

## ДИНАМИКА ПРОВОДОВ ЛЭП ПРИ ДВИЖЕНИИ ПО НИМ ДИАГНОСТИЧЕСКОЙ МАШИНЫ

В. В. ЕЛИСЕЕВ, М. Р. БАХРАМИ

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, 195251, Санкт-Петербург, Россия  
E-mail: yeliseyev@inbox.ru

Рассматривается движение диагностической машины-автомата по проводам линии электропередачи. При математическом моделировании движения используется лагранжева механика твердых и упругих тел с применением аппарата компьютерной математики: выявлены пилообразные колебания в вертикальной плоскости и поперечные движения типа параметрического резонанса.

**Ключевые слова:** диагностика проводов ЛЭП, колебания, лагранжева механика, параметрический резонанс, компьютерная математика.

Для исследования динамики проводов линий электропередачи создаются специальные диагностические машины-автоматы (ДМА) [1, 2]. Так, М. Р. Бахрами разработана оригинальная ДМА [3], включающая в себя моторизованные ведущие колеса, „руку“ с захватом и центральную коробку (рис. 1, а). Машина может проходить через различные препятствия на проводах (амортизаторы, зажимы, предупреждающие шары).

Однако работа подобных устройств может быть нарушена вследствие реакции проводов на различные воздействия [4]; например, даже при медленном движении ДМА по проводам возможны опасные колебания, приводящие к ее отказам или разрушению. Это обуславливает необходимость математического моделирования движения ДМА на стадии проектирования, чтобы выбрать приемлемые варианты конструкции машины, снизить затраты на эксперимент и обеспечить безопасность работы персонала.

В настоящей статье представлены результаты по разработке методики моделирования движения ДМА, включающей вывод уравнений динамики машины и решение их средствами компьютерной математики (MathCad). Уравнения выведены на основе механики Лагранжа для твердых и деформируемых тел с применением вариационного исчисления [5].

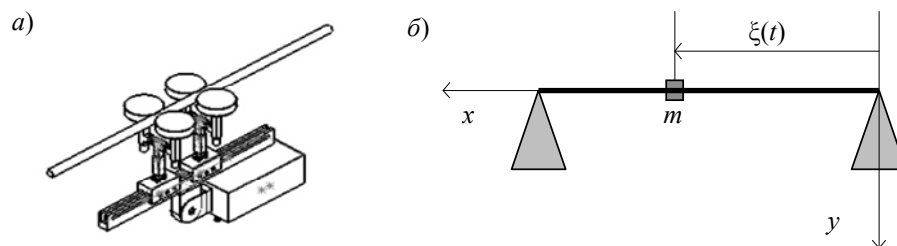


Рис. 1

Допустим, что провод является натянутой струной, ДМА — точечной массой, и движение происходит в вертикальной плоскости  $x, y$  (рис. 1, б).

В известной постановке задачи выражение для прогиба струны  $u(x, t)$  имеет следующий вид:

$$Tu'' + P\delta(x - \xi(t)) = \rho\ddot{u}; \quad x = 0, l: u = 0; \quad t = 0: u = 0, \dot{u} = 0, \quad (1)$$

где  $T$  — сила натяжения струны;  $P = mg$  — вес ДМА;  $\rho$  — погонная масса струны;  $l$  — длина струны; штрих и точка означают дифференцирование по координате  $x$  и времени  $t$ ;  $\xi(t)$  — заданный закон движения нагрузки, причем  $\xi(0) = 0$ .

Выражение (1) представляет собой упрощенную постановку задачи, поскольку в динамике нагрузка может быть направлена не вертикально, и соответственно струна колеблется не в вертикальной плоскости.

Статическому приближению ( $\rho = 0$ ) соответствует условие

$$u = U_S \begin{cases} \frac{x}{\xi}, & x < \xi; \\ \frac{l-x}{l-\xi}, & x > \xi, \end{cases} \quad U_S(\xi) = \frac{P}{T} \left( \frac{1}{\xi} + \frac{1}{l-\xi} \right)^{-1}.$$

Динамическое решение задачи (1) можно найти методом собственных функций. При  $\xi = vt$  (движение ДМА с постоянной скоростью)

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \varphi_n(x); \quad \varphi_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \sin(\lambda_n x), \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{l}; \quad (2)$$

$$u_n = \frac{P}{\lambda_n(v^2 - c^2)} \sqrt{\frac{2}{T\rho l}} \cdot [v \sin(\lambda_n ct) - c \sin(\lambda_n vt)], \quad c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

Как показали расчеты (в среде MathCad), прогиб в точке нагружения  $u(vt, t)$  отличается от квазистатического  $U_S(vt)$  только пилообразными колебаниями струны.

Учтем массу струны. При законе движения  $\xi(t)$  и прогибе струны  $u(x, t)$  имеем следующие выражения для координат, скоростей и ускорений движущейся массы:

$$x = \xi(t), \quad y = u(\xi(t), t) \Rightarrow \dot{x} = \dot{\xi}, \quad \dot{y} = u' \dot{\xi} + \dot{u}, \quad \ddot{x} = \ddot{\xi}, \quad \ddot{y} = u'' \dot{\xi}^2 + u' \ddot{\xi} + 2\dot{u}' \dot{\xi} + \ddot{u}.$$

Используем вариационную методику Лагранжа — Ритца — Канторовича [5]. Обобщенные координаты  $U_i, i=1\dots k$ , вводятся аппроксимацией прогиба  $u(x, t) = \sum_{i=1}^k U_i(t) \varphi_i(x) = U^T(t) \varphi(x)$  (в матричных обозначениях). Координатные функции  $\varphi_i$  заданы такими же, как в уравнениях (2). Удвоенная кинетическая энергия струны при  $\rho \neq 0$  определяется как

$$2K = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \rho \int_0^l \dot{u}^2 dx = m \dot{\xi}^2 + \dot{U}^T [M + \mu(\xi)] \dot{U} + 2\dot{\xi} U^T \eta(\xi) \dot{U} + \dot{\xi}^2 U^T \sigma(\xi) U, \quad (3)$$

где введены матрицы  $M = \int_0^l \rho \varphi \varphi^T dx$ ,  $\mu = m \varphi \varphi^T$ ,  $\sigma = m \varphi' \varphi'^T$ ,  $\eta = m \varphi \varphi'^T$ .

Определив потенциальную энергию

$$\Pi = \frac{1}{2} T \int_0^l u'^2 dx - Pu(\xi, t) = \frac{1}{2} U^T C U - U^T F(\xi), \quad C = T \int_0^l \varphi' \varphi'^T dx, \quad F = P \varphi(\xi) \quad (4)$$

и приняв  $\dot{\xi} = v = \text{const}$ , составим уравнения Лагранжа:

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{U}} \right) - \frac{\partial K}{\partial U} &= - \frac{\partial \Pi}{\partial U}; \\ \frac{\partial K}{\partial \dot{U}} &= (M + \mu) \dot{U} + v \eta^T U; \\ \frac{\partial K}{\partial U} &= v \eta^T \dot{U} + v^2 \sigma U, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial U} &= C U - F \Rightarrow (M + \mu) \ddot{U} + [C + v^2(\eta'(\xi) - \sigma)] U + v[\mu'(\xi) + \eta^T - \eta] \dot{U} = F. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Здесь производные по столбцу — это столбцы из производных по компонентам. Для квадратичных функций имеем  $\partial(U^T C U)/\partial U = 2CU$ . При этом заметим, что  $\eta'(\xi)^T - \sigma = \kappa$ ,  $\kappa(\xi) = m\varphi''^T$ ,  $\mu'(\xi) + \eta^T - \eta = 2\eta$ .

Правую часть последнего уравнения в системе (5) преобразуем к каноническому виду для последующего численного интегрирования ( $\Lambda \equiv (M + \mu)^{-1}$ ):

$$\left. \begin{aligned} \dot{U} &= V, \\ \dot{V} &= \Lambda[F - (C + v^2 \kappa)U - 2v\eta V]. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Важным для последующих расчетов является ускорение точечной массы

$$\begin{aligned} a &= v^2 u'' + 2v\dot{u}' + \ddot{u} = v^2 \varphi''^T U + 2v\varphi'^T \dot{U} + \varphi^T \ddot{U} = \\ &= [v^2 \varphi''^T - \varphi^T \Lambda (C + v^2 \kappa)] U + 2v(\varphi'^T - \varphi^T \Lambda \eta) V + \varphi^T \Lambda F. \end{aligned}$$

Система (6) решается численно (программа Rkadapt в пакете MathCad) при нулевых начальных условиях.

Заданы следующие значения параметров:  $T = 10$  кН,  $P = 1$  кН,  $v = 1$  м/с,  $\rho = 5$  кг/м,  $l = 200$  м, число степеней свободы  $k = 15$ . На рис. 2, а—в соответственно представлены результаты расчета — временные зависимости прогиба струны в нагруженной точке  $U_m(t) \equiv u(vt, t)$ , скорости  $\dot{U}_m$  и ускорения  $\ddot{U}_m$ . Величина прогиба в данном случае сопоставима с решением (2), но скачкообразные изменения скорости, характерные для решения (2), отсутствуют, что является следствием аппроксимации при вариационном подходе.

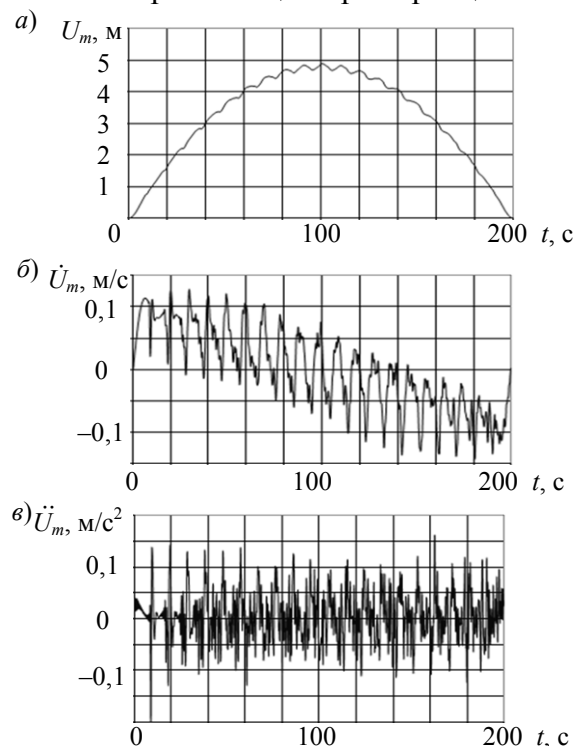


Рис. 2

Резким изменениям скорости соответствуют ударные импульсы сил инерции (переносного движения), возбуждающие параметрические колебания ДМА. Рассмотрим более сложную модель с движущимся по струне физическим маятником (рис. 3).

Координаты и скорость центра масс системы, при прогибах струны  $u_y(x, t), u_z(x, t)$  и угле отклонения  $\theta(t)$  маятника, определяются выражениями

$$\begin{aligned} x &= \xi(t); \quad y = u_y(\xi, t) + \varepsilon \cos \theta; \quad z = u_z(\xi, t) + \varepsilon \sin \theta \Rightarrow \dot{x} = \dot{\xi}; \\ \dot{y} &= u_y' \dot{\xi} + \dot{u}_y - \varepsilon \dot{\theta} \sin \theta; \quad \dot{z} = u_z' \dot{\xi} + \dot{u}_z + \varepsilon \dot{\theta} \cos \theta, \end{aligned}$$

где  $\varepsilon$  — расстояние от центра масс до точки подвеса.

Кинетическая энергия тела

$$\begin{aligned} K_T &= \frac{1}{2}(mv_c^2 + I_c \dot{\theta}^2); \quad v_c^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{\xi}^2(1 + u_y'^2 + u_z'^2) + \dot{u}_y^2 + \dot{u}_z^2 + \varepsilon^2 \dot{\theta}^2 + \\ &+ 2\dot{\xi}(u_y' \dot{u}_y + u_z' \dot{u}_z) + 2\dot{\xi} \varepsilon \dot{\theta}(-u_y' \sin \theta + u_z' \cos \theta) + 2\varepsilon \dot{\theta}(-\dot{u}_y \sin \theta + \dot{u}_z \cos \theta), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $I_c$  — момент инерции относительно центра масс.

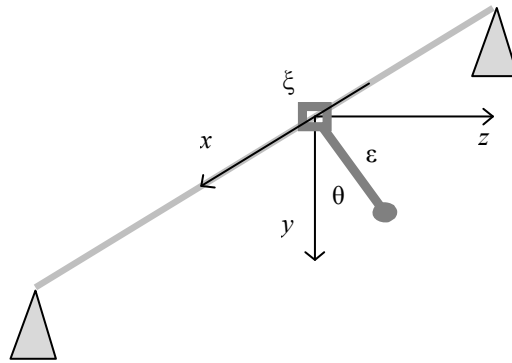


Рис. 3

Уравнения динамики, базирующиеся на выражении вида (7), слишком сложны. Поэтому положим величину  $u_y$  заданной и линеаризуем задачу, считая  $u_z, \theta$  малыми величинами одного порядка. Тогда уравнение (7) преобразуется к виду

$$2K_T = m \left[ \dot{\xi}^2 u_z'^2 + \dot{u}_z^2 + 2\dot{\xi} u_z' \dot{u}_z + 2\dot{\xi} \varepsilon \dot{\theta}(-u_y' \theta + u_z') + 2\varepsilon \dot{\theta}(-\dot{u}_y \theta + \dot{u}_z) \right] + (m\varepsilon^2 + I_c) \dot{\theta}^2 + \dots$$

Используем, аналогично вышеизложенному, вариационный подход:

$$\begin{aligned} u_z(x, t) &= \sum_{i=1}^n U_i(t) \varphi_i(x) = U^T(t) \varphi(x); \quad 2K = \rho \int_0^l (\dot{u}_y^2 + \dot{u}_z^2) dx + mv_c^2 + I_c \dot{\theta}^2 = \\ &= \dot{U}^T (M + \mu(\xi)) \dot{U} + \dot{\xi}^2 U^T \sigma(\xi) U + 2\dot{\xi} U^T \eta(\xi) \dot{U} + \\ &+ 2m\varepsilon \dot{\theta} (\dot{\xi} U^T \varphi'(\xi) + \dot{U}^T \varphi(\xi) - v_m \theta) + (m\varepsilon^2 + I_c) \dot{\theta}^2 + \dots, \end{aligned}$$

где  $v_m \equiv \dot{u}_y + v u_y'$ , а матрицы инерционных характеристик аналогичны принятым в выражении (3).

Потенциальная энергия

$$\Pi = \frac{1}{2} T \int_0^l (u_y'^2 + u_z'^2) dx - mg(u_y(\xi, t) + \varepsilon \cos \theta) = \frac{1}{2} (U^T C U + mg\varepsilon \theta^2) + \dots$$

Составим уравнения Лагранжа ( $\dot{\xi} = v = \text{const}$ ):

$$\left( \frac{\partial K}{\partial \dot{U}} \right) - \frac{\partial K}{\partial U} = - \frac{\partial \Pi}{\partial U}, \quad \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial K}{\partial \theta} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \theta}.$$

Определив производные

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{U}} = (M + \mu)\dot{U} + v\eta^T U + m\varepsilon\dot{\theta}\varphi, \quad \frac{\partial K}{\partial U} = v^2\sigma U + v(\eta\dot{U} + m\varepsilon\dot{\theta}\varphi');$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}} = (m\varepsilon^2 + I_c)\dot{\theta} + m\varepsilon(\dot{U}^T \varphi(\xi) + vU^T \varphi'(\xi) - v_m\theta);$$

$$\frac{\partial K}{\partial \theta} = -m\varepsilon v_m \dot{\theta}; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial U} = CU, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} = mg\varepsilon\theta,$$

перепишем уравнения следующим образом:

$$\begin{aligned} (M + \mu)\ddot{U} + 2v\eta\dot{U} + (v^2\kappa + C)U + m\varepsilon\ddot{\theta}\varphi &= 0, \\ (m\varepsilon^2 + I_c)\ddot{\theta} + m\varepsilon[\varphi^T \ddot{U} + 2v\varphi'^T \dot{U} + v^2\varphi''^T U + (g - a_m)\theta] &= 0, \\ a_m = \dot{v}_m = \ddot{u}_y + 2v\dot{u}'_y + v^2u''_y. \end{aligned}$$

Далее разрешим систему относительно вторых производных; обозначив  $\dot{U} = V$ ,  $\dot{\theta} = \omega$ , запишем систему обыкновенных дифференциальных уравнений в каноническом виде:

$$\dot{Y} = F(t, Y) = A(t)Y; \quad Y \equiv \begin{pmatrix} U \\ V \\ \theta \\ \omega \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{21} = -M_0^{-1}C_0, \quad A_{22} = -2\alpha v M_0^{-1}\eta, \quad A_{23} = \beta \varepsilon M_0^{-1}g_0\varphi,$$

$$A_{41} = \beta(\varphi^T M_0^{-1}C_0 - v^2\varphi''^T), \quad A_{42} = -2v\beta(\varphi'^T - \alpha\varphi^T M_0^{-1}\eta), \quad A_{43} = -\beta g_0(1 + m\beta\varepsilon\varphi^T M_0^{-1}\varphi),$$

$$M_0 \equiv M + \alpha\mu, \quad \alpha \equiv \frac{r_c^2}{\varepsilon^2 + r_c^2}, \quad \beta \equiv \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + r_c^2}, \quad C_0 \equiv C + v^2\alpha\kappa,$$

где  $r_c$  — радиус-вектор центра масс.

Система решается в среде MathCad. На рис. 4, а, б представлены результаты расчета угла  $\theta(t)$  и поперечного смещения  $u_z(vt, t)$  системы при  $\gamma \equiv \varepsilon = r_c = 0,02$  м и принятых выше значениях остальных параметров.

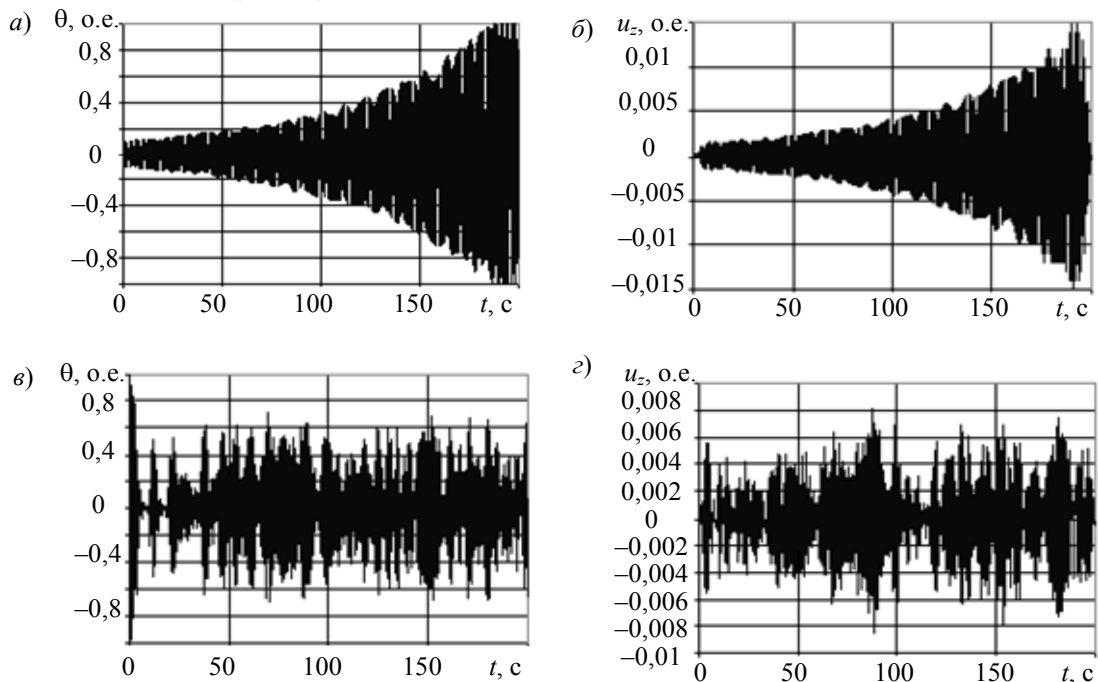


Рис. 4

Характер приведенных зависимостей позволяет говорить о параметрическом резонансе. Это — не классический тип резонанса, поэтому его можно исследовать, только используя аппарат компьютерной математики. В отличие от классического варианта [6], в данном случае отсутствует периодическое возбуждение. Однако при других значениях параметров системы результаты могут качественно измениться. Например, при  $\gamma = 0,2$  наблюдаются ограниченные параметрические колебания, причем значение угла  $\theta$  не превышает начального (рис. 4, в, з). Изменяя значение параметра  $\gamma$ , найдем, что при  $\gamma \approx 0,06$  появляется резонанс: т.е. это значение  $\gamma$  — есть верхняя граница зоны неустойчивости. Несмотря на то, что нижнюю границу определить не удалось, можно утверждать — при уменьшении значения  $\gamma$  резонанс становится более выраженным.

Итак, при математическом моделировании движения ДМА по проводам линии электропередачи выявлены колебания системы — вертикальные пилообразные и поперечные параметрические. Многовариантные расчеты показывают, что параметрического резонанса можно избежать. Представленная методика позволяет построить области устойчивости в пространстве параметров.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Разумовский И. Т.* Пирометр для контроля перегрева скруток проводов линий электропередач // Изв. вузов. Приборостроение. 2011. Т. 54, № 11. С. 43—48.
2. *Toussaint K., Pouliot N., Montambault S.* Transmission line maintenance robots capable of crossing obstacles: state-of-the-art review and challenges ahead // J. of Field Robotics. 2009. N 26(5). P. 477—499.
3. *Bahrami M. R.* A novel design of electrical transmission line inspection machine // Современное машиностроение. Наука и образование. 2014. № 4. С. 292—298.
4. *Гимадиев Р. Ш., Динмухаметов Ф. Ф., Галимуллин Н. Р.* Расчет пространственной динамики ЛЭП при совместном воздействии ветровой и весовой нагрузки // Изв. вузов. Проблемы энергетики. 2010. № 3—4. С. 28—37.
5. *Елисейев В. В.* Механика деформируемого твердого тела. СПб: Изд-во Политехн. ун-та, 2006. 231 с.
6. *Зевин А. А.* К теории параметрических колебаний // Прикладная математика и механика. 2014. Т. 78, № 1. С. 46—59.

#### Сведения об авторах

- Владимир Васильевич Елисейев** — д-р физ.-мат. наук, профессор; СПбГПУ, кафедра машиноведения и основ конструирования; E-mail: yeliseyev@inbox.ru
- Мохаммад Реза Бахрами** — аспирант; СПбГПУ, кафедра машиноведения и основ конструирования; E-mail: mr.bahrami1982@gmail.com

Рекомендована кафедрой  
машиноведения и основ  
конструирования

Поступила в редакцию  
22.12.14 г.

**Ссылка для цитирования:** *Елисейев В. В., Бахрами М. Р.* Динамика проводов ЛЭП при движении по ним диагностической машины // Изв. вузов. Приборостроение. 2015. Т. 58, № 3. С. 229—235.

#### DYNAMIC OF ELECTRICAL TRANSMISSION WIRES AT A DIAGNOSTIC MACHINE MOVEMENT ALONG THE LINE

V. V. Eliseev, M. R. Bahrami

Saint Petersburg State Polytechnical University, 195251, Saint Petersburg, Russia  
E-mail: yeliseyev@inbox.ru

Traveling of an automatic diagnostic machine along electrical transmission line is considered. Mathematical modeling based on Lagrangian mechanics of rigid and flexible bodies is carried out with

the use of computer mathematics software. Saw tooth oscillations of the wires in the vertical plane and transversal movements of the type of a parametric resonance are revealed.

**Keywords:** diagnostic of electrical transmission line, oscillation, Lagrangian mechanics, parametric resonance, mathematical software.

**Data on authors**

- Vladimir V. Eliseev** — Dr. Sci., Professor; Saint Petersburg State Polytechnical University, Department of Machine Science and Mechanical Design;  
E-mail: yeliseyev@inbox.ru
- Mohammad R. Bahrami** — Post-Graduate Student; Saint Petersburg State Polytechnical University, Department of Machine Science and Mechanical Design;  
E-mail: mr.bahrami1982@gmail.com

**Reference for citation:** *Eliseev V. V., Bahrami M. R.* Dynamic of electrical transmission wires at a diagnostic machine movement along the line // *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Priborostroenie.* 2015. Vol. 58, N 3. P. 229—235 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2015-58-3-229-235