УДК 519.7
DOI: 10.17586/0021-3454-2015-58-9-707-712

УПРАВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫМИ ОБЪЕКТАМИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ НА БАЗЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО АЛГОРИТМА БЭКСТЕППИНГА

И. Б. Фуртат[1], Е. А. Тупичин[2]

[1]*Университет ИТМО, 197101, Санкт-Петербург, Россия*
Институт проблем машиноведения РАН, 199178, Санкт-Петербург, Россия
Санкт-Петербургский государственный университет, 199034, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: cainenash@mail.ru

[2]*Университет ИТМО, 197101, Санкт-Петербург, Россия*

Предложено решение задачи робастного управления нелинейными объектами с запаздыванием по состоянию. Рассмотрены объекты управления в условиях параметрической неопределенности, действия внешних ограниченных возмущений и измерения только выходной переменной; также изложены условия, при которых нелинейная система с запаздыванием может быть приведена к нормальной форме. Для синтеза алгоритма управления используется модифицированный алгоритм бэкстеппинга (алгоритм обратного обхода интегратора). Процесс синтеза алгоритма управления условно разбивается на n шагов, где n — порядок модели объекта. На каждом шаге синтезируется стабилизирующее управление; на последнем шаге синтезируется основной закон управления, который обеспечивает слежение выходного сигнала объекта управления за гладким эталонным сигналом с требуемой точностью за конечное время. Показано, что для реализации алгоритма достаточно использовать всего один фильтр состояния по сигналу управления и упрощенные законы управления, полученные с использованием реальных дифференцирующих звеньев. Это позволяет существенно упростить расчет и реализацию системы управления. Полученная система управления обладает универсальной структурой по отношению к виду модели объекта управления: линейная, нелинейная, с запаздыванием и без него.

Ключевые слова: *робастное управление, метод бэкстеппинга, нелинейная система, запаздывание.*

Введение. Рассматривается построение системы управления на базе метода бэкстеппинга. Впервые этот метод был предложен в работе [1] для синтеза адаптивного управления нелинейными объектами по выходу. Использование метода позволяет обеспечить в системе управления параметрическую робастность и возможность учета априорной информации о значениях параметров объекта управления. Последнее свойство наглядно продемонстрировано в работе [2], где представлен эффективный алгоритм бэкстеппинга для параметрически неопределенных объектов с измеряемым скалярным выходом. Другие модификации данного метода рассмотрены, например, в работах [3—5]. Однако предложенные в работах [1—5] методы сложны при аналитическом расчете системы управления и ее технической реализации. Сложность аналитических расчетов заключается в громоздкости вычислений полной производной по времени от стабилизирующих сигналов управления. Трудности, возникающие при технической реализации системы, связаны с большим количеством компонентов и фильтров ее состояния, необходимых для формирования закона управления.

В настоящей статье предложен модифицированный алгоритм бэкстеппинга для робастного управления параметрическими неопределенными объектами с запаздыванием. Показано, что в отличие от схем, рассмотренных в работе [6], в предлагаемой системе управления реализуется всего один фильтр размерности, равной порядку модели объекта, а для вычисления производных стабилизирующих сигналов управления используются реальные дифференцирующие устройства. Данный результат является обобщением алгоритмов, представленных в работах [7—9].

Постановка задачи. Рассмотрим математическую модель объекта управления:

$$\dot{x}(t) = f\left(x(t), x(t-\tau), \xi\right) + b\left(x(t), \xi\right)\left(u(t) + \varphi\left(x(t), t\right)\right); \tag{1}$$

$$y(t) = h\left(x(t)\right), \quad x(s) = \sigma(s), \quad s \in [-\tau; 0],$$

где $x(t) \in X \subset R^n$ — вектор состояния; $u(t) \in R$ — управляющее воздействие; $y(t) \in Y \subset R$ — регулируемая переменная; $t \in T \subset (0, \infty)$; $f(x(t), x(t-\tau), \xi)$, $b(x, \xi)$ и $h(x)$ — гладкие функции соответствующих размерностей; $\xi \in \Xi$ — вектор неизвестных параметров; Ξ — известное ограниченное множество; $\tau > 0$ — неизвестное время запаздывания; $\varphi(x(t), t)$ — неизвестная функция; $\sigma(s)$ — кусочно-непрерывная функция на отрезке $[-\tau, 0]$.

Необходимо синтезировать закон управления, обеспечивающий выполнение целевого условия

$$\left|y(t) - y_{\text{м}}(t)\right| < \delta \text{ для } t > t_f, \tag{2}$$

где $\delta > 0$, $y_{\text{м}}(t)$ — эталонный сигнал, $t_f > 0$ — время переходного процесса.

Введем следующие обозначения:

$$L_f^1 h(x) = \frac{\partial h(x)}{\partial x} f\left(x, x(t-\tau), \xi\right), \; L_f^n h(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x(t-i\tau)}\left(L_f^{n-1} h\right) f\left(x(t-i\tau), x(t-(i+1)\tau), \xi\right);$$

$$L_b h(x) = \frac{\partial h(x)}{\partial x} b\left(x, \xi\right), \; L_b L_f^1 h(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(L_f^1 h\right) b\left(x, \xi\right) + \frac{\partial}{\partial x(t-\tau)}\left(L_f^1 h\right) b\left(x(t-\tau), \xi\right)\delta(\tau);$$

$$L_b L_f^{n-1} h(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x(t-i\tau)} b\left(x(t-i\tau), \xi\right)\delta(\tau), \; \beta_i = \frac{\partial}{\partial x(t-i\tau)} b\left(x(t-i\tau), \xi\right).$$

Здесь $L_f^1 h(x)$, $L_b h(x)$ — производные Ли от функции $h(x)$ по направлению векторных полей $f(x, x(t-\tau), \xi)$, $b(x, \xi)$; $\delta(i\tau)$ — оператор смещения на величину $i\tau$ (например, $\delta(i\tau)u(t) = u(t-i\tau)$).

Введем вектор $z(t)$, определяемый как

$$z = \left[y, \dot{y}, ..., y^{(n-1)}\right]^T = \left[h(x), L_f^1 h(x), ..., L_f^{n-1} h(x)\right]^T = \Phi\left(x(t), x(t-\tau), ..., x(t-(n-1)\tau)\right).$$

Если выполнены условия

$$L_b h(x) = L_b L_f h(x) = ... = L_b L_f^{n-2} h(x) = 0,$$

$$\beta\left(x, x(t-\tau), ..., x(t-(n-1)\tau), \xi\right) = L_b L_f^{n-1} h(x) \neq 0,$$

то уравнение (1) может быть преобразовано к системе следующего вида:

$$\dot{z}_1(t) = z_2(t);$$

$$\vdots$$

$$\dot{z}_{n-1}(t) = z_n(t),$$

$$\dot{z}_n(t) = L_f^n h(x) + L_b L_f^{n-1} h(x)\left(u(t) + \varphi\left(x(t), t\right)\right).$$

П р е д п о л о ж е н и е 1. Функции $f(x(t), x(t-\tau), \xi)$, $b(x, \xi)$, $h(x)$ — гладкие, и для любых $x(t)$, $x(t-\tau)$ и $\xi \in \Xi$ выполнены следующие условия:

$$L_b h(x) = L_b L_f^1 h(x) = ... = L_b L_f^{n-2} h(x) = 0,$$

где $L_f^1 h(x) = \dfrac{\partial h(x)}{\partial x} f\left(x, \xi\right)$, $L_b h(x) = \dfrac{\partial h(x)}{\partial x} b\left(x, \xi\right)$ — производная Ли от функции $h(x)$ по направлению векторных полей $f(x, \xi)$, $b(x, \xi)$ соответственно.

Производные высших порядков вычисляются по формулам

$$L_f^2 h(x) = \frac{\partial\left(L_f h(x)\right)}{\partial x} f(x, \xi), \ldots, L_f^k h(x) = \frac{\partial\left(L_f^{k-1} h(x)\right)}{\partial x} f(x, \xi).$$

Предположение 2. Функция Φ взаимно-однозначная при $x(t - i\tau) = 0$, $i = 0, \ldots, n - 1$.

Предположение 3. Разностные уравнения $\varphi\left(x(t), x(t-\tau), \ldots, x\left(t-(n-1)\tau\right)\right) = 0$, $\sum_{i=0}^{n-1} \beta_i u(t - i\tau) = 0$ асимптотически устойчивые относительно переменных $x(t)$ и $u(t)$.

Предположение 4. Функция $c(x, x(t-\tau), \ldots, x(t-(n-1)\tau), \xi) = L_f^n h(x)$ ограниченная или ограниченная на множестве Ξ и липшицева по $x(t - i\tau)$, $i = 0, \ldots, n - 1$.

Предположение 5. Функция $\varphi(x(t), t)$ ограниченная или ограниченная на множестве T и липшицева по $x(t) \in X$.

Предположение 6. Сигналы $y_{\text{м}}(t)$, $\dot{y}_{\text{м}}(t), \ldots, y_{\text{м}}^{(n)}(t)$ — ограниченные.

Аналогичные предположения рассмотрены в работе [10].

Метод решения. Продифференцируем n раз функцию $y(t)$:

$$p^n y(t) = c(x, x(t-\tau), \ldots, x(t-(n-1)\tau), \xi) +$$
$$+\beta\left(x, x(t-\tau), \ldots, x(t-(n-1)\tau), \xi\right)\left(u(t) + \phi\left(x, t\right)\right), \quad (3)$$

где $p = d / dt$ — оператор дифференцирования.

С учетом выражения (3) запишем уравнение ошибки $e_1(t) = y(t) - y_{\text{м}}(t)$ в виде

$$p^n e_1(t) = c(x, x(t-\tau), \ldots, x(t-(n-1)\tau), \xi) +$$
$$+\beta\left(x, x(t-\tau), \ldots, x(t-(n-1)\tau), \xi\right)\left(u(t) + \phi\left(x, t\right)\right) - p^n y_{\text{м}}(t). \quad (4)$$

Введем в рассмотрение оператор $Q_{n-1}(p) = \sum_{i=0}^{n-1} k_{n-i} p^i$, такой что полином $Q(\lambda) = \lambda^n + Q_{n-1}(\lambda)$ гурвицев, где λ — комплексная переменная, и перепишем уравнение (4) в виде

$$Q(p) e_1(t) = u(t) + \psi\left(t\right), \quad (5)$$

где

$$\psi(t) = c(x, x(t-\tau), \ldots, x(t-(n-1)\tau), \xi) + \beta\left(x, x(t-\tau), \ldots, x(t-(n-1)\tau), \xi\right)\varphi\left(x, t\right) +$$
$$+\left(\beta\left(x, x(t-\tau), \ldots, x(t-(n-1)\tau), \xi\right) - 1\right)u(t) - p^n y_{\text{м}}(t) - Q_{n-1}(p) e(t). \quad (6)$$

Рассмотрим фильтр

$$\dot{v}(t) = A_0 v(t) + l u(t), \quad (7)$$

где $v(t) = \left[v_1(t), v_2(t), \ldots, v_n(t)\right]^T$, $A_0 = \begin{bmatrix} -k_1 & & & \\ -k_2 & & I_{n-1} & \\ \vdots & & & \\ -k_n & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$, $I_{n-1} \in R^{(n-1)\times(n-1)}$ — единичная матрица, $l = [0, \ldots, 0, 1]^T$.

Перепишем уравнение (5) с учетом выражения (7):

$$e_1(t) = v_1(t) + Q^{-1}(p)\psi\left(t\right). \quad (8)$$

Дифференцируя (8), получаем

$$\dot{e}_1(t) = -k_1 v_1(t) + v_2(t) + \tilde{f}(t), \quad (9)$$

где $Q(p)\tilde{f}(t) = p\psi\left(t\right)$.

Представим процедуру синтеза системы управления следующим алгоритмом.

Шаг 1. Определим $v_2(t)$ в виде $v_2(t) = U_1(t)$ и зададим $U_1(t)$ как

$$U_1(t) = -\alpha_1\mu^{-1}e_1(t) + k_1 v_1(t), \tag{10}$$

где $\alpha_1 > 0$ и $\mu > 0$ — коэффициенты, выбираемые разработчиком.

Подставив (10) в выражение (9), получим

$$\dot{e}_1(t) = -\alpha_1\mu^{-1}e_1(t) + \tilde{f}(t)\,. \tag{11}$$

Шаг i ($2 \le i \le n-1$). Рассмотрим функцию ошибки $e_i(t) = v_i(t) - U_{i-1}(t)$. Взяв производную от $e_i(t)$ вдоль траекторий (5), получим

$$\dot{e}_i(t) = -k_i v_1(t) + v_{i+1}(t) - \dot{U}_{i-1}(t)\,. \tag{12}$$

Предположим, что функция $v_{i+1}(t)$ — сигнал управления в уравнении (12). Пусть $v_{i+1}(t) = U_i(t)$, тогда

$$U_i(t) = -\alpha_i e_i(t) + k_i v_1(t) + \bar{U}_{i-1}(t)\,, \tag{13}$$

где $\alpha_i > 0$ — коэффициент, выбираемый разработчиком, $\bar{U}_{i-1}(t)$ — оценка сигнала $\dot{U}_{i-1}(t)$.

Подставив (13) в выражение (12), получим

$$\dot{e}_i(t) = -\alpha_i e_i(t) - \eta_{i-1}(t)\,, \tag{14}$$

где $\eta_{i-1}(t) = \dot{U}_{i-1}(t) - \bar{U}_{i-1}(t)$.

Шаг n. Рассмотрим функцию $e_n(t) = v_n(t) - U_{n-1}(t)$. Принимая во внимание уравнение (7) и дифференцируя $e_n(t)$, получаем

$$\dot{e}_n(t) = -k_n v_1(t) + u(t) - \dot{U}_{n-1}(t)\,. \tag{15}$$

Сформируем закон управления

$$u(t) = -\alpha_n e_n(t) + k_n v_1(t) + \bar{U}_{n-1}(t)\,, \tag{16}$$

где $\alpha_n > 0$ — коэффициент, выбираемый разработчиком, $\bar{U}_{n-1}(t)$ — оценка функции $\dot{U}_{n-1}(t)$, с учетом которого перепишем выражение (15):

$$\dot{e}_n(t) = -\alpha_n e_n(t) - \eta_{n-1}(t)\,, \tag{17}$$

где $\eta_{n-1}(t) = \dot{U}_{n-1}(t) - \bar{U}_{n-1}(t)$.

Для оценки производных $\dot{U}_{i-1}(t)$, $i = \overline{2, n}$, воспользуемся следующими наблюдателями

$$\dot{\bar{U}}_{i-1}(t) = -\mu^{-1}\bar{U}_{i-1}(t) + \mu^{-1}\dot{U}_{i-1}(t)\,,\ i = \overline{2, n}\,. \tag{18}$$

Утверждение. Пусть выполнены предположения 1—6. Тогда существуют константы $\alpha_i > 0$, $i = \overline{1, n}$, и $\mu_0 > 0$, такие что для $\mu \le \mu_0$ система управления, состоящая из фильтра (7), вспомогательных управляющих воздействий (10), (13), закона управления (16) и наблюдателей (18), обеспечивает выполнение целевого условия (2) для объекта (1).

Доказательство утверждения аналогично приведенному в работах [6—9].

Заключение. Предложен алгоритм слежения выходного сигнала нелинейного объекта управления с запаздыванием за эталонным сигналом в условиях параметрической неопределенности и внешних возмущений. Синтез алгоритма базируется на новой версии метода бэкстеппинга, предложенного в работе [6]. Полученная система управления содержит всего один фильтр размерности, равной размерности модели объекта, а для реализации производных в законах управления используются реальные дифференцирующие звенья.

Статья подготовлена по результатам работы, выполненной при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 13-08-01014), Министерства образования и науки РФ (проект 14.Z50.31.0031) и Правительства РФ (грант 074-U01); результаты, приведенные в разделе „Метод решения“, получены при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-29-00142) в ИПМаш РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kanellakopoulos I., Kokotović P. V., Morse A. S.* Systematic design of adaptive controllers for feedback linearezable systems // IEEE Trans. Automatic Control. 1991. Vol. 36. P. 1241—1253.
2. *Никифоров В. О.* Адаптивное и робастное управление с компенсацией возмущений. СПб: Наука, 2003.
3. *Khalil H. K.* Nonlinear Systems. N. Y.: Prentice Hall, 2002.
4. *Zheng Y., Yang Y.* Adaptive output feedback control for class of nonlinear systems with unknown virtual control coefficients signs // Adaptive Control and Signal Processing. 2007. Vol. 21, N 1. P. 77—89.
5. *Tanner H. G., Kyriakopoulos K. J.* Backstepping for nonsmooth systems // Automatica. 2003. Vol. 39. P. 1259—1265.
6. *Фуртат И. Б.* Модифицированный алгоритм обратного обхода интегратора // Мехатроника, автоматизация, управление. 2009. № 10. С. 2—7.
7. *Furtat I. B., Tupichin E. A.* Modified simple adaptive-robust backstepping algorithm // Proc. of the 19th Intern. Conf. on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR 2014), Międzyzdroje, Poland. 2014. P. 183—188.
8. *Furtat I. B., Tupichin E. A.* Modified robust backstepping algorithm for plants with time delay // Proc. of the 6th Intern. Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT), St. Petersburg, Russia. 2014. P. 541—545.
9. *Furtat I. B., Tupichin E. A.* Control of nonlinear plant based on modified robust backstepping algorithm // Proc. of IEEE Intern. Conf. on Control Applications (CCA), Antibes, France. 2014. P. 941—946.
10. *Цыкунов А. М.* Робастное управление с компенсацией возмущений. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012.

Сведения об авторах

Игорь Борисович Фуртат — д-р техн. наук, профессор; Университет ИТМО, кафедра систем управления и информатики, профессор; ИПМаш РАН, лаборатория управления сложными системами, ведущий научный сотрудник; СПбГУ, кафедра прикладной кибернетики, ведущий научный сотрудник; E-mail: cainenash@mail.ru

Евгений Александрович Тупичин — аспирант; Университет ИТМО, кафедра систем управления и информатики; E-mail: tupichin@mail.ru

Рекомендована лабораторией управления сложными системами ИПМаш РАН

Поступила в редакцию 22.04.15 г.

Ссылка для цитирования: *Фуртат И. Б., Тупичин Е. А.* Управление нелинейными объектами с запаздыванием на базе модифицированного алгоритма бэкстеппинга // Изв. вузов. Приборостроение. 2015. Т. 58, № 9. С. 707—712.

MODIFIED BACKSTEPPING ALGORITHM FOR CONTROL OVER NONLINEAR PLANTS WITH DELAY

I. B. Furtat[1], E. A. Tupichin[2]

[1]*ITMO University, 197101, Saint Petersburg, Russia*
Institute of Problems of Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, 199178, Saint Petersburg, Russia
Saint Petersburg State University, 199034, Saint Petersburg, Russia
E-mail: cainenash@mail.ru

[2]*ITMO University, 197101, Saint Petersburg, Russia*

A solution to the robust control problem of nonlinear plants with a state delay is proposed. The plants under control are considered to possess unknown parameters; the plants are subject to external disturbances, and only output signal are measurable. The conditions for such a nonlinear system to be reducible to the normal form are formulated. The modified backstepping algorithm is used for the control algorithm synthesis. It is shown that implementation of the algorithm calls for the use of only one filter by the control signal and simplified control laws, and therefore calculations and implementation of the control system may be simplified. The obtained system is shown to possess a universal structure independent of the plant model – linear, nonlinear, with or without delay.

Keywords: robust control, backstepping method, nonlinear system.

Data on authors

Igor B. Furtat — Dr. Sci., Professor; ITMO University; Department of Computer Science and Control Systems; IPME RAS, Laboratory Control of Complex Systems; Saint Petersburg State University, Department of Applied Cybernetics; E-mail: cainenash@mail.ru

Evgeny A. Tupichin — Post-Graduate Student; ITMO University; Department of Computer Science and Control Systems; E-mail: tupichin@mail.ru

For citation: *Furtat I. B., Tupichin E. A.* Modified backstepping algorithm for control over nonlinear plants with delay // Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Priborostroenie. 2015. Vol. 58, N 9. P. 707—712 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2015-58-9-707-712