УДК 519.7
DOI: 10.17586/0021-3454-2015-58-3-173-178

УПРОЩЕННЫЙ АЛГОРИТМ БЭКСТЕППИНГА ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ

И. Б. Фуртат[1], Е. А. Тупичин[2]

[1]*Университет ИТМО, 197101, Санкт-Петербург, Россия*
Институт проблем машиноведения РАН, 199178, Санкт-Петербург, Россия
Санкт-Петербургский государственный университет, 199034, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: cainenash@mail.ru

[2]*Университет ИТМО, 197101, Санкт-Петербург, Россия*

Представлен алгоритм робастного управления параметрически неопределенными нелинейными объектами, основанный на модифицированном методе бэкстеппинга. Приведены результаты моделирования, иллюстрирующие работоспособность рассмотренной схемы.

Ключевые слова: *робастное управление, метод бэкстеппинга, нелинейная система.*

Введение. На сегодняшний день предложено достаточно много методов и подходов к построению адаптивных и робастных систем управления неопределенными объектами. Особого внимания заслуживает метод бэкстеппинга, впервые предложенный в работе [1] для синтеза адаптивного управления нелинейными объектами по выходу. Использование этого метода позволяет обеспечить в системе управления параметрическую робастность и возможность учета априорной информации о значениях параметров объекта управления. Последнее свойство наглядно продемонстрировано в работе [2], где представлен эффективный алгоритм бэкстеппинга для параметрически неопределенных объектов с измеряемым скалярным выходом. Другие модификации данного метода рассмотрены, например, в работах [3—5]. Однако предложенные в работах [1—5] методы сложны при аналитическом расчете системы управления, что объясняется громоздкостью вычислений полной производной по времени от стабилизирующих сигналов управления. Кроме того, при технической реализации системы возникают трудности, связанные с большим количеством компонентов и фильтров ее состояния, необходимых для формирования закона управления.

В настоящей статье предложен модифицированный метод бэкстеппинга для робастного управления параметрическими неопределенными объектами по выходу. Показано, что в отличие от алгоритма, рассмотренного в работе [6], в предлагаемой системе управления реализуется всего один фильтр размерности, равной порядку модели объекта, а для вычисления производных стабилизирующих сигналов управления используются реальные дифференцирующие устройства. Приведенный в работе [6] результат был обобщен для адаптивно-робастного управления линейными объектами, линейными объектами с запаздыванием и нелинейными объектами [7—9]. Это позволяет существенно упростить аналитический расчет настраиваемых параметров и техническую реализацию системы управления. При этом в замкнутой системе обеспечивается требуемая динамическая точность.

Постановка задачи. Рассмотрим математическую модель объекта управления:

$$\dot{x}(t) = f\left(x(t), \xi\right) + b\left(x(t), \xi\right)u(t), \;\; y(t) = h\left(x(t)\right), \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

где $x(t) \in X \subset R^n$ — вектор состояния; $u(t) \in R$ — управляющее воздействие; $y(t) \in Y \subset R$ — регулируемая переменная; $t \in T \subset (0, \infty)$, $f(x, \xi)$, $b(x, \xi)$ и $h(x)$ — гладкие функции соответствующих размерностей; $\xi \in \Xi$ — вектор неизвестных параметров; Ξ — известное ограниченное множество; $x_0 \in X$ — вектор начальных условий.

Необходимо синтезировать закон управления, обеспечивающий выполнение целевого условия

$$\left|y(t) - y_{\text{м}}(t)\right| < \delta \text{ для } t > t_f, \tag{2}$$

где $\delta > 0$ — показатель точности регулирования, $y_{\text{м}}(t)$ — эталонный сигнал, $t_f > 0$ — время переходного процесса.

П р е д п о л о ж е н и е 1. Функции $f(x, \xi)$, $b(x, \xi)$, $h(x)$ — гладкие, и для любых $x(t) \in X$, $\xi \in \Xi$ выполнены следующие условия:

$$L_b h(x) = L_b L_f^1 h(x) = ... = L_b L_f^{n-2} h(x) = 0,\ \beta\left(x, \xi\right) = L_b L_f^{n-1} h(x) > 0,$$

где $L_f^1 h(x) = \dfrac{\partial h\left(x\right)}{\partial x} f\left(x, \xi\right)$, $L_b h(x) = \dfrac{\partial h\left(x\right)}{\partial x} b\left(x, \xi\right)$ — производная Ли от функции $h(x)$ по направлению векторных полей $f(x, \xi)$, $b(x, \xi)$ соответственно.

Производные высших порядков вычисляются по формулам

$$L_f^2 h(x) = \frac{\partial\left(L_f h(x)\right)}{\partial x} f(x, \xi), ..., L_f^k h(x) = \frac{\partial\left(L_f^{k-1} h(x)\right)}{\partial x} f(x, \xi).$$

П р е д п о л о ж е н и е 2. Существует гладкая функция $\varphi^{-1}(x(t))$, такая что

$$\overline{x}(t) = \varphi(x(t)) = \left[y(t), \dot{y}(t), ..., y^{(n-1)}(t)\right]^T = \left[h(x), L_f^1 h(x), ..., L_f^{n-1} h(x)\right]^T.$$

П р е д п о л о ж е н и е 3. Функция $c(x, \xi) = L_f^n h(x)$ ограничена или ограничена на множестве Ξ и липшицева по $x \in X$.

П р е д п о л о ж е н и е 4. Функции $y_{\text{м}}(t)$, $\dot{y}_{\text{м}}(t), ..., y_{\text{м}}^{(n)}(t)$ — ограниченные.

Аналогичные предположения рассмотрены в работе [10].

Метод решения. Принимая во внимание предположение 1, продифференцируем n раз функцию $y(t)$:

$$p^n y(t) = c\left(x, \xi\right) + \beta\left(x, \xi\right) u(t), \tag{3}$$

где $p = d / dt$ — оператор дифференцирования.

С учетом выражения (3) запишем уравнение ошибки $e_1(t) = y(t) - y_{\text{м}}(t)$ в виде

$$p^n e_1(t) = c\left(x, \xi\right) + \beta\left(x, \xi\right) u(t) - p^n y_{\text{м}}(t). \tag{4}$$

Введем в рассмотрение оператор $Q_{n-1}(p) = \sum_{i=0}^{n-1} k_{n-i} p^i$, такой что полином $Q(\lambda) = \lambda^n + Q_{n-1}(\lambda)$ гурвицев, где λ — комплексная переменная, и перепишем уравнение (4) в форме

$$Q(p) e_1(t) = u(t) + \psi\left(x, \xi, y_{\text{м}}, t\right), \tag{5}$$

где функция

$$\psi\left(x, \xi, y_{\text{м}}, t\right) = c\left(x, \xi\right) + \left(\beta\left(x, \xi\right) - 1\right) u(t) - p^n y_{\text{м}}(t) - Q_{n-1}(p) e(t). \tag{6}$$

Рассмотрим фильтр

$$\dot{v}(t) = A_0 v(t) + l u(t), \tag{7}$$

где $v(t)=\left[v_1(t), v_2(t), ..., v_n(t)\right]^T$, $A_0=\begin{bmatrix} -k_1 & & & \\ -k_2 & & I_{n-1} & \\ \vdots & & & \\ -k_n & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$, $I_{n-1}\in R^{(n-1)\times(n-1)}$ — единичная матрица, $l = [0, ..., 0, 1]^T$.

Перепишем уравнение (5) с учетом выражения (7):

$$e_1(t)=v_1(t)+Q^{-1}(p)\psi\left(x(t), \xi, y_{\text{м}}(t), t\right). \quad (8)$$

Дифференцируя (8), получаем

$$\dot{e}_1(t)=-k_1v_1(t)+v_2(t)+\tilde{f}(t), \quad (9)$$

где $Q(p)\tilde{f}(t)=p\psi\left(x(t), \xi, y_{\text{м}}(t), t\right)$.

Согласно методу бэкстеппинга [3] представим процедуру синтеза системы управления следующим алгоритмом.

Шаг 1. Предположим, что функция $v_2(t)$ — сигнал управления в выражении (9). Определим $v_2(t)$ в виде $v_2(t) = U_1(t)$ и зададим $U_1(t)$ как функцию, необходимую для стабилизации ошибки (9):

$$U_1(t)=-\alpha_1\mu^{-1}e_1(t)+k_1v_1(t), \quad (10)$$

где $\alpha_1 > 0$ и $\mu > 0$ — коэффициенты, выбираемые разработчиком.

Подставив (10) в выражение (9), получим

$$\dot{e}_1(t)=-\alpha_1\mu^{-1}e_1(t)+\tilde{f}(t). \quad (11)$$

Шаг i ($2 \le i \le n-1$). Рассмотрим функцию ошибки $e_i(t) = v_i(t) - U_{i-1}(t)$. Взяв производную от $e_i(t)$ вдоль траекторий (5), получим

$$\dot{e}_i(t)=-k_iv_1(t)+v_{i+1}(t)-\dot{U}_{i-1}(t). \quad (12)$$

Предположим, что функция $v_{i+1}(t)$ — сигнал управления в уравнении (12). Пусть $v_{i+1}(t) = U_i(t)$, тогда

$$U_i(t)=-\alpha_ie_i(t)+k_iv_1(t)+\bar{U}_{i-1}(t), \quad (13)$$

где $\alpha_i > 0$ — коэффициент, выбираемый разработчиком, $\bar{U}_{i-1}(t)$ — оценка сигнала $\dot{U}_{i-1}(t)$.

Подставив (13) в выражение (12), получим

$$\dot{e}_i(t)=-\alpha_ie_i(t)-\eta_{i-1}(t), \quad (14)$$

где $\eta_{i-1}(t)=\dot{U}_{i-1}(t)-\bar{U}_{i-1}(t)$.

Шаг n. Рассмотрим функцию $e_n(t) = v_n(t) - U_{n-1}(t)$. Принимая во внимание уравнение (7) и дифференцируя $e_n(t)$, получаем

$$\dot{e}_n(t)=-k_nv_1(t)+u(t)-\dot{U}_{n-1}(t). \quad (15)$$

Сформируем закон управления

$$u(t)=-\alpha_ne_n(t)+k_nv_1(t)+\bar{U}_{n-1}(t), \quad (16)$$

где $\alpha_n > 0$ — коэффициент, выбираемый разработчиком, $\bar{U}_{n-1}(t)$ — оценка функции $\dot{U}_{n-1}(t)$, с учетом которого перепишем выражение (15):

$$\dot{e}_n(t)=-\alpha_ne_n(t)-\eta_{n-1}(t), \quad (17)$$

где $\eta_{n-1}(t)=\dot{U}_{n-1}(t)-\bar{U}_{n-1}(t)$.

Для оценки производных $\dot{U}_{i-1}(t)$, $i=\overline{2, n}$, воспользуемся следующими наблюдателями

$$\dot{\bar{U}}_{i-1}(t)=-\mu^{-1}\bar{U}_{i-1}(t)+\mu^{-1}\dot{U}_{i-1}(t), \; i=\overline{2, n}. \quad (18)$$

Утверждение. Пусть выполнены предположения 1—4. Тогда существуют константы $\alpha_i > 0,\ i=\overline{1,n}$, и $\mu_0 > 0$, такие что для $\mu \le \mu_0$ система управления (7), (10), (13), (16), (18) обеспечивает выполнение целевого условия (2) для объекта (1).

Доказательство утверждения аналогично приведенному в работах [6—9].

Пример. Рассмотрим модель объекта управления:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= \xi_1 \sin\left(x_1(t)\right) + \xi_2 x_2(t) - \xi_2 x_3(t),\\
\dot{x}_2(t) &= \xi_3 x_1(t) + \xi_4 \sin\left(x_3(t)\right) + \left(1 + x_2^2(t)\right)^{-1}\left(u(t) + x_2^3(t) + x_3^3(t)\right),\\
\dot{x}_3(t) &= \xi_5 x_1(t) - x_3^3(t) + \left(1 + x_2^2(t)\right)^{-1}\left(u(t) + x_2^3(t) + x_3^3(t)\right),\\
y(t) &= x(t)_1.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Множество Ξ задано неравенствами $1 \le \xi_i \le 5,\ i=\overline{1,5}$.

Цель управления — синтез непрерывного закона управления, обеспечивающего выполнение условие (2).

Выберем $k_1 = 3$, $k_2 = 3$, $k_3 = 1$ и зададим фильтр (7) в следующем виде:

$$
\begin{bmatrix} \dot{v}_1(t) \\ \dot{v}_2(t) \\ \dot{v}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t).
$$

Положим $\alpha_1 = 1{,}2$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 110$ и $\mu = 0{,}01$. Для вспомогательных законов управления $U_1(t)$, $U_2(t)$ и основного закона управления $u(t)$ запишем:

$$
U_1(t) = -120 e_1(t) + 3 v_1(t),\quad U_2(t) = -110 e_2(t) + 3 v_1(t) + \bar{U}_1(t);
$$

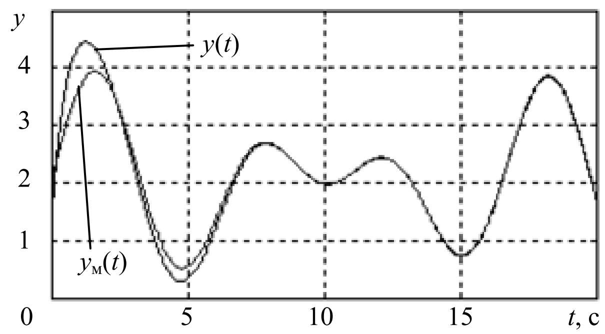
$$
u(t) = -110 e_3(t) + v_1(t) + \bar{U}_2(t),
$$

где $e_1(t) = y(t) - y_м(t)$, $e_2(t) = v_2(t) - U_1(t)$, $e_3(t) = v_3(t) - U_2(t)$.

Определим наблюдатели (18) в виде

$$
\bar{U}_1(t) = \frac{p}{0{,}01p+1} U_1(t),\qquad \bar{U}_2(t) = \frac{p}{0{,}01p+1} U_2(t).
$$

Все начальные условия в системе управления — нулевые. Параметры модели (19) определены как $\xi_1 = \xi_4 = 1{,}2$, $\xi_2 = \xi_3 = \xi_5 = 4{,}5$, $x(0) = [0{,}9\ \ 0{,}8\ \ 0{,}9]^T$. Результаты моделирования переходных процессов по выходному ($y(t)$) и эталонному ($y_м(t)$) сигналам управления представлены на рисунке.



Анализ результатов моделирования показал, что параметрическая неопределенность компенсируется системой управления с точностью $\delta = 0{,}01$ по истечении 8 с. По сравнению с алгоритмами, рассмотренными в работах [11, 12], для обеспечения подобных переходных процессов по ошибке слежения требуется меньшая амплитуда управляющего сигнала.

Заключение. Предложенный алгоритм слежения выходного сигнала нелинейного объекта управления за эталонным сигналом в условиях параметрической неопределенности построен на базе новой версии метода бэкстеппинга, предложенного в работе [6]. Полученная система управления содержит всего один фильтр размерности, равной размерности модели объекта, а для реализации производных в законах управления используются реальные дифференцирующие звенья. Это позволяет упростить расчет и реализацию системы управления за счет уменьшения ее динамического порядка и сокращения количества слагаемых в законах управления по сравнению с известными аналогами.

Статья подготовлена по результатам работы, выполненной при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 13-08-01014), Минобрнауки РФ (проект 14.Z50.31.0031), Правительства РФ (грант 074-U01) и программы ОММПУ-14 РАН; результаты, приведенные в разделе „Метод решения“, получены при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-29-00142) в ИПМаш РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kanellakopoulos I., Kokotović P. V., Morse A. S.* Systematic design of adaptive controllers for feedback linearezable systems // IEEE Trans. Automatic Control. 1991. Vol. 36. P. 1241—1253.
2. *Никифоров В. О.* Адаптивное и робастное управление с компенсацией возмущений. СПб: Наука, 2003.
3. *Khalil H. K.* Nonlinear Systems. N. Y.: Prentice Hall, 2002.
4. *Zheng Y., Yang Y.* Adaptive output feedback control for class of nonlinear systems with unknown virtual control coefficients signs // Adaptive Control and Signal Processing. 2007. Vol. 21, N 1. P. 77—89.
5. *Tanner H. G., Kyriakopoulos K. J.* Backstepping for nonsmooth systems // Automatica. 2003. Vol. 39. P. 1259—1265.
6. *Фуртат И. Б.* Модифицированный алгоритм обратного обхода интегратора // Мехатроника, автоматизация, управление. 2009. № 10. С. 2—7.
7. *Furtat I. B., Tupichin E. A.* Modified simple adaptive-robust backstepping algorithm // Proc. of the 19th Intern. Conf. on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR 2014), Międzyzdroje, Poland. 2014. P. 183—188.
8. *Furtat I. B., Tupichin E. A.* Modified robust backstepping algorithm for plants with time delay // Proc. of the 6th Intern. Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT), St. Petersburg, Russia. 2014. P. 541—545.
9. *Furtat I. B., Tupichin E. A.* Control of nonlinear plant based on modified robust backstepping algorithm // Proc. of IEEE Intern. Conf. on Control Applications (CCA), Antibes, France. 2014. P. 941—946.
10. *Цыкунов А. М.* Робастное управление с компенсацией возмущений. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012.
11. *Фуртат И. Б., Цыкунов А. М.* Адаптивное управление объектами с запаздыванием по выходу // Изв. вузов. Приборостроение. 2005. Т. 48, № 7. С. 15—19.
12. *Фуртат И. Б.* Робастное субоптимальное управление линейными нестационарными объектами по выходу // Мехатроника, автоматизация, управление. 2009. № 7. С. 7—12.

Сведения об авторах

Игорь Борисович Фуртат — д-р техн. наук, профессор; Университет ИТМО, кафедра систем управления и информатики, профессор; ИПМаш РАН, лаборатория управления сложными системами, ведущий научный сотрудник; СПбГУ, кафедра прикладной кибернетики, ведущий научный сотрудник; E-mail: cainenash@mail.ru

Евгений Александрович Тупичин — аспирант; Университет ИТМО, кафедра систем управления и информатики; E-mail: tupichin@mail.ru

Рекомендована лабораторией
управления сложными системами
ИПМаш РАН

Поступила в редакцию
05.11.14 г.

Ссылка для цитирования: *Фуртат И. Б., Тупичин Е. А.* Упрощенный алгоритм бэкстеппинга для управления нелинейными системами // Изв. вузов. Приборостроение. 2015. Т. 58, № 3. С. 173—178.

SIMPLIFIED BACKSTEPPING ALGORITHM FOR CONTROL OF NONLINEAR SYSTEMS

I. B. Furtat[1], **E. A. Tupichin**[2]

[1]*ITMO University, 197101, Saint Petersburg, Russia*
Institute of Problems of Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences,
199178, Saint Petersburg, Russia
Saint Petersburg State University, 199034, Saint Petersburg, Russia
E-mail: cainenash@mail.ru

[2]*ITMO University, 197101, Saint Petersburg, Russia*

An algorithm based on the modified backstepping method is proposed for robust control of parametrically uncertain nonlinear plants. Simulation results illustrate the performance of the presented scheme.

Keywords: robust control, backstepping method, nonlinear system.

Data on authors

Igor B. Furtat — Dr. Sci., Professor; ITMO University, Department of Control Systems and Informatics; IPME RAS, Laboratory Control of Complex Systems; Saint Petersburg State University, Department of Applied Cybernetics; E-mail: cainenash@mail.ru

Evgeny A. Tupichin — Post-Graduate Student; ITMO University; Department of Control Systems and Informatics; E-mail: tupichin@mail.ru

Reference for citation: *Furtat I. B., Tupichin E. A.* Simplified backstepping algorithm for control of nonlinear systems // Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Priborostroenie. 2015. Vol. 58, N 3. P. 173—178 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2015-58-3-173-178