УДК 519.812.3
DOI: 10.17586/0021-3454-2015-58-3-185-189

МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ СИСТЕМОЙ НА ОСНОВЕ АППАРАТА ОБОБЩЕННЫХ МАТРИЧНЫХ ЧИСЕЛ

С. А. Багрецов, Э. В. Мищенко

Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского, 197198, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: ed.84@mail.ru

Для определения кратчайшего пути в графе состояния системы предлагается использовать аппарат обобщенных матричных чисел и вводится понятие модифицированной детерминантной функции матричного числа.

Ключевые слова: *кратчайший путь, граф состояния, выбор оптимальных методов производства.*

Неотъемлемой частью современных промышленных предприятий являются гибкие производственные системы, эффективность которых в значительной степени определяется процессом управления их функционированием.

К таким системам предъявляются особо жесткие требования по надежности, времени и стоимости производства. Для удовлетворения указанных требований, в случае сбоя технологического процесса, система должна обладать свойствами реконфигурации и восстановления, что обеспечивается за счет структурной или функциональной избыточности. На определение необходимой конфигурации системы, в зависимости от уровня ее автоматизации, требуется от единиц минут до нескольких часов [1, 2].

Как правило, решение подобных задач связано с необходимостью минимизации временных, стоимостных и других затрат. Этим обусловливается возможность формализации представления системы в виде некоторой ориентированной сети связей (графа состояний) $G(X, Y)$, где $X = \overline{1, N}$ — множество вершин сети, соответствующих отдельным этапам или операциям производственного процесса; $Y \subseteq XX$ — множество дуг сети, соответствующих возможным технологическим связям между отдельными операциями, т.е. вершинами сети. При этом каждая дуга (i, j), $i, j \in X$, сети из множества Y имеет длину α_{ij} и интерпретируется как временные, стоимостные и другие затраты. В этом случае задача оптимизации технологического процесса сводится к определению такого состава технических средств производства, который позволит обеспечить его оптимизацию по системе выбранных критериев с учетом заданных ограничений. По своему содержанию такая задача сводится к выбору кратчайшего пути S_{1N} между вершиной X=1, соответствующей началу производственного цикла, и вершиной X=N, определяющей его окончание.

Среди методов решения подобных задач наиболее эффективными являются методы, основная процедура реализации которых заключается в определении минимального веса узлов сети посредством рекуррентных преобразований типа

$$Z_{1j} = \min_{j \neq i} \left\{ Z_i + \alpha_{ij} \right\}, \ j = \overline{2, N}, \tag{1}$$

где Z_{1j} — длина кратчайшего пути из вершины 1 в вершину j; $Z_1 = 0$; $Z_i \in [0, +\infty)$; $i = \overline{1, N}$.

Увеличение количества этапов (операций) производства влечет за собой повышение трудоемкости и времени решения задачи. Влияние данного фактора может быть снижено за счет учета рациональной структуры сети и системы ограничений, обеспечивающих исключение из рассмотрения альтернативных вариантов путей (не удовлетворяющих условиям поиска) на ранних стадиях их формирования. Сокращение числа рассматриваемых вариантов возможно в рамках теоретико-множественного подхода к представлению сети.

Одним из способов, который позволяет реализовать теоретико-множественный подход к решению задачи и существенно упростить процедуру определения структуры сети, является аппарат обобщенных матричных чисел [3, 4].

Представим, согласно работе [1], исходную сеть $G(X,Y)$ обобщенным матричным числом α, каждый элемент α_{ij} которого отражает взаимосвязь вершин i и j, $i, j \in X$. Обобщенное матричное число α является теоретико-множественной моделью анализируемого процесса, условно представляемого сетью $G(X,Y)$. Каждый элемент α_{ij} матричного числа α изоморфен соответствующему элементу матрицы весов

$$\mathrm{A} = \left\|\alpha_{ij}\right\|; \quad i, j \in X, i, j = \overline{1, N} .$$

Для определения суммы весовых коэффициентов контурных чисел β сети $G(X,Y)$ в работе [1] рассматривается детерминантная функция матричного числа α, равная

$$\det\left[\alpha = \sum_{\vartheta\in C}(-1)^{\nu_\vartheta}\prod_{g\in R}\det e_{\vartheta g}\right],$$

где C, R — число столбцов и строк контурного числа сети; ν_ϑ — число контуров, образованных ϑ-м столбцом контурного числа сети; $\det e_{\vartheta g} = \alpha_{gj}$ — элемент матрицы весов А, изоморфный соответствующему элементу $e_{\vartheta g}$ ϑ-го столбца контурного числа; контурное число $\beta = \left\|e_{\vartheta g}\right\|$, $\vartheta \in C$, $g = \overline{1, N}$.

Условие построения контурного числа β по заданному матричному числу α сети $G(X,Y)$ определяется выражением

$$\beta = [\alpha]_{\mathrm{mod}\,2}, \tag{2}$$

означающим, что контурное число сети равно декартовому произведению элементов отдельных строк матричного числа α.

Для дальнейшего рассмотрения решения задачи введем понятие модифицированной детерминантной функции ($\det^*(\cdot)$), под которой будем понимать детерминантную функцию, в которой операции сложения и умножения заменены соответствующими их модификациями.

Заменим, согласно терминологии Бержа [5], операции суммирования и произведения операциями обобщенного произведения $\left(\overset{*}{\Pi}\right)$ и модифицированного сложения $\left(\overset{*}{\Sigma}\right)$, которыми на множестве действительных чисел определяются операции вида

$$\overset{*}{\prod_j} c_j = \sum_j c_j, \quad \overset{*}{\sum_j} c_j = \min\left\{c_j\right\}.$$

С учетом выражения (2) модифицированная детерминантная функция по модулю 2 обобщенного матричного числа α будет равна

$$\det{}^*[\alpha]_{\mathrm{mod}\,2} = \overset{*}{\sum_{\vartheta\in C}}\overset{*}{\prod_{g\in R}}\det e_{\vartheta g} .$$

Тогда справедливым оказывается следующее утверждение.

Утверждение. Модифицированная детерминантная функция по модулю 2 производной от обобщенного матричного числа α по индексам начальной (i=1) и конечной (i=N) вершин сети $G(X,Y)$ определяет кратчайший путь из вершины i=1 в вершину i=N.

Доказательство. Из приведенного в работе [1] определения следует, что производной от обобщенного матричного числа α по индексам i и j является такое матричное число α', в котором удалены строки с номером i и элементы с номером j, т.е.

$$\alpha' = \frac{\partial\alpha}{\partial_1 \partial_N} = \left(\left(\alpha \setminus \alpha_{1j} \right) \setminus \alpha_N \right). \tag{3}$$

В соответствии с выражением (1) детерминантная функция производной от матричного числа α по индексам начальной и конечной вершин определяется декартовым произведением элементов строк числа α. Из определения матричного числа α следует, что декартово произведение любых двух множеств $\left\{\alpha_{k,i_1}\right\}$ и $\left\{\alpha_{k+1,i_2}\right\}$, $i_1, i_2 = \overline{1,N}$, $i_1 \neq i_2$, позволяет определить все возможные сочетания дуг сети, соединяющих между собой вершины с координатами $\{k\} \in X$ и $\{k+1\} \in X$.

С учетом выражения (3) на основе контурного числа β' производной от матричного числа α' определяются все возможные пути, проходящие через начальную и конечную вершины сети $G(X,Y)$, включая пути $S_ц$, содержащие повторные циклы. При этом пути $S_ц$ могут быть определены по наличию в структуре их описания сочетаний элементов (α_{ij}) матричного числа:

$$\left\{\alpha_{iq}^{\zeta}; \alpha_{q\gamma}^{\zeta}; \ldots; \alpha_{ji}^{\zeta}\right\} \quad \forall i = \overline{2,(N-1)}, \quad \zeta \in S_ц.$$

В этом случае, используя выражение (2), можно выделить из множества всех возможных путей путь (j), имеющий минимальный вес. Таким образом, при условии

$$\prod_{g\in R}^{*} \det e_{\vartheta g} = \begin{cases} 0, \text{ если } \left(\alpha_{iq}^{\zeta}; \alpha_{q\gamma}^{\zeta}; \ldots; \alpha_{ji}^{\zeta}\right) \in \zeta \vee \prod\limits_{g\in R}^{*} \det e_{\vartheta g} \geq Z_э \vee \\ \quad \vee Z_{gl} > Z_{э\max} \ \forall g \in R \vee K = 1; \\ \sum\limits_{g\in R} \alpha_{ig} \text{ — в противном случае,} \end{cases}$$

где $K = \begin{cases} 1, \text{ если } i = j \ \forall \alpha_{ij} \in e_{\vartheta g}; \\ 0 \text{ в противном случае;} \end{cases}$ $Z_э = \min\left\{Z_э, Z_{1j}\right\}$ — начальное эвристическое решение задачи; Z_{gl} — вес g-го узла сети, входящего в путь l, утверждение доказано.

В терминах обобщенных матричных чисел решение задачи определения кратчайшего пути между вершинами сети $G(X,Y)$, равными i=1 и j=N, может быть записано как

$$Z = \det{}^{*}\left[\alpha_{1,N}\right]_{\mathrm{mod}\,2}.$$

Таким образом, предлагаемая методика определения кратчайшего пути в графе позволяет учесть начальное эвристическое решение задачи в ходе выполнения алгоритма и исключить из рассмотрения пути, содержащие циклы (повторяющиеся вершины).

Рассмотрим пример реализации методики в ходе технологического процесса производства деталей, включающего три комплексные операции обработки:

1) с использованием универсального центра обработки (УЦО) — вершина 3, станка с числовым программным управлением (СЧПУ) — вершина 2 — или технологического комплекса с ручным управлением (РУ) — вершина 4;

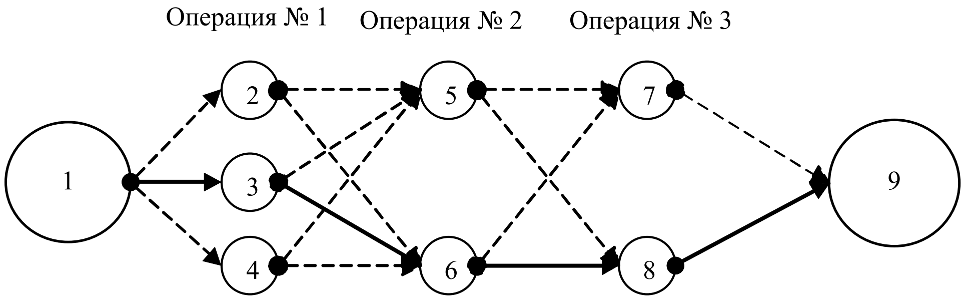
2) с использованием универсального центра обработки при условии его переоснащения инструментальными средствами — вершина 5 — или отдельного станочного комплекса РУ — вершина 6;

3) с использованием технологического оборудования с ручным управлением — вершина 7 — или специализированного станочного оборудования с программным управлением (СОПУ) — вершина 8.

В качестве основного показателя эффективности технологического процесса примем время обработки (T), а в качестве заданных ограничений — затраты на применяемые средства обработки (Θ, в относительных единицах). Результаты предварительного анализа параметров T и Θ приведены в таблице. Общее ограничение по затратам на указанный комплекс операций задано равным $Q = 22$. Начальное эвристическое решение задачи $Z_э$ = (путь α_{14}, α_{45}, α_{58}, α_{89}) $Z = 22$.

Номер операции	Способы реализации операции (вершина графа)	T, мин	Θ, о.е.
1	УЦО (3) СЧПУ (2) РУ (4)	2 3 6	0,9 0,8 0,5
2	УЦО(5) РУ(6)	3 2	0,95 0,8
3	РУ (7) СОПУ (8)	7 3	0,4 0,6

В общем виде задача оптимизации технологического процесса обработки детали аналогична задаче булевого программирования — поиска минимального пути на графе (см. рисунок) при ограничениях $Q = 22$ и $Z = 22$.



В результате анализа модифицированной детерминантной функции det*[α_{19}] с учетом матричного числа α, контурного числа β и матрицы ограничений Θ сформировано 13 возможных путей, однако оптимальный путь один — α_{13}, α_{36}, α_{68}, α_{89} (на графе показан сплошными линиями). Оптимальный путь соответствует значениям бинарных переменных, определяющим оптимальную технологию производства продукции при заданной системе ограничений. Учет этих данных во многом позволяет сократить время расчета оптимального пути реализации технологического процесса. При этом уменьшение количества вычислений и соответственно выигрыш во времени существенно зависят от структуры сети, критичности начального эвристического решения и реализации прогнозируемых вариантов пути на промежуточных этапах его формирования. Именно учет этой системы факторов определяет эффективность предложенной методики по сравнению с существующими.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Выжигин А. Ю.* Гибкие производственные системы. М.: Машиностроение, 2009.

2. *Медведев В. А., Вороненко В. П., Брюханов В. Н.* Технологические основы гибких производственных систем: Учебник для вузов. М.: Высш. школа, 2000.

3. Анализ надежности сложных систем методом обобщенных матричных чисел / *А. И. Губинский, В. Г. Пантелей, Л. В. Разубаева* // Теория и практика надежности вычислительных и радиотехнических устройств. Вильнюс: Моклас,1975. С. 42—48.

4. *Берж К.* Теория графов и ее применения. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

5. *Губинский А. И., Евграфов В. Г.* Эргономическое проектирование судовых систем управления. Л.: Судостроение, 1977.

Сведения об авторах

Сергей Алексеевич Багрецов — д-р техн. наук, профессор; ВКА им. А. Ф. Можайского, кафедра специальных радиотехнических систем

Эдуард Владимирович Мищенко — ВКА им. А. Ф. Можайского, учебно-методический отдел; начальник отделения; E-mail: ed.84@mail.ru

Рекомендована кафедрой специальных радиотехнических систем

Поступила в редакцию 17.09.14 г.

Ссылка для цитирования: *Багрецов С. А., Мищенко Э. В.* Модель управления производственной системой на основе аппарата обобщенных матричных чисел // Изв. вузов. Приборостроение. 2015. Т. 58, № 3. С. 185—189.

THEORETICAL MODEL OF CONTROL OVER PRODUCTION SYSTEM ON THE BASE OF THE GENERALIZED MATRIX VALUE CONCEPT

S. A. Bagrecov, E. V. Mishchenko

A. F. Mozhaysky Military Space Academy, 197198, Saint Petersburg, Russia
E-mail: ed.84@mail.ru

The apparatus of generalized matrix properties is applied to determine the shortest path in the graph. The concept of modified determinant function of matrix number is introduced.

Keywords: shortest path, state graph, optimal production method choice.

Data on authors

Sergey A. Bagrecov — Dr. Sci., Professor; A. F. Mozhaysky Military Space Academy, Department of Special Radio Engineering Systems

Eduard V. Mishchenko — A. F. Mozhaysky Military Space Academy, Training and Methodology Division; Head of the Department; E-mail: ed.84@mail.ru

Reference for citation: *Bagrecov S. A., Mishchenko E. V.* Theoretical model of control over production system on the base of the generalized matrix value concept // Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Priborostroenie. 2015. Vol. 58, N 3. P. 185—189 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2015-58-3-185-189