

---

---

# МЕТОДИЧЕСКИЕ РАЗРАБОТКИ

---

---

УДК 535.317.6

С. М. МАРЧУК

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СРЕДЫ MATHCAD ДЛЯ РАСЧЕТА ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ОБЛАСТИ АБЕРРАЦИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Рассматривается пример использования среды MathCAD для расчета оптических систем в области аббераций третьего порядка. Приведены результаты расчета объектива типа „триплет“ с исправленными монохроматическими абберациями третьего порядка, хроматизмом положения и увеличения. Представлен сравнительный анализ результатов, полученных в среде MathCAD, с результатами моделирования.

*Ключевые слова:* расчет оптических систем, MathCAD, абберации третьего порядка.

Теория аббераций третьего порядка во многих случаях позволяет разработать оптическую систему, в первом приближении удовлетворяющую заданным требованиям и пригодную для последующей оптимизации ее параметров с использованием программы автоматизированной коррекции (оптимизации) оптических систем.

Однако расчет оптической системы произвольной конфигурации (с учетом числа ее компонентов, их взаимного расположения, положения предмета и входного зрачка) по формулам теории аббераций третьего порядка довольно трудоемок и в настоящее время не автоматизирован.

В настоящей статье в качестве инструмента, облегчающего проведение расчетов, предлагается использовать систему компьютерной математики MathCAD, позволяющую в необходимой степени автоматизировать процесс вычислений и при этом сохранить наглядность, свойственную аналитическим методам.

Рассмотрим применение среды MathCAD на примере расчета объектива типа „триплет“, используя методику расчета, приведенную в работе [1]. Выбор методики обусловлен тем обстоятельством, что последовательность вычислений, изложенная в этой работе, представляет собой наглядный пошаговый алгоритм, который без изменений может быть реализован средствами MathCAD.

Алгоритм расчета объектива выполняется в два этапа (рис. 1): на первом этапе вычисляются оптические силы линз (в предположении, что линзы объектива бесконечно тонкие) и расстояния между линзами исходя из условий коррекции кривизны изображения, хроматизма положения и увеличения при заданном фокусном расстоянии объектива; на втором этапе определяется кривизна поверхностей линз объектива исходя из условий коррекции сферической абберации, астигматизма и комы объектива. Дисторсия корригируется изменением величины отношения оптических сил третьей и первой линз.

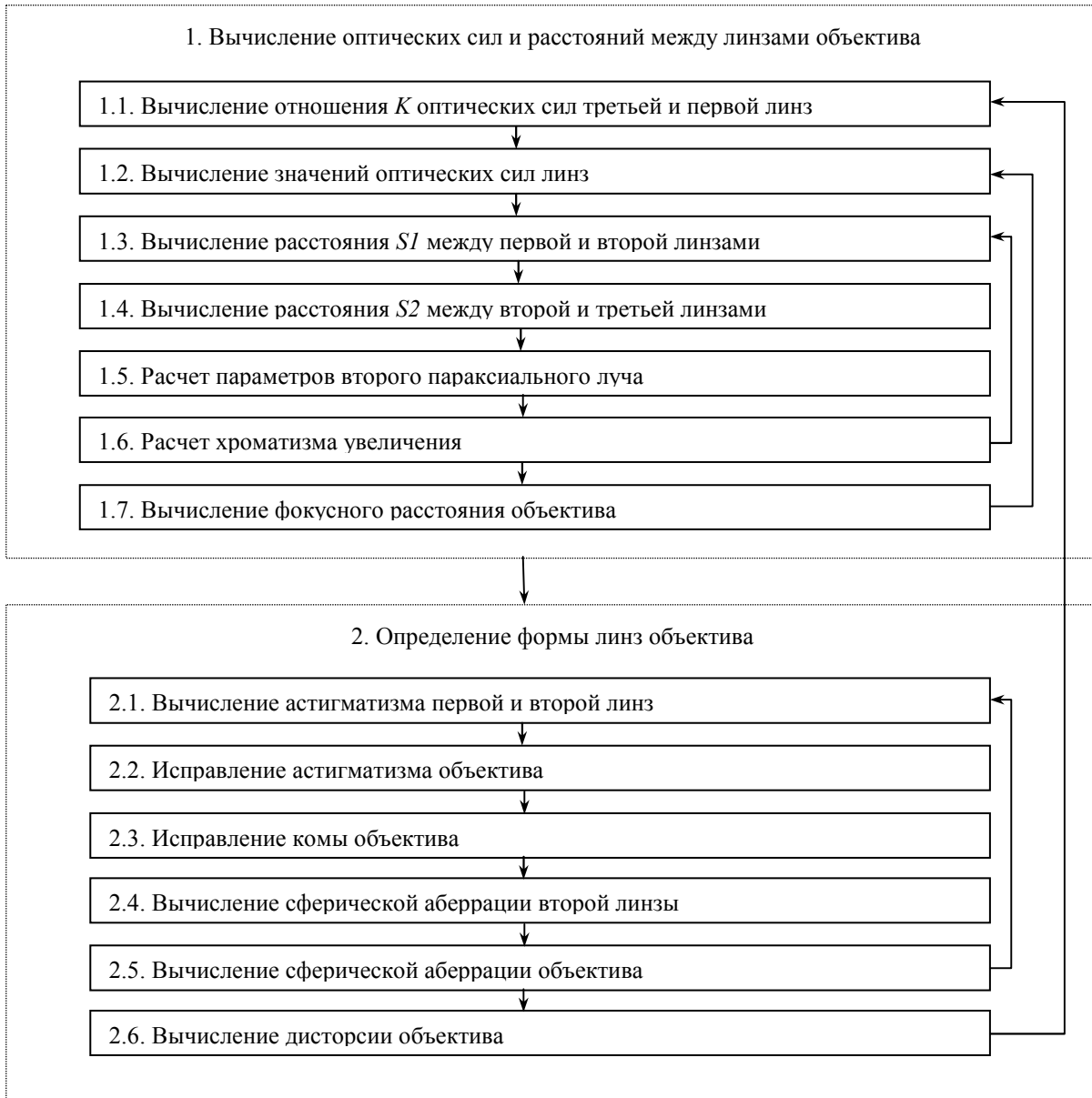


Рис. 1

Схема объектива приведена на рис. 2, где  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  — оптические силы первой, второй и третьей линз;  $S_1$ ,  $S_2$  — расстояния между линзами;  $c_1$ ,  $c_3$ ,  $c_5$  — кривизна поверхностей линз (используется в качестве коррекционных параметров для устранения сферической аберрации, комы и астигматизма соответственно).

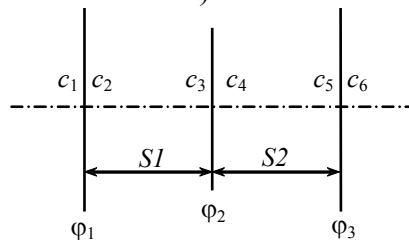


Рис. 2

Пусть требуется рассчитать объектив со следующими характеристиками: фокусное расстояние  $f' = 100$  мм, относительное отверстие  $D / f' = 1:3,5$ , угловое поле  $2\omega = 30^\circ$ :

$$f' := 100 \quad \Phi := 1/f' \quad \Phi = 0.01 \quad \omega := \frac{15 \times \pi}{180} \quad \omega = 0.261799 \text{ рад},$$

где  $\Phi$  — оптическая сила объектива.

**1.1.** Отношение  $K$  оптических сил третьей и первой линз объектива принимается равным 1,34 (в первом приближении значение  $K$  задается произвольно, затем изменяется для обеспечения требуемого значения дисторсии):

$$K := 1.34.$$

**1.2.** Оптическая сила  $\varphi_1$  первой линзы принимается равной 0,016475 (в первом приближении значение  $\varphi_1$  задается произвольно, затем изменяется для обеспечения требуемого значения оптической силы объектива):

$$\varphi_1 := 0.016475 \quad \varphi_3 := K \times \varphi_1 \quad \varphi_3 = 0.022077.$$

В качестве материала положительных линз выбрано стекло марки N-LAK7, отрицательной линзы — стекло N-SF2 из каталога SCHOTT [2]. Показатели преломления  $n_d$  и коэффициенты дисперсии  $v_d$ :

$$n := \begin{pmatrix} 1.6516 \\ 1.64769 \\ 1.6516 \end{pmatrix} \quad v := \begin{pmatrix} 58.52 \\ 33.82 \\ 58.52 \end{pmatrix}.$$

Вычисляется величина изображения:  $h := f' \times \omega \quad h = 26.179939$ .

Радиус кривизны Петцваля принимается равным

$$\rho := -4 \times f' \quad \rho = -400.$$

Для аберраций и параметров используются обозначения, принятые в работе [1]. Вычисляется сумма Петцваля:

$$\Sigma PC := -\frac{h^2}{2 \times \rho} \quad \Sigma PC = 0.856736.$$

Сумма Петцваля выражается через оптические силы линз и решается уравнение относительно  $\varphi_2$ :

$$\varphi\varphi 2 := \frac{h^2}{2} \times \sum_{i=1}^3 \frac{\varphi_i}{n_i} = \Sigma PC \quad \left| \begin{array}{l} \text{explicit, } \Sigma PC \\ \text{solve, } \varphi_2 \rightarrow \left( \frac{-\varphi_1}{n_1} - \frac{\varphi_3}{n_3} - \frac{1}{\rho} \right) \times n_2 \\ \text{expand, } \rho \\ \text{collect, } n_2 \end{array} \right.$$

$$\varphi\varphi 2 = -0.034341 \quad \varphi_2 := \varphi\varphi 2 \quad \varphi = \begin{pmatrix} 0.016475 \\ -0.034341 \\ 0.022077 \end{pmatrix}.$$

**1.3.** Задается расстояние между первой и второй линзами:

$$S1 := 15.4.$$

Расстояние  $S1$  используется в качестве коррекционного параметра для устранения хроматизма увеличения; в первом приближении значение  $S1$  задается произвольно, затем изменяется для обеспечения требуемого значения хроматизма увеличения.

**1.4.** Вычисляется расстояние  $S2$  между второй и третьей линзами исходя из условия равенства нулю хроматизма положения. Для этого рассчитываются параметры первого параксиального луча:

$$\begin{array}{lll}
 \frac{f'}{y_a} := \frac{3.5}{2} & u'k := -\Phi \times y_a & u'k = -0.142857 \\
 u_1 := 0 & y_1 := y_a & y_1 = 14.285714 \\
 u_2 := u_1 - y_1 \times \varphi_1 & & u_2 = -0.235357 \\
 y_2 := y_1 + u_2 \times S1 & & y_2 = 10.661214 \\
 u_3 := u_2 - y_2 \times \varphi_2 & & u_3 = 0.13076,
 \end{array}$$

где  $y_a$  — 0,5 диаметра входного зрачка объектива;  $u, y$  — угол луча с оптической осью и высота луча соответственно;  $u'k$  — угол луча с оптической осью в пространстве изображений.

Уравнение, определяющее условие равенства нулю хроматизма положения, решается относительно  $y_3$ :

$$yY3 := \frac{1}{u'k} \times \sum_{i=1}^3 \frac{(y_i)^2 \times \varphi_i}{v_i} = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \text{explicit, } u'k \\ \text{solve, } y_3 \end{array} \right. \rightarrow yY3 = \begin{pmatrix} 12.394905 \\ -12.394905 \end{pmatrix};$$

высота  $y_3$  имеет тот же знак, что и  $y_1$ , поэтому

$$y_3 := yY3_1 \quad y_3 = 12.394905.$$

Зная  $y_3$ , нетрудно вычислить  $S2$ :

$$S2 := y_3 = y_2 + u_3 \times S2 \quad \left| \begin{array}{l} \text{solve, } S2 \\ \text{explicit} \\ \text{collect, } u_3 \end{array} \right. \rightarrow \frac{y_3 - y_2}{u_3} \quad S2 = 13.258599.$$

**1.5.** Для вычисления хроматизма увеличения рассчитывается ход второго параксиального луча:

$$\begin{array}{lll}
 up_1 := \omega & up_1 = 0.261799 & up_1 := -5.402, \\
 up_2 := up_1 - yp_1 \times \varphi_1 & & up_2 = 0.350797 \\
 yp_2 := yp_1 + up_2 \times S1 & & yp_2 = 0.000279 \\
 up_3 := up_2 - yp_2 \times \varphi_2 & & up_3 = 0.350807 \\
 yp_3 := yp_2 + up_3 \times S2 & & yp_3 = 4.651487 \\
 up_4 := up_3 - yp_3 \times \varphi_3 & & up_4 = 0.248118,
 \end{array}$$

где  $up, yp$  — угол луча с оптической осью и высота луча соответственно; величина  $up_1$  подбирается таким образом, чтобы высота  $yp_2$  луча на второй линзе была равна нулю (в предположении, что диафрагма совмещена со второй линзой).

**1.6.** Вычисляется хроматизм увеличения:

$$\frac{1}{u'k} \times \sum_{i=1}^3 \frac{y_i \times yp_i \times \varphi_i}{v_i} = -0.000148;$$

если полученное значение отлично от требуемого, возврат к п. 1.3 и повтор вычислений с изменением значения  $S1$ .

**1.7.** Вычисляется фокусное расстояние  $f'$  объектива:

$$\begin{array}{llll}
 u_4 := u_3 - y_3 \times \varphi_3 & & u_4 = -0.142876 & \\
 \Phi := \frac{u_4}{-y_1} & \Phi = 0.010001 & f' := \frac{1}{\Phi} & f' = 99.986514;
 \end{array}$$

если полученное значение  $f'$  отлично от требуемого, возврат к п. 1.2 и повтор вычислений с изменением значения  $\varphi_1$ ; для сокращения числа итераций осуществляется построение графика зависимости  $\Phi(\varphi_1)$  (рис. 3), откуда нетрудно найти требуемое значение  $\varphi_1 = 0.016475$ .

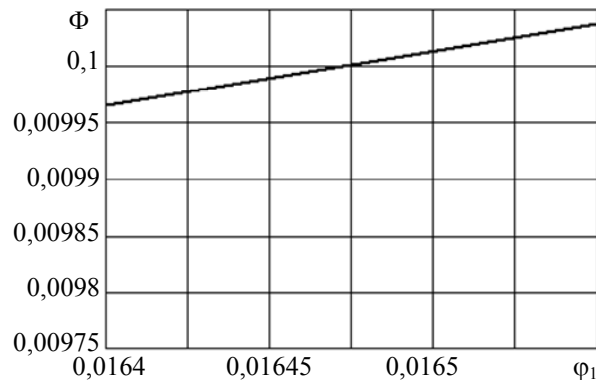


Рис. 3

Кривизна поверхностей линз определяется исходя из условий устранения сферической аберрации, комы и астигматизма. Согласно работе [1] в выражения для поперечных аберраций входят величины, зависящие от параметров 1-го и 2-го парааксиальных лучей и показателей преломления материалов линз:

$$\begin{aligned}
 i &:= 1 \dots 3 & Q_i &:= \frac{y p_i}{y_i} & v_i &:= \frac{u_i}{y_i} & C_i &:= \frac{\varphi_i}{n_i - 1} \\
 G1_i &:= \frac{(n_i)^2 \times (n_i - 1)}{2} & G2_i &:= \frac{(2 \times n_i + 1) \times (n_i - 1)}{2} & G3_i &:= \frac{(3 \times n_i + 1) \times (n_i - 1)}{2} \\
 G4_i &:= \frac{(n_i + 2) \times (n_i - 1)}{2 \times n_i} & G5_i &:= \frac{2 \times (n_i + 1) \times (n_i - 1)}{n_i} & G6_i &:= \frac{(3 \times n_i + 2) \times (n_i - 1)}{2 \times n_i} \\
 G7_i &:= \frac{(2 \times n_i + 1) \times (n_i - 1)}{2 \times n_i} & G8_i &:= \frac{n_i \times (n_i - 1)}{2}
 \end{aligned}$$

**2.1.** Задается кривизна  $c_1$ :

$$c_1 := 0.024958;$$

в первом приближении значение  $c_1$  задается произвольно, затем изменяется таким образом, чтобы сферическая аберрация объектива не превышала допустимого значения; вычисляется кривизна  $c_2$ :

$$c_2 := c_1 - C_1 \quad c_2 = -0.000326.$$

Поперечный астигматизм (астигматизм в поперечной мере) первой линзы определяется выражением

$$TACs s_1 := TAC_1 + 2 \times Q_1 \times CC_1 + (Q_1)^2 \times TSC_1,$$

где

$$TSC_1 := \frac{(y_1)^4}{u_4} \times [G1_1 \times (C_1)^3 - G2_1 \times (C_1)^2 \times c_1 - G3_1 \times (C_1)^2 \times v_1 +$$

$$+ G4_1 \times C_1 \times (c_1)^2 + G5_1 \times C_1 \times c_1 \times v_1 + G6_1 \times C_1 \times (v_1)^2]$$

$$TSC_1 = -0.973805$$

$$CC_1 := -y p_4 \times (y_1)^2 \times [0.25 \times G5_1 \times C_1 \times c_1 + G7_1 \times C_1 \times v_1 - G8_1 \times (C_1)^2] \quad CC_1 = 0.074348$$

$$TAC_1 := \frac{(yP_4)^2 \times \varphi_1 \times u_4}{2} \quad TAC_1 = -0.806447 ,$$

тогда

$$TAC_{SS_1} = -1.00192 .$$

При  $yP_2 \approx 0$  величина поперечного астигматизма второй линзы пропорциональна ее оптической силе  $\varphi_2$ :

$$TAC_2 := \frac{(yP_4)^2 \times \varphi_2 \times u_4}{2} \quad TAC_2 = 1.680984 .$$

## 2.2. Осуществляется исправление астигматизма в плоскости изображения:

$$\Sigma TAC := 0 .$$

Поперечный астигматизм  $TAC_{SS_3}$  третьей линзы определяется выражением, аналогичным выражению для  $TAC_{SS_1}$ :

$$TAC_{SS_3} := TAC_3 + 2 \times Q_3 \times CC_3 + (Q_3)^2 \times TSC_3 ,$$

где

$$TAC_3 := \frac{(yP_4)^2 \times \varphi_3 \times u_4}{2} .$$

Астигматизм  $\Sigma TAC$  в плоскости изображения равен сумме величин  $TAC_{SS_1}$ ,  $TAC_2$  и  $TAC_{SS_3}$ . Уравнение для  $\Sigma TAC$  решается относительно  $c_5$ :

$$cc5 := \Sigma TAC = TAC_{SS_1} + TAC_2 + TAC_3 + 2 \times Q_3 \times CC_3 + (Q_3)^2 \times TSC_3 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{substitute, } CC_3 \\ \text{substitute, } TSC_3 \\ \text{explicit} \\ \text{solve, } c_5 \end{array} \right.$$

$$CC_3 = -yP_4 \times (y_3)^2 \times [0.25 \times G5_3 \times C_3 \times c_5 + G7_3 \times C_3 \times v_3 - G8_3 \times (C_3)^2]$$

$$TSC_3 = \frac{(y_3)^4}{u_4} \times [G1_3 \times (C_3)^3 - G2_3 \times (C_3)^2 \times c_5 - G3_3 \times (C_3)^2 \times v_3 + G4_3 \times C_3 \times (c_5)^2 + \\ + G5_3 \times C_3 \times c_5 \times v_3 + G6_3 \times C_3 \times (v_3)^2] \rightarrow \\ cc5 = \begin{pmatrix} 0.004684 \\ -0.063592 \end{pmatrix} ;$$

из двух решений выбирается наименьшее по абсолютному значению

$$c_5 := cc5_1 \quad c_5 = 0.004684$$

и вычисляется кривизна  $c_6$ :

$$c_6 := c_5 - C_3 \quad c_6 = -0.029197 .$$

## 2.3. Вычисляется величина комы, вносимой первой линзой:

$$CC_{SS1} := CC_1 + Q_1 \times TSC_1 \quad CC_{SS1} = 0.442583 ;$$

кома третьей линзы определяется по формуле

$$CC_{SS3} := CC_3 + Q_3 \times TSC_3 ,$$

где

$$CC_3 := -yP_4 \times (y_3)^2 \times [0.25 \times G5_3 \times C_3 \times c_5 + G7_3 \times C_3 \times v_3 - G8_3 \times (C_3)^2] \quad CC_3 = 0.930033$$

$$\begin{aligned} TSC_3 &:= \frac{(Y_3)^4}{u_4} \times [G1_3 \times (C_3)^3 - G2_3 \times (C_3)^2 \times c_5 - G3_3 \times (C_3)^2 \times v_3 + G4_3 \times C_3 \times (c_5)^2 + \\ &+ G5_3 \times C_3 \times c_5 \times v_3 + G6_3 \times C_3 \times (v_3)^2] \quad TSC_3 = -2.105082 ; \\ CCss3 &:= CC_3 + Q_3 \times TSC_3 \quad CCss3 = 0.14005. \end{aligned}$$

Сагиттальная кома объектива определяется выражением

$$\Sigma CC := CCss1 + CC_2 + CCss3,$$

где  $CC_2$  — кома второй линзы; это выражение приравняется к нулю и полученное уравнение решается относительно  $c_3$ :

$$\begin{aligned} cc3 := 0 = CCss1 + CC_2 + CCss3 & \left\{ \begin{array}{l} \text{substitute, } CC_2 \\ \text{explicit} \quad \rightarrow \\ \text{solve, } c_3 \end{array} \right. \\ CC_2 = -h \times (Y_2)^2 \times [0.25 \times G5_2 \times C_2 \times c_3 + G7_2 \times C_2 \times v_2 - G8_2 \times (C_2)^2] \\ c_3 := cc3 \quad c_3 = -0.025649; \end{aligned}$$

вычисляется кривизна четвертой поверхности:

$$c_4 := c_3 - C_2 \quad c_4 = 0.027372.$$

**2.4.** С учетом кривизны  $c_3$  третьей поверхности вычисляется величина сферической aberrации второй линзы:

$$\begin{aligned} TSC_2 &:= \frac{(Y_2)^4}{u_4} \times [G1_2 \times (C_2)^3 - G2_2 \times (C_2)^2 \times c_3 - G3_2 \times (C_2)^2 \times v_2 + G4_2 \times C_2 \times (c_3)^2 + \\ &+ G5_2 \times C_2 \times c_3 \times v_2 + G6_2 \times C_2 \times (v_2)^2] \quad TSC_2 = 3.080114. \end{aligned}$$

**2.5.** Сферическая aberrация  $\Sigma TSC$  объектива равна сумме величин  $TSC_1$ ,  $TSC_2$  и  $TSC_3$ :

$$\Sigma TSC := TSC_1 + TSC_2 + TSC_3 \quad \Sigma TSC = 0.001227;$$

если величина  $\Sigma TSC$  превышает допустимое значение, возврат к п. 2.1 и повтор вычислений с изменением значения  $c_1$ ; для сокращения числа итераций осуществляется построение графика зависимости  $\Sigma TSC(c_1)$  (рис. 4), откуда нетрудно найти требуемое значение  $c_1 = 0.024958$ .

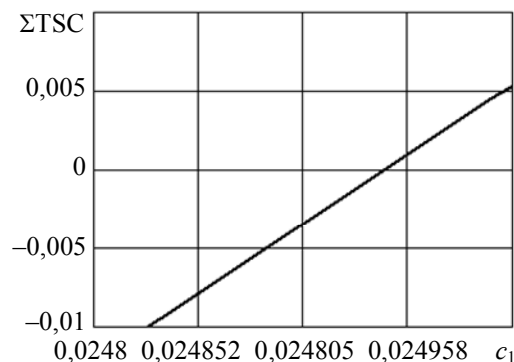


Рис. 4

**2.6.** Оценивается величина дисторсии. Величина дисторсии, вносимой первой линзой:

$$DCss_1 := DC_1 + Q_1 \times (TPC_1 + 3 \times TAC_1) + 3 \times (Q_1)^2 \times CC_1 + (Q_1)^3 \times TSC_1,$$

где

$$DC_1 := 0 \quad TPC_1 := \frac{TAC_1}{n_1} \quad TPC_1 = -0.488283,$$

тогда  $DC_{SS_1} = 1.184036$ .

Вторая линза дисторсии не вносит:  $DC_2 := 0$ . Дисторсия  $DC_{SS_3}$  третьей линзы вычисляется по формуле, аналогичной  $DC_{SS_1}$ :

$$DC_3 := 0 \quad TPC_3 := \frac{TAC_3}{n_3}$$

$$DC_{SS_3} := DC_3 + Q_3 \times (TPC_3 + 3 \times TAC_3) + 3 \times (Q_3)^2 \times CC_3 + (Q_3)^3 \times TSC_3$$

$$DC_{SS_3} = -1.180472.$$

Дисторсия объектива равна сумме величин  $DC_{SS_1}$ ,  $DC_2$  и  $DC_{SS_3}$ :

$$\Sigma DC := DC_{SS_1} + DC_2 + DC_{SS_3} \quad \Sigma DC = 0.003564;$$

если величина  $\Sigma DC$  недопустимо велика, возврат к п. 1.1 и повтор вычислений с изменением значения  $K$ ; из построенного графика зависимости  $\Sigma DC(K)$  (рис. 5) следует, что близкое к нулю значение дисторсии достигается при  $K = 1,34$ .

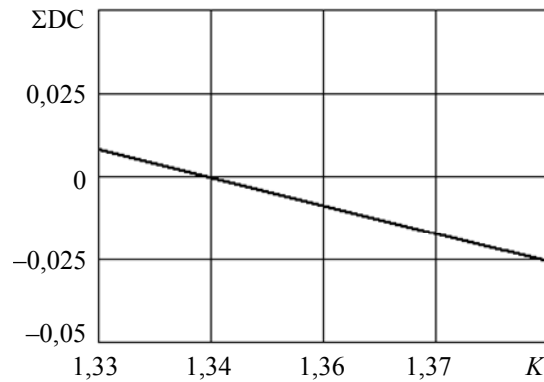


Рис. 5

Параметры рассчитанного объектива представлены в табл. 1, где  $r$  — радиусы кривизны поверхностей,  $d$  — расстояния между вершинами поверхностей линз объектива.

Таблица 1

$r$	$d$	$n_d$
40,0673	0	1,6516
-3068,2704	15,4	—
-38,9886	0	1,64769
36,5334	13,2586	—
213,5019	0	1,6516
-34,2505	—	—

В целях проверки правильности значений параметров были вычислены aberrации объектива с использованием программы автоматизированного проектирования оптических систем (АПОС) и произведен их сравнительный анализ их с величинами, полученными в среде MathCAD (табл. 2). Для удобства сравнения поперечные aberrации приведены к коэффициентам  $S_I$ — $S_V$  Зейделя:

$$S_I = -2u_4 \Sigma TSC; \quad S_{II} = -2u_4 \Sigma CC; \quad S_{III} = -2u_4 \Sigma TAC;$$

$$S_{IV} = -2u_4 \Sigma TPC, \quad \Sigma TPC = u_4 \Sigma PC; \quad S_V = -2u_4 \Sigma DC.$$



Таблица 2

Программа	$S_I$	$S_{II}$	$S_{III}$	$S_{IV}$	$S_V$	Хроматизм положения	Хроматизм увеличения
АПОС	0,000351	0,000046	-0,000009	-0,036631	0,001142	0,000539	-0,000152
MathCAD	0,000351	0	0	-0,034978	0,001018	0	-0,000148

Отметим в заключение, что последовательность расчета, представленная на рис. 1, реализована в одном MathCAD-документе — все выражения „записаны“ на одном „рабочем листе“, что позволяет легко проследить взаимосвязь параметров рассчитываемого объектива и, как следствие, сократить время вычислений на этапе выбора принципиальной оптической схемы [3].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Smith W. J.* Modern Optical Engineering. N. Y.: McGraw-Hill, 2000.
2. Оптическое стекло. Описание свойств. SCHOTT, 2011.
3. Вычислительная оптика: Справочник / *М. М. Русинов, А. П. Грамматин, П. Д. Иванов* и др.; Под общ. ред. *М. М. Русинова*. Л.: Машиностроение, 1984.

**Сведения об авторе****Сергей Михайлович Марчук**

— канд. техн. наук, доцент; Томский политехнический университет, кафедра информатики и проектирования систем;  
E-mail: sergm@ad.ctpu.edu.ru, sergey.marchuk@yahoo.com

Рекомендована кафедрой  
информатики и проектирования  
систем

Поступила в редакцию  
05.03.14 г.