

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ МЕТОДА БЫСТРОГО СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Н. Я. МАМЕДОВ¹, Н. Т. АБДУЛЛАЕВ², Г. С. АГАЕВА¹, А. Н. ДЖАФАРОВА¹

¹Азербайджанская государственная нефтяная академия,
AZ1010, Баку, Азербайджан

²Азербайджанский технический университет, AZ1148, Баку, Азербайджан
E-mail: a.namik46@mail.ru

Представлен метод спектрального анализа, предназначенный для цифровой обработки измерительных сигналов. Получены аналитические выражения для относительной погрешности преобразования измерительного сигнала. Получены предельно точные оценки этой погрешности, зависящие от дифференциальных и спектральных свойств измеряемого сигнала. Используя эти оценки, возможно обосновать и обеспечить требуемую точность реализации предложенного метода.

Ключевые слова: спектральный анализ, коэффициенты Фурье, относительная погрешность, шаг дискретизации, анализатор спектра.

Алгоритмы спектрального анализа измерительных сигналов, позволяющие проводить обработку сигнала внутри периода измерения, представляют значительный интерес. Для применения новых алгоритмов спектрального анализа требуется рассчитать погрешности, возникающие при их реализации.

Пусть периодический непрерывный сигнал $y = f(t)$ представлен в виде:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega t}, \quad (1)$$

где $\omega = \frac{2\pi}{T}$, T — период, C_n — комплексные коэффициенты Фурье, определяемые как

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega t} dt. \quad (2)$$

В работе [1] с использованием зависимости $y = f(t)$ определена новая неявная функция

$$y = f(t + \alpha y), \quad (3)$$

где α — малая постоянная величина.

Зависимость (3) определяет y как однозначную неявную функцию от t , если $f(t)$ дифференцируема, имеет ограниченную первую производную и удовлетворяет условию существования и единственности неявной функции

$$|\alpha f'(t)| < 1, \quad (4)$$

при выполнении которого (3) позволяет определить некоторую однозначную функцию вида

$$y = F(t, \alpha). \quad (5)$$

Найти зависимость (5) в явной форме не всегда удается, однако ее можно разложить в ряд Фурье:

$$F(t, \alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n e^{jn\omega t},$$

где $G_n = \frac{1}{T} \int_0^T F(t, \alpha) e^{-jn\omega t} dt$.

В работе [1] определены коэффициенты Фурье G_n для преобразованной функции $F(t, \alpha)$ в явном виде:

$$G_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = C_0, \quad G_n = \frac{1}{2\pi j n \alpha} \int_0^T e^{-jn\omega(t-\alpha f(t))} dt \quad (n \neq 0). \quad (6)$$

Из соотношения (6) следует, что $G_0 = C_0$, это означает, что при выполнении преобразования (3) постоянная составляющая исходного сигнала не меняется.

Для определения спектра сигнала $y = f(t)$ вместо формулы (2) предложено использовать выражение (6) [1], это приводит к качественному изменению структуры анализаторов спектра. Преимущество предлагаемого метода спектрального анализа заключается в возможности обработки информации во время измерения, что не позволяет алгоритм БПФ.

Однако при использовании, согласно предлагаемому методу, выражения (6) необходимо оценить погрешность преобразования, т.е. близость функций $y = f(t)$ и $y = F(t, \alpha)$, а также определить коэффициенты C_n и G_n . Таким образом, должна быть произведена оценка модуля разностей $|F(t, \alpha) - f(t)|$ и $|G_n - C_n|$.

Отметим, что выбором значения α можно получить разность между указанными функциями и коэффициентами меньше любого наперед заданного числа ε . При $\alpha \rightarrow 0$ имеем $\lim_{\alpha \rightarrow 0} F(t, \alpha) = f(t)$ и $\lim_{\alpha \rightarrow 0} G_n = C_n$.

Рассмотрим вопросы, связанные с определением разности $|F(t, \alpha) - f(t)|$.

1. Аналитический способ оценки разности. Приняв замену $\alpha = \frac{1}{k}$, где k — крутизна генератора линейно изменяющегося пилообразного напряжения (ГЛИН), и $y = k\Delta t$, из (3) получаем

$$k\Delta t = f(t + \Delta t). \quad (7)$$

Таким образом, выражение (3) описывает времяимпульсный метод преобразования (ВИП) мгновенных значений исследуемого сигнала $f(t)$.

Как видно из уравнения преобразования, интервал времени Δt пропорционален не мгновенному значению сигнала $f(t)$, а значению $f(t + \Delta t)$ в момент времени $t + \Delta t$. Здесь имеет место динамическая погрешность преобразования второго рода, вызванная изменением величины за время измерения.

К уравнению вида (7) приводятся и другие разновидности развертывающего ВИП, рассмотренные в работах [2, 3].

Оценим погрешность измерения мгновенных значений сигнала $f(t)$ в произвольной точке t , используя рис. 1:

$$EC = \Delta f(t) = f(t + \Delta t) - f(t) = k\Delta t - f(t) = F(t, \alpha) - f(t). \quad (8)$$

Применив формулу конечных приращений Лагранжа [4] к правой части преобразования (7), получим:

$$k\Delta t = f(t) + f'(\eta)\Delta t.$$

Здесь точка η лежит в интервале $(t, t + \Delta t)$. Решив это уравнение относительно $k\Delta t$, находим:

$$k\Delta t = \frac{f(t)}{1 - \frac{1}{k} f'(\eta)}$$

Подставив полученное значение $k\Delta t$ в (8), находим

$$EC = \Delta f(t) = k\Delta t - f(t) = \frac{\frac{1}{k} f'(\eta)}{1 - \frac{1}{k} f'(\eta)} f(t).$$

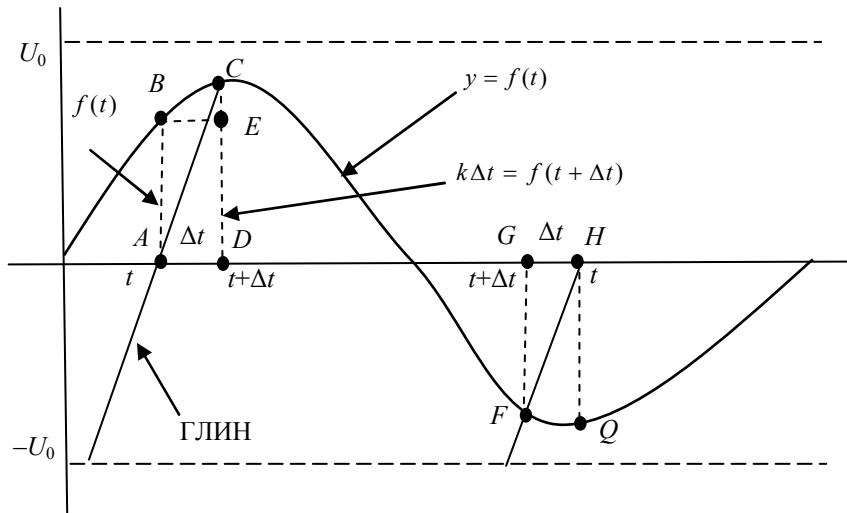


Рис. 1

Отсюда для относительной погрешности измерения мгновенных значений получаем

$$\delta_p(f(t)) = \frac{\Delta f(t)}{f(t)} = \frac{\frac{1}{k} f'(\eta)}{1 - \frac{1}{k} f'(\eta)}. \tag{9}$$

Здесь $\eta \in [0, T]$ и при $|f'(t)| \leq f'_{\max}$ из (9) получаем:

$$|\delta_p(f(t))| = \left| \frac{\Delta f(t)}{f(t)} \right| \leq \frac{\frac{1}{k} |f'(\eta)|}{1 - \frac{1}{k} |f'(\eta)|} \leq \frac{\frac{1}{k} f'_{\max}}{1 - \frac{1}{k} f'_{\max}}.$$

Обозначив $\varepsilon = \frac{1}{k} f'_{\max}$ и учитывая, что удовлетворяется условие (4), можно рассчитать предельную относительную погрешность:

$$\delta_{\text{пр}} = \frac{\frac{1}{k} f'_{\max}}{1 - \frac{1}{k} f'_{\max}} = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}. \tag{10}$$

Очевидно, что условие $|\delta_p(f(t))| \leq \delta_{\text{пр}} = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}$ справедливо при $0 \leq \varepsilon < 1$.

Таким образом, нами получены аналитическое выражение для относительной погрешности измерения мгновенных значений сигнала $f(t)$ и предельно точные оценки этой погрешности.

Если задаются допустимые значения относительной погрешности $\delta_{\text{доп}}$ и f'_{max} , то из условия $\delta_{\text{пр}} \leq \delta_{\text{доп}}$ можно определить значение k , обеспечивающее требуемую допустимую относительную погрешность

$$k = f'_{\text{max}} \left(1 + \frac{1}{\delta_{\text{доп}}} \right).$$

В качестве примера рассмотрим процесс преобразования сигнала с ограниченным спектром вида

$$f(t) = a_{0f} + \sum_{n=1}^N (a_{nf} \cos n\omega t + b_{nf} \sin n\omega t). \quad (11)$$

Для этого сигнала справедливо неравенство Бернштейна [5] применительно к росту производных тригонометрического полинома порядка N , т.е. при $|f(t)| \leq f_{\text{max}}$ получим $|f'(t)| \leq N\omega f_{\text{max}}$. Согласно этому неравенству и выражению (10), для относительной предельной погрешности измерения мгновенного значения сигнала $f(t)$ по ВИП имеем:

$$\delta_{\text{пр}}(y) = \frac{\frac{1}{k} N\omega f_{\text{max}}}{1 - \frac{N\omega f_{\text{max}}}{k}}. \quad (12)$$

В частном случае, когда $f(t) = y_1 \sin(N\omega t + \phi)$, для относительной предельной погрешности получаем

$$\delta_{\text{пр}}(y) = \frac{\frac{1}{k} N\omega y_1}{1 - \frac{N\omega y_1}{k}}. \quad (13)$$

Сравнение (12) и (13) показывает, что для совокупности тригонометрических полиномов N -й степени, удовлетворяющих условию $|f(t)| \leq f_{\text{max}}$, наибольшая предельная погрешность измерения мгновенных значений не превышает погрешности измерения мгновенных значений гармонического сигнала с частотой $N\omega$ и амплитудой $y_1 = f_{\text{max}}$.

При этом для сигналов с ограниченным спектром (11) с параметрами $N, \omega, f_{\text{max}}$ выбор k осуществляется исходя из условия $\delta_{\text{пр}}(y) \leq \delta_{\text{доп}}$ следующим образом:

$$k = \left(1 + \frac{1}{\delta_{\text{доп}}} \right) N\omega f_{\text{max}}.$$

2. Графический способ оценки разности. Для заданной функции $f(t)$ и для различных значений α_1 и α_2 ($\alpha_1 < \alpha_2$) на основании преобразования (3) получена зависимость $y = F(t, \alpha)$, представленная на рис. 2.

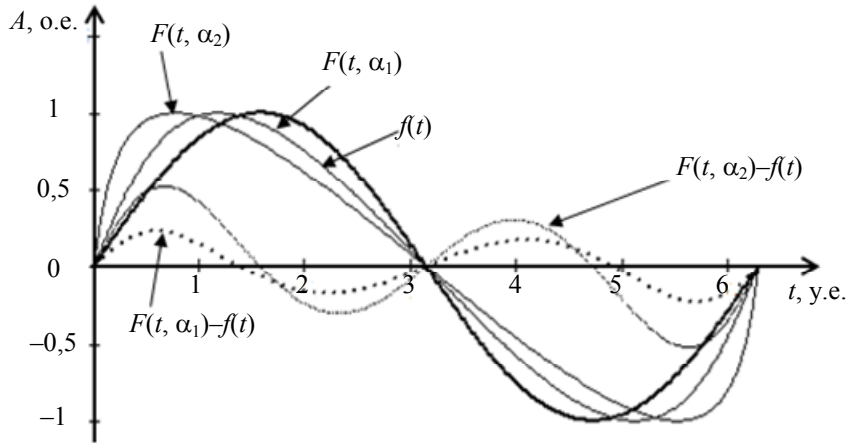


Рис. 2

Из графика видно, что с уменьшением α разность $F(t, \alpha) - f(t)$ также уменьшается и выбором α можно обеспечить любую степень близости графиков.

3. Оценка разности коэффициентов $|G_n - C_n|$.

Используя выражения (2) и (6), получим:

$$G_n - C_n = \frac{1}{T} \int_0^T [F(t, \alpha) - f(t)] e^{-jn\omega t} dt,$$

для модуля разности

$$|G_n - C_n| \leq \frac{1}{T} \int_0^T |F(t, \alpha) - f(t)| |e^{-jn\omega t}| dt.$$

Оценив правую часть, получим

$$|G_n - C_n| \leq \max_{t \in [0, T]} |F(t, \alpha) - f(t)|. \quad (14)$$

Разность правой части выражения (14) была оценена в (8). Таким образом, модуль разности $|G_n - C_n|$ не превышает максимальной погрешности модуля разности преобразованной зависимости $F(t, \alpha)$ и исходной функции $f(t)$.

В общем случае оценка разности $|G_n - C_n|$ зависит от класса сигналов, различающихся дифференциальными и спектральными свойствами.

Оценим эту разность для периодических сигналов, имеющих ограниченную первую производную. С этой целью полученные на основании уравнений (2) и (6) выражения для расчета коэффициентов G_n и C_n проинтегрируем по частям, тогда

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega t} dt = \frac{1}{2\pi j n} \int_0^T f'(t) e^{-jn\omega t} dt, \quad (15)$$

$$G_n = \frac{1}{2\pi j n \alpha} \int_0^T e^{jn\omega(\alpha f(t) - t)} dt = \frac{1}{2\pi j n} \int_0^T e^{jn\omega \alpha f(t)} e^{-jn\omega t} dt = \frac{1}{2\pi j n} \int_0^T f'(t) e^{jn\omega \alpha f(t)} e^{-jn\omega t} dt, \quad (16)$$

откуда

$$G_n - C_n = \frac{1}{2\pi j n \alpha} \int_0^T f'(t) [e^{jn\omega \alpha f(t)} - 1] e^{-jn\omega t} dt. \quad (17)$$

С другой стороны, согласно формуле Лагранжа [4] для конечных разностей, на отрезке $[0, \alpha]$ существует значение β , которое обеспечивает справедливость равенства:

$$e^{jn\omega\alpha f(t)} - 1 = jn\omega\alpha f(t)e^{jn\omega\beta f(t)}.$$

Учитывая это равенство в выражении (17), получим:

$$G_n - C_n = \frac{\alpha}{T} \int_0^T f(t)f'(t)e^{jn\omega[\beta f(t)-t]} dt, \quad (18)$$

отсюда

$$|G_n - C_n| \leq \frac{\alpha}{T} \int_0^T |f(t)f'(t)| \left| e^{jn\omega[\beta f(t)-t]} \right| dt \leq \alpha \max_{t \in [0, T]} |f(t)f'(t)|, \quad (19)$$

тогда

$$|G_n - C_n| \leq \alpha \max_{t \in [0, T]} |f(t)f'(t)|. \quad (20)$$

Таким образом, можно утверждать, что при малых значениях α существует положительная ограниченная величина A , для которой справедливо $|G_n - C_n| \leq A\alpha$. Выбор конкретной величины A зависит от класса исследуемых сигналов. В данном случае $A = \max_{t \in [0, T]} |f(t)f'(t)|$, и выбором α можно обеспечить $G_n \approx C_n$ с любой степенью точности.

Сравним коэффициенты с помощью цифрового моделирования. Для сравнения комплексных коэффициентов Фурье по выражениям (2) и (6) представим их в действительной области. Если обозначить коэффициенты Фурье функции $f(t)$ в действительной области через c_n, d_n , а для функции $F(t, \alpha)$ — через a_n, b_n , можно записать

$$c_n = C_n + C_{-n}, \quad d_n = j(C_n - C_{-n}), \quad (21)$$

$$a_n = G_n + G_{-n}, \quad b_n = j(G_n - G_{-n}). \quad (22)$$

В таком случае выражения (21) и (22) в действительной области будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt, \\ c_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t dt, \\ d_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t dt, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt, \\ a_n &= \frac{1}{\pi n \alpha} \int_0^T \sin [n\omega(\alpha f(t) - t)] dt, \\ b_n &= \frac{1}{\pi n \alpha} \int_0^T \cos [n\omega(\alpha f(t) - t)] dt. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Вычислим коэффициенты Фурье конкретной функции согласно выражениям (23) и (24) и произведем сравнение полученных значений.

Выберем сигнал, спектр которого известен $\left(a_n = b_n = \frac{1}{n^3}, n = \overline{1, 10} \right)$, а его выражение записано в виде

$$f(t) = 1 + \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n^3} (\cos nt + \sin nt).$$

Рассчитанные в математической среде MathCad значения коэффициентов Фурье представлены в таблице, здесь c_n и d_n — значения коэффициентов Фурье, полученные согласно выражению (23), а a_n и b_n — согласно (24).

n	c_n	d_n	a_n	b_n
0	1	—	1	—
1	1	1	0,99999	1
2	0,125	0,125	0,12516	0,12493
3	0,03683	0,03704	0,03687	0,03723
4	0,01563	0,01563	0,01592	0,01562
5	0,008	0,008	0,00801	0,008
6	0,00463	0,00463	0,00464	0,00463
7	0,00292	0,00292	0,00292	0,00291
8	0,00195	0,00195	0,00196	0,00195
9	0,00137	0,00137	0,00137	0,00137
10	0,001	0,001	0,001	0,001

Как видно из таблицы, значения коэффициентов для обоих случаев с высокой точностью совпадают. Значения погрешностей коэффициентов регулируются выбором α .

Использование предложенного метода целесообразно, поскольку, не вычисляя произведение $f(t)e^{-jn\omega t}$, можно упростить аппаратную реализацию и повысить оперативность спектральных анализаторов. Выбором параметра α можно обеспечить требуемую точность функционирования анализатора спектра.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мамедов Н. Я., Абдуллаев Н. Т., Агаева Г. С. Алгоритм спектрального анализа для цифровой обработки измерительных сигналов // Изв. вузов. Приборостроение. 2014. Т. 57, № 7. С. 37—41.
2. Мартяшин А. М., Шахов Э. К., Шляндин В. М. Преобразователи электрических параметров для систем контроля и измерения. М.: Энергия, 1976. 392 с.
3. Лукьянов В. Г. Цифровые измерительные устройства. Электронный учебно-методический комплекс [Электронный ресурс]: <<http://it.fitib.altstu.ru/nend/cin/index.php:doc>>.
4. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. I. М.: Наука, 1970. 608 с.
5. Ахизер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965. 407 с.

Сведения об авторах

- Нураддин Ясин оглы Мамедов** — канд. техн. наук, доцент; Азербайджанская государственная нефтяная академия, кафедра высшей математики; E-mail: mr.nuraddin47@mail.ru
- Намик Таир оглы Абдуллаев** — канд. техн. наук, доцент; Азербайджанский технический университет, кафедра телевидения и радиосистем; E-mail: a.namik46@mail.ru
- Гюнель Сяйавуш гызы Агаева** — аспирант; Азербайджанская государственная нефтяная академия, кафедра информационно-измерительной и компьютерной техники; E-mail: gunel_aso@yahoo.com
- Айнур Нураддин гызы Джафарова** — канд. техн. наук, доцент; Азербайджанская государственная нефтяная академия, кафедра физики

Рекомендована
Азербайджанской государственной
нефтяной академией

Поступила в редакцию
23.12.14 г.

Ссылка для цитирования: Мамедов Н. Я., Абдуллаев Н. Т., Агаева Г. С., Джафарова А. Н. Оценка погрешности метода быстрого спектрального анализа // Изв. вузов. Приборостроение. 2015. Т. 58, № 6. С. 428—435.

ERROR ESTIMATION FOR A FAST METHOD OF SPECTRAL ANALYSIS**N. YA. MAMEDOV¹, N. T. ABDULLAEV², G. S. AGAEVA¹, A. N. DZHAPHAROVA¹**¹*Azerbaijan State Oil Academy,
AZ1010, Baku, Azerbaijan*²*Azerbaijan Technical University, AZ1148, Baku, Azerbaijan
E-mail: a.namik46@mail.ru*

A method of spectral analysis is proposed for digital processing of measuring signals. Theoretical expressions for relative error of measuring signal transformation are derived. Sharp estimates of the error depending on differential and spectral properties of the measured signal are obtained. Application of the estimates makes it possible to justify the proposed method and to assure the desired accuracy of its realization.

Keywords: spectral analysis, Fourier coefficients, relative error, sampling interval, spectral analyzer.

Data on authors

- Nuraddin Ya. Mamedov** — PhD, Associate Professor; Azerbaijan State Oil Academy, Department of Higher Mathematics; E-mail: mr.nuraddin47@mail.ru
- Namik T. Abdullaev** — PhD, Associate Professor; Azerbaijan Technical University, Department of Television and Radio Systems; E-mail: a.namik46@mail.ru
- Gunel S. Agaeva** — Post-Graduate Student; Azerbaijan State Oil Academy, Department of Information-Measuring and Computer Technique; E-mail: gunel_asoa@yahoo.com
- Ainur N. Dzhapharova** — PhD, Associate Professor; Azerbaijan State Oil Academy, Department of Physics

Reference for citation: Mamedov N. Ya., Abdullaev N. T., Agaeva G. S., Dzhapharova A. N. Error estimation for a fast method of spectral analysis // Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Priborostroyeniye. 2015. Vol. 58, N 6. P. 428—435 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2015-58-6-428-435