно переменной a_p :

$$a_p^2 + 2(1-V) \frac{W - V(1-V)}{P - 2VW + V^2(1-V)} a_p + \frac{(1-V)^3}{P - 2VW + V^2(1-V)} = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$a_p = -(1-V) \frac{W - V(1-V)}{P - 2VW + V^2(1-V)} \left(1 \pm \sqrt{1 - (1-V) \frac{P - 2VW + V^2(1-V)}{[W - V(1-V)]^2}} \right), \quad (24)$$

при этом функция $a_p = a_p(P, W, V)$ однозначно определяется выражением

$$a_p = -\frac{(1-V)^2}{W - V(1-V)}. \quad (25)$$

Приравнивая к нулю подкоренное выражение уравнения (24), определяем параметр $P = \frac{W^2}{1-V}$. Тогда согласно выражению (22) можно записать

$$a_p = -\frac{(1-V)^2}{W - V(1-V)}. \quad (26)$$

Из сопоставления выражений (25) и (26) следует, что при однозначном положении входного зрачка, когда в изображении отсутствует первичный астигматизм, отсутствует также и первичная кома.

Используя выражение (8), представим уравнение (7) в виде

$$(1-V)P = W^2 - \frac{(1-V)^2}{(n-1)^2} \left[\alpha^2 - n(1+V)\alpha + n^2V \right].$$

Подставив это выражение в формулу (24), в результате последующих преобразований получим

$$a_p = -\frac{(n-1)(1-V)}{n+V - (n-1)\alpha \pm \sqrt{(\alpha-n)(\alpha-nV)}}. \quad (27)$$

Для того чтобы выражение (27) имело действительные корни, подкоренное выражение должно быть больше или равно нулю. Отсюда следует, что при $\frac{\alpha}{n} \geq 1$ угол $\alpha \geq n$; при

$$\frac{\alpha}{n} - V \geq 0 \text{ угол } \alpha \geq nV.$$

Пусть $\alpha = n$, при этом $a_p = \frac{(n-1)(1-V)}{n^2 - V}$. Радиус кривизны первой поверхности линзы

$r_1 = \frac{(n-1)(1-V)}{n^2 - V}$, т.е. центр входного зрачка тонкой линзы расположен в центре кривизны ее

первой поверхности. Аберрационные параметры второй поверхности линзы равны $P_2 = 0$ и $W_2 = 0$, т.е. вторая поверхность линзы является апланатической и не вносит первичного

астигматизма в изображении. В результате получена линза, образованная изопланатической и апланатической поверхностями [1, 4].

Пусть $\alpha = nV$, при этом $a_p = \frac{(n-1)(1-V)}{(n^2-1)V - n(1-V)}$. Радиус кривизны второй поверхности

рассматриваемой линзы $r_2 = \frac{(n-1)(1-V)}{n^2V-1}$, т.е. вторая поверхность тонкой линзы концентрична

центру выходного зрачка. Аберрационные параметры первой поверхности линзы равны $P_1 = 0$ и $W_1 = 0$, т.е. первая поверхность линзы является апланатической. Таким образом, и в этом случае тонкую линзу образуют апланатическая и изопланатическая поверхности [1, 4].

При расположении предмета на бесконечно большом расстоянии от линзы ($V = 0$) формула (27) принимает вид

$$a_p = -\frac{n-1}{(n-1)\alpha - n \pm \sqrt{\alpha(\alpha-n)}}. \quad (28)$$

Выражение (28) определяет два значения отрезка a_p , при которых в изображении отсутствует первичный астигматизм: $\alpha \leq 0$ или $\alpha \geq n$. Входной зрачок линзы, расположенный на меньшем по абсолютной величине расстоянии от ее центра, назван проф. М. М. Русиновым ближним зрачком, а на большем расстоянии — дальним [4].

Заметим, что при $\alpha = 0$ радиус кривизны первой поверхности $r_1 = \infty$, отрезок $a_p = -\frac{n-1}{n}$, а $a'_p = r_2 = 1-n$; при $\alpha = n$ отрезок $a_p = r_1 = \frac{n-1}{n^2}$.

Зависимость $a_p(\alpha)$ при $-n \leq \alpha \leq 0$ и $n \leq \alpha \leq 2n$, где $n = 1,65$, представлена на рис. 6, а, б соответственно (при $S_{III} = 0$).

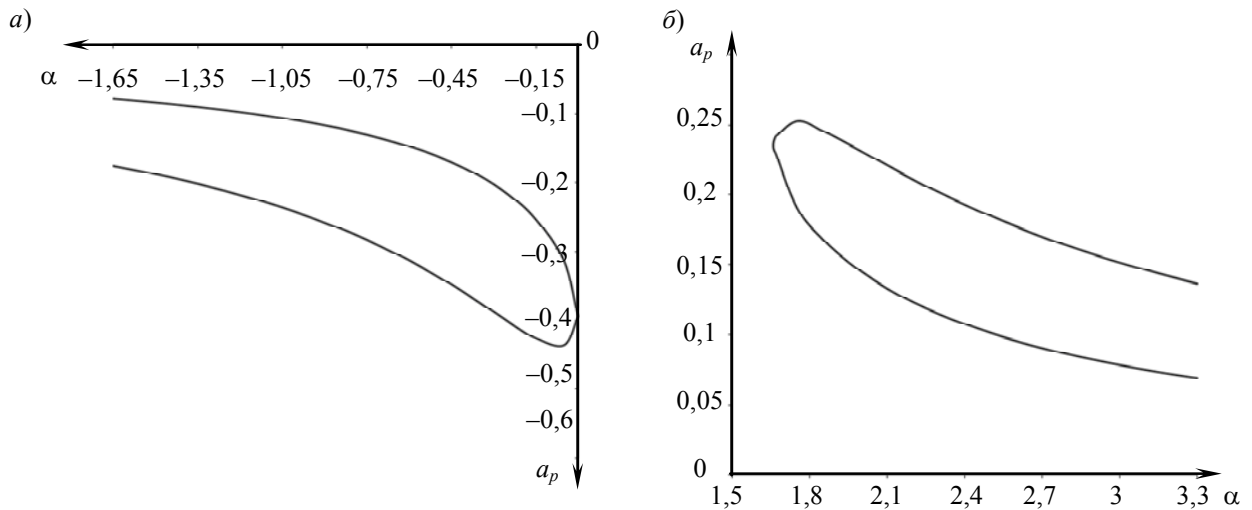


Рис. 6

Пусть $V = 0$, тогда выражения (6), (7) и (8) принимают следующий вид:

$$S_{III} = Pa_p^2 + 2Wa_p + 1;$$

$$P = n \frac{2+n}{(n-1)^2} \left(\alpha^2 - \frac{1+2n}{2+n} \alpha + \frac{n}{2+n} \right),$$

$$W = -\frac{n+1}{n-1} \left(\alpha - \frac{n}{n-1} \right).$$

Естественно предположить, что при изменении положения входного зрачка при неизменном значении параметров P и W значение коэффициента S_{III} изменяется, т.е. в общем случае $S_{III} = S_{III}(a_p) \neq 0$. Экстремальное значение функции $S_{III} = S_{III}(a_p)$ находим из условия

$$\frac{\partial S_{III}}{\partial a_p} = 0: S_{III}(a_{p\text{extr}}) = 1 - \frac{W^2}{P}.$$

Исследование абберационных свойств тонкой линзы, выбранной в качестве базовой для построения оптических систем, позволяет дополнять систему требуемыми коррекционными элементами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Русинов М. М. Композиция оптических систем. Л.: Машиностроение, 1989.
2. Зверев В. А. Основы геометрической оптики: Учеб. пособие. СПб: СПбГИТМО (ТУ), 2002.
3. Зверев В. А., Тимощук И. Н. Абберационные свойства тонкой линзы как элемента композиции оптической системы // Оптич. журн. 2010. Т. 77, № 4. С. 10—16.
4. Русинов М. М. Техническая оптика: Учеб. пособие. Л.: Машиностроение, 1979.

Сведения об авторах

- Василиса Викторовна Ежова** — аспирант; Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра прикладной и компьютерной оптики; E-mail: evv_foist@mail.ru
- Виктор Алексеевич Зверев** — д-р техн. наук, профессор; Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра прикладной и компьютерной оптики; E-mail: post_vaz@rambler.ru
- Ирина Николаевна Тимощук** — канд. техн. наук, доцент; Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра компьютерной фотоники и видеoinформатики; E-mail: tim_ir@rambler.ru

Рекомендована кафедрой
прикладной и компьютерной оптики

Поступила в редакцию
28.01.14 г.