

АНАЛИЗ СКАЛЯРНЫХ ПОЛЕЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ*

В. А. ПОДЧУКАЕВ

*Саратовская государственная юридическая академия, 410028, Саратов, Россия
Институт проблем точной механики и управления РАН, 410028, Саратов, Россия
E-mail: sstu85@yandex.ru*

Изложены начала анализа скалярных полей динамических систем применительно к телу-точке и абсолютно твердому телу. Доказано, что пространство решений динамической системы (или фазовое пространство) является скалярным полем в виде гиперсферы со смещающимся (подвижным) или неподвижным центром относительно неподвижной точки на поверхности гиперсферы, заданной вектором начальных состояний. Показано, что движение скалярного поля носит возвратно-поступательный характер, т.е. является ретроградным по отношению к движению в пространстве состояний, дополненным в случае смещенного центра гиперболической составляющей его движения. Показано, что при неподвижном центре движение скалярного поля наделено свойством обычной дихотомии Перрона, и оговорены условия, при которых для случая смещенного центра имеет место экспоненциальная дихотомия Перрона. Введены в рассмотрение такие скрытые параметры скалярных полей, как постоянная и переменная массы и сила Лоренца, подтверждающие законы сохранения кинетической энергии и импульса и эффект намагничивания при движении абсолютно твердого тела.

Ключевые слова: скалярное поле, гиперсфера, смещенный центр, „выколота“ точка, скрытый параметр, возвратно-поступательное движение смещенного центра.

ВВЕДЕНИЕ

Основоположник философской школы диалектики древнегреческий философ Зенон Элейский (V век до н. э.) [1] не менее известен своими более чем 40 апориями (греч. *aporia*, здесь *a* — отрицание, *poria* — выход), из которых до наших дней дошли лишь две (они напоминают загадки Юношеской математической школы).

Стрела Зенона (в теоретической физике называемая „стрелой времени“) — „летающая стрела в каждый фиксированный момент времени занимает равное себе положение, то есть покоится. А поскольку она покоится во все моменты времени, то не существует момента времени, в который она совершает движение“.

Дихотомия Зенона или закон Ахиллеса и черепахи (от греч. *dichotomia*: *dich* — на две части; + *tome* — сечение) — „чтобы пройти путь, нужно сначала пройти половину пути. А чтобы пройти половину пути, нужно сначала пройти половину этой половины. И так до бесконечности. То есть движение никогда не начнется“.

* Статья написана по заказу редакционной коллегии.

Своими апориями Зенон Элейский утверждал, что любая естественно-научная картина мира не может быть сконструирована без противоречий.

Эти апории Зенона определили вектор развития науки на тысячелетия вперед. Так, в эпоху Возрождения „стрелу Зенона“ Галилей облек в форму принципа относительности, ныне носящего его имя, о неразличимости покоя и движения в фазовом пространстве [2]. И только в середине XX в. принцип относительности Галилея был преодолен существующим в теории наблюдаемости понятием неполной наблюдаемости движения в случае одного измерения.

В общей теории относительности Эйнштейна понятие покоя распространено на понятие энергии посредством введения понятия „энергия покоя“ [3], вобравшего в себя апорию покоящейся стрелы Зенона.

Если наделить фазовое пространство R^n формой сферы, тогда центр сферы будет началом отсчета по пространству, что осуществлено в рамках известной гипотезы Пуанкаре (являющейся второй составляющей 16-й проблемы Гильберта [4]), утверждающей, что образом 4-мерного пространства состояний $R^3 \times [0, \infty)$ является сфера в пространстве R^3 , задаваемая четырьмя параметрами: началом отсчета и радиус-вектором, соединяющим начало координат с точкой начального состояния, определяемой тремя проекциями на оси координат.

Начало отсчета по времени в фазовом пространстве предложено в работе [5], где в развитие гипотезы Пуанкаре доказано, что в соответствии с формализмом аналитической геометрии образом пространства состояний любой размерности в фазовом пространстве (на единицу меньшей размерности) является скалярное поле в виде гиперсферы. Этой гиперсфере принадлежит изображающая точка всякого решения динамической системы в пространстве состояний. В зависимости от свойств симметрии динамической системы указанная гиперсфера может иметь либо смещенный (подвижный), либо несмещенный (неподвижный) центр. При этом носителем начала отсчета по времени является вектор центра смещения гиперсферы.

В работе [5] в параметрически зависящем от времени виде получены уравнения движения смещенного центра. В работе [6, с. 19, теорема 1] траектория движения смещенного центра отождествлена с покоящейся стрелой Зенона (или стрелой времени), что позволило преодолеть первую апорию Зенона за счет того, что на каждом фиксированном временном интервале наблюдения эта траектория движения имеет разную длину, равную длине „нити в клубке“ фазового портрета динамического хаоса. Тем самым, в отличие от покоящейся стрелы Зенона постоянной длины, стрела времени в каждый фиксированный момент времени имеет разную длину, что означает преодоление первой апории.

Целью статьи является преодоление второй апории Зенона.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СКАЛЯРНЫХ ПОЛЕЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Векторное поле динамических систем, описываемых обыкновенными неоднородными дифференциальными уравнениями, зададим уравнением

$$\dot{x} = f(x, t, F), \quad x \in R^n, \quad f \in R^n, \quad F \in R^n, \quad t \in [0, \infty), \quad t_0 \geq 0, \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

где x — вектор состояний; $f(x, t, F)$ — заданный на полуоси $[t_0, \infty)$ n -мерный вектор; F — заданный на полуоси $[t_0, \infty)$ ограниченный ненулевой вектор внешних воздействий; t — время (независимая переменная); t_0 — заданный начальный момент времени; x_0 — заданный вектор начальных состояний.

Будем полагать, что правая часть уравнения (1) во всем пространстве состояний $R^n \times [0, \infty)$ в отсутствие внешних воздействий удовлетворяет обычным предположениям о

существовании единственного решения $x(t, t_0, x_0)$, проходящего через точку (t_0, x_0) , не являющуюся состоянием равновесия, т.е. динамическая система неасимптотически устойчива по Ляпунову.

Отметим, что решение уравнения (1), обозначенное как $x(t, t_0, x_0, F)$, обращает его в тождество

$$\dot{x}(t, t_0, x_0, F) \equiv f[x(t, t_0, x_0, F), t, F]. \quad (2)$$

При $F \equiv 0$ уравнения (1) и (2) описывают свободное движение.

Использование понятия функциональных матриц [7, 8] или матриц Якоби, упорядоченных посредством процедуры Е. А. Барбашина [9, с. 47]), позволяет канонически представить правую часть уравнения (1) в виде суммы кососимметрической и симметрической матриц:

$$\dot{x} = \frac{[P(x, t)]_{(8)} - [P^T(x, t)]_{(*)}}{2} x + \frac{[P(x, t)]_{(8)} + [P^T(x, t)]_{(*)}}{2} x + F. \quad (1a)$$

Как доказано в работе [5], в общем случае некососимметрической матрицы $[P(x, t)]_{(*)}$ векторное поле (1) пространства состояний $R^n \times [0, \infty)$ в фазовом пространстве R^n порождает скалярное поле в виде гиперсферы со смещенным центром, которой принадлежит изображающая точка всякого решения уравнения (1):

$$x^T(t, t_0, x_0, F)x(t, t_0, x_0, F) + 2G^T[x(t, t_0, x_0, F), x_0]x(t, t_0, x_0, F) = x_0^T x_0, \quad (3)$$

где $G[x(t, t_0, x_0, F), x_0] \in R^n$ — обозначение вектора центра смещения гиперсферы (3), движение которого подчинено алгебраическому уравнению

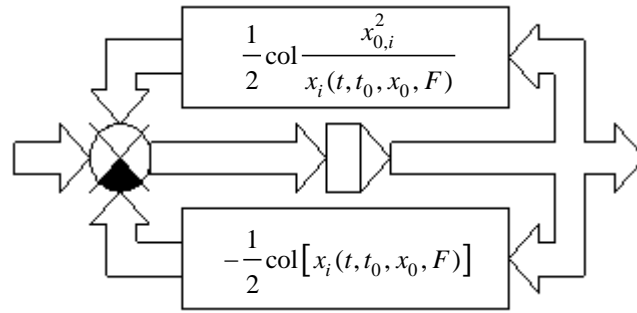
$$G[x(t, t_0, x_0, F), x_0] = -\frac{1}{2} \text{col} \left[x_1(t, t_0, x_0, F) - \frac{x_{0,1}^2}{x_1(t, t_0, x_0, F)}, \dots \right. \\ \left. \dots, x_n(t, t_0, x_0, F) - \frac{x_{0,n}^2}{x_n(t, t_0, x_0, F)} \right], \quad G[x(t, t_0, x_0, F), x_0] \in R^n. \quad (4)$$

Из уравнения (4) видно, что в точках смены знака компонентами вектора состояний соответствующие им компоненты вектора центра смещения имеют бесконечные разрывы второго рода, в силу чего в этих точках отсутствует принадлежность изображающей точки решения уравнения (1) гиперсфере (3).

При последующем изложении будем использовать теорему о геометрии общего решения нестационарных линейных систем [10], согласно которой класс области возможных состояний в пространстве R^n однозначно определяется заданием класса области возможных начальных условий. При этом границами области возможных состояний являются гиперквадрики того же класса, что и соответствующие им гиперквадрики, ограничивающие область возможных начальных условий.

Структурная схема, характеризующая обратную связь в интеграторе или встречно-параллельное движение* первой компоненты вектора центра смещения гиперсферы (4) в пространстве возможных состояний [10], представлена на рисунке.

* В дальнейшем, там где это необходимо, движение в прямом направлении будем обозначать нижним индексом (+) в круглых скобках, а движение в направлении, обратном прямому, — нижним индексом (-).



Лемма 1. Уравнение (3) — суть не что иное, как теорема Пифагора.

Доказательство. Теорема Пифагора ($a^2 + b^2 = c^2$) с помощью „квадрата суммы“ бинома Ньютона ($n = 2$) допускает дуальное представление в виде

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \rightarrow a^2 + b^2 = -2ab = c^2.$$

Аналогичное представление можно получить, записав уравнение (3) для центральной гиперсферы с переменным радиусом

$$\begin{aligned} & x_0^T x_0 + G^T [x(t, t_0, x_0, F), x_0] G [x(t, t_0, x_0, F), x_0] = \\ & = \{x(t, t_0, x_0, F) + G [x(t, t_0, x_0, F), x_0]\}^T \{x(t, t_0, x_0, F) + G [x(t, t_0, x_0, F), x_0]\} \end{aligned} \quad (3a)$$

или используя евклидову норму скалярного произведения векторов:

$$\|x_0\|^2 + \|G [x(t, t_0, x_0, F), x_0]\|^2 = \|x(t, t_0, x_0, F) + G [x(t, t_0, x_0, F), x_0]\|^2, \quad (3б)$$

где $\|x_0\| = \text{const}$, $\|G [x(t, t_0, x_0, F), x_0]\| = \text{var}$ — катеты, $\|x(t, t_0, x_0, F) + G [x(t, t_0, x_0, F), x_0]\| = \text{var}$ — гипотенуза. ■

Исторический экскурс. Источником теоремы Пифагора (VI век до н.э.) является равнобедренный арифметический треугольник:

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & 28 & & \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 & 56 & & & \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 & & & & \\ 1 & 6 & 21 & 56 & & & & & \\ 1 & 7 & 28 & & & & & & \\ 1 & 8 & & & & & & & \\ 1 & & & & & & & & \end{array} \right).$$

Здесь первая строка и первый столбец — катеты, а соединяющая их диагональ — гипотенуза, сумма чисел которой равна 2^{n-1} , где n — натуральное число.

Теорема Пифагора является частным случаем теоремы Ферма для натуральных чисел i, j, k, p (при $p = 2$) при условиях, что $i = j$ — катеты, k — гипотенуза арифметического треугольника:

$$i^p + j^p = k^p. \quad (5)$$

В общем случае произвольного p алгебраическое уравнение (5) имеет неединственное решение, поскольку число неизвестных в нем равно четырем, а условие, которому они подчиняются, всего одно (недоопределенность).

Обратная задача Ферма. Итак, пусть натуральное число $\rho > 2$ задано. Поскольку арифметический прямоугольный треугольник Пифагора является равнобедренным, доопределим теорему Ферма равенством

$$i = j, \quad (5a)$$

позволяющим представить правую часть уравнения (5) в виде

$$2i^\rho = k^\rho \rightarrow k = i\sqrt[\rho]{2}. \quad (5b)$$

В этом случае вырождение теоремы Ферма в лемму сформулируем как следующую лемму.

Лемма 2. Для $\forall \rho > 2$ $k = i\sqrt[\rho]{2}$, т.е. $i = j$ — натуральные числа, а k — иррациональное число.

Противоречие 1. $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \sqrt[\rho]{2} = 1 \rightarrow i = j = k$ — натуральные числа.

Лемма 3. Асимптотические свойства арифметического корня степени ρ из „двух“ означают, что равнобедренный прямоугольный треугольник Пифагора в уравнении Ферма (5) при $\rho \rightarrow \infty$ трансформируется в равносторонний треугольник со сторонами $i = j = k$.

Интерпретация точек разрыва второго рода в векторе центра смещения. Точки, в которых компоненты вектора центра смещения имеют бесконечные разрывы второго рода, названы „выколотыми“, поскольку центральная гиперсфера (3a) с переменным радиусом в этих точках „лопается“ в силу бесконечно большого катета $\|G[x(t, t_0, x_0, F), x_0]\| = \text{var}$.

Интерпретация „выколотых“ точек может быть двойкой: во-первых, как дельта-функций Дирака с поправкой на то, что они возникают и исчезают не в нулевой момент времени, а в момент времени, соответствующий смене знака той или иной компоненты вектора состояний; вторую интерпретацию „выколотых“ точек представим в форме леммы.

Лемма 4. „Выколотая“ точка является точкой, предшествующей переходу изображающей точки решения уравнения (4) на другую ветвь равнобочной гиперболы.

Доказательство. Пренебрегая первым слагаемым в равенстве (4) в пренебрежимо малой окрестности „выколотой“ точки, уравнение любой компоненты вектора центра смещения можно представить как

$$g_i[x(t, t_0, x_0, F), x_0] \approx \frac{x_{0,i}^2 / 2}{x_i(t, t_0, x_0, F)},$$

которое известно как уравнение равнобочной гиперболы или обратно пропорциональной зависимости. ■

Когда векторное поле (1) порождает скалярное поле с несмещенным центром

$$x^T(t, t_0, x_0)x(t, t_0, x_0) \equiv x_0^T x_0, \quad (6)$$

единственным исключением является случай свободного движения динамической системы (при отсутствии внешних воздействий), при котором функциональная матрица правой части уравнения (1) является кососимметрической, т.е. удовлетворяет условию $P(x, t) = -P^T(x, t)$ [11, с. 100, лемма].

Лемма 5. Уравнение (6) — суть не что иное, как функция Ляпунова в виде квадрата евклидовой нормы $x^T(t, t_0, x_0)x(t, t_0, x_0) = \|x(t, t_0, x_0)\|^2 \equiv x_0^T x_0 = \|x_0\|^2$ в силу свободного движения динамической системы, наделенного свойством неасимптотической устойчивости тривиального решения по Ляпунову, или обычная дихотомия Перрона [12].

Связанные определения дихотомии по Перрону и их конкретизация в настоящей статье сведены в таблицу. Отметим, что экспоненциальной дихотомии (3), (4) посвящен отдельный раздел статьи.

Определение по Перрону	Конкретизация	Основание (источник)
Объект — неоднородная НЛС: $\dot{x} = P(t)x + F, x \in R^n$	Уравнение (1а)	Принцип линейного включения Былова — Гробмана [7, с. 8—13]
Разбиение пространства состояний: $R^{n+1} = R^m + R^{n+1-m}$	$R^{n+1} = R_0^1 + R^n$, где R_0^1 — пространство возможных начальных состояний	[12]
Разбиение пространства состояний таково, что: $x(t_0, x_0) \in R^m \rightarrow$ $\rightarrow \ x(t, t_0, x_0, F)\ \leq K \ x(\tau)\ \exp[-\alpha(t - \tau)],$ $t \geq \tau \geq 0;$ $x(t_0, x_0) \in R^{n+1-m} \rightarrow$ $\rightarrow \ x(t, t_0, x_0, F)\ \leq L \ x(\tau)\ \exp[-\beta(\tau - t)],$ $\tau \geq t \geq 0$	Прямое направление движения Обратное направление движения	Интеграл Коши НЛС [10, автоморфизм]
Обыкновенная дихотомия: $\alpha = \beta = 0$	Уравнение (6)	—
Экспоненциальная дихотомия	Уравнение (3)	—

НЕПОДВИЖНАЯ ТОЧКА СКАЛЯРНЫХ ПОЛЕЙ

Теорема 1. Изображающая точка начального состояния динамической системы в фазовом пространстве является неподвижной (покоится в виде точки начального состояния на поверхности гиперсферы), а сама гиперсфера и ее смещенный центр совершают около этой точки обратное (ретроградное) движение по отношению к движению в пространстве состояний.

Доказательство.

Гиперсфера со смещенным (подвижным) центром. Второе слагаемое левой части уравнения (3) и аналитическое представление движения вектора центра смещения (4) воплощают дихотомию Зенона. Встречно-параллельное движение смещенного центра (4) определяется алгебраической суммой половины пути движения в обратном направлении и половины пути гиперболического движения, а подстановка этих величин в уравнение (3) обеспечивает возвращение движения вектора центра смещения в начальное состояние фазового пространства, т.е. превращает (3) в тождество

$$x_0^T x_0 \equiv x_0^T x_0,$$

свидетельствующее о неподвижности (покое) точки x_0 начального состояния на поверхности гиперсферы.

Гиперсфера с несмещенным (неподвижным) центром. Вращение скалярного поля в виде гиперсферы (6) с несмещенным центром описывается ротором угловых скоростей $\omega_i, i = 1, n$, который для кососимметрической матрицы размером $n \times n$ имеет вид

$$\text{rot}P = -2\text{col}[\omega_1, \dots, \omega_n],$$

что следует из определения ротора.

Приведенное выражение можно трактовать как дихотомию Зенона применительно к вращению. Обратное вращение с удвоенной угловой скоростью возвращает гиперсферу в начальное состояние:

$$x^T(t, t_0, x_0)x(t_0, t_0, x_0) \equiv x_0^T x_0. \quad \blacksquare$$

СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ СВОБОДНОГО ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА-ТОЧКИ

Тело-точку можно описать уравнением

$$\dot{x} = P[x, x] = \text{col}[x_1, x_2, x_3], x \in R^3 \times [0, \infty), x(0) = x_0, \quad (7)$$

где P — в рассматриваемом случае заданная матрица чисел в форме Фробениуса с нулевой нижней строкой, введя следующие обозначения осей декартовой системы координат: x_1 — путь, x_2 — скорость, x_3 — ускорение.

Проинтегрировав это уравнение, получим

$$x_3(t, 0, x_{30}) = x_{30}, \quad (8)$$

$$x_2(t, 0, x_{20}) = x_{20} + x_{30}t, \quad (8a)$$

$$x_1(t, 0, x_{10}) = x_{10} + x_{20}t + \frac{1}{2}x_{30}t^2. \quad (8б)$$

Все равенства, содержащие время в качестве сомножителя, на полуоси времени отождествимы (в силу неустойчивости по Ляпунову) с химерой, известной под названием „вечный двигатель“, но эти равенства имеют право на существование на конечном отрезке времени.

В общем случае, когда все начальные состояния отличны от нуля, правая часть уравнения (8б) для пути в фазовом пространстве описывает параболу закона свободного падения, а правая часть уравнения (8a) для скорости описывает монотонно возрастающую функцию, определяющую равномерное прямолинейное движение с постоянной скоростью, численно равной ускорению свободного падения.

Противоречие 2. Трансляционное, по определению с позиций механики, движение компоненты x_2 является спинорным по своему физическому содержанию, равно как неустойчивость по Ляпунову и „вечный двигатель“ физически представляют собой обороты по окружности, вписанной в сферу.

На основании уравнений (8a), (8б) эти движения могут быть классифицированы как естественные по Аристотелю, т.е. как порожденные возмущением начальных условий, а не силами инерции или гравитации.

В отношении сил гравитации Эйнштейн высказал предположение, что „гравитация есть геометрическое свойство пространства-времени“ (см. обзор В. Г. Турышева [13, с. 17]). Наглядным доказательством этого предположения является парабола для $x_1(t, 0, x_{10})$ в уравнении (8). Иными словами, предположение Эйнштейна верно с поправкой на то, что причиной искривления в „пространстве-времени“ является не гравитация, а геометрия фазового пространства, представляющего собой скалярное поле в виде сферы (имеющей постоянную кривизну) со смещенным центром:

$$x^T(t, t_0, x_0)x(t, t_0, x_0) + 2G^T[x(t, t_0, x_0), x_0]x(t, t_0, x_0) = x_0^T x_0, x \in R^3.$$

В поле, в дополнение к постоянной кривизне сферы $\chi_1 = 1/\sqrt{x_{10}^2 + x_{20}^2 + x_{30}^2} = \text{const}$, искривление порождено гиперболической составляющей возвратно-поступательного движения 1-й и 2-й компонент вектора центра смещения:

$$G[x(t, t_0, x_0), x_0] = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_{10} + x_{20}t + \frac{1}{2}x_{30}t^2 - \frac{x_{10}^2}{x_{10} + x_{20}t + \frac{1}{2}x_{30}t^2} \\ x_{20} + x_{30}t - \frac{x_{20}^2}{x_{20} + x_{30}t} \\ x_{30} - \frac{x_{30}^2}{x_{30}} \equiv 0 \end{pmatrix}.$$

Вектор $G[x(0, 0, x_0), x_0] = \text{col}(0, 0, 0)$ в момент $t_0 = 0$ определяет начала отсчета как по времени, так и по пространству, а заданными начальными условиями x_0 определяется радиус $\|x_0\|$ сферы.

Отметим, что на основе понятия вектора центра смещения можно объяснить „эффект Доплера“, наблюдаемый радиотелескопами как „эффект красного смещения“, и „печальное“ (по определению акад. А. Ю. Ишлинского) ретроградное смещение перигелия Меркурия.

Кинематические конструкции движения скалярных полей динамических систем.

Максвелл, один из основателей теории автоматического управления, первым описал электромагнитное поле, используя такие кинематические конструкции Гамильтона, как ротор (*rot*) и дивергенция (*div*). Им же введено понятие градиента (*grad*), позволяющее в известной мере обойтись без численного интегрирования уравнений движения динамических систем.

Важнейшей заслугой Максвелла является описание спинорного (вращательного) движения скалярных полей с помощью ротора. Ось вращения для каждой компоненты ротора совпадает с соответствующей осью координат фазового пространства. Знаки ненулевых компонент ротора указывают направление вращения: прямое (+) — по часовой стрелке — и обратное (–) — против часовой стрелки. Равенство нулю какой-либо компоненты ротора свидетельствует о том, что угловая скорость этой компоненты равна нулю, а движение описывается линейными скоростями.

Приведем формулы для расчета этих конструкций с использованием обозначений $p_{ij}, i, j = \overline{1, 3}$, для элементов функциональной матрицы $P(x, t)$ векторного поля (1) в пространстве R^3 :

1) индикатор наличия или отсутствия внутренних источников ($\text{div} > 0$) или стоков ($\text{div} < 0$) кинетической энергии движения (здесь *sp* — след матрицы):

$$\text{div}P(x, t) = \text{sp}P(x, t) = p_{11} + p_{22} + p_{33};$$

2) индикатор спинорного движения гиперсферы (индикатор вращения):

$$\text{rot}P(x, t) = \text{col}[p_{32} - p_{23}; p_{13} - p_{31}; p_{21} - p_{12}];$$

3) индикатор знака и величины производных от компонент вектора состояний:

$$\text{grad}P(x, t) = \text{col}[p_{11}, p_{22}, p_{33}].$$

Градиент каждой производной от соответствующей компоненты вектора состояний ставит ей во взаимно-однозначное соответствие уравнение свободного движения по этой компоненте

$$dx_i / dt = p_{ii}(x, t)x_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad x_i(t_0) = x_{i0},$$

которое при $p_{ii} = \text{const}$ имеет решение $x_i(t, t_0, x_{i0}) = \exp(p_{ii}t)x_{i0}$, при $p_{ii} = p_{ii}(t) = \text{var}$ — решение $x_i(t, t_0, x_{i0}) = \left[\exp\left(\int_{t_0}^t p_{ii}(\tau) d\tau\right) \right] x_{i0}$, а при $p_{ii}[x(t, t_0, x_0, F), t]$ — решение $x_i(t, t_0, x_{i0}, F) = \left\{ \exp\left[\int_{t_0}^t (p_{ii}(x(\tau, t_0, x_0), \tau)) d\tau\right] \right\} x_{i0}$.

Эти решения позволяют общее решение для каждой компоненты вектора состояний записать в аналитическом виде.

Применительно к свободному движению тела-точки (7) указанные выше конструкции имеют вид: $\text{div}P = 0$, $\text{rot}P = \text{col}[-1; 0; -1]$, $\text{grad}P = \text{col}[0; 0; 0]$. Это означает, что движение тела-точки не имеет внутренних источников и стоков кинетической энергии в силу нулевой дивергенции.

Ненулевые компоненты ротора свидетельствуют о вращении вокруг осей x_1 и x_3 в направлении, обратном вращению в прямом направлении, в плоскостях (x_2, x_3) и (x_1, x_2) соответственно. Равенство нулю 2-й компоненты ротора свидетельствует о вращательном движении по окружности вокруг оси ускорений x_3 в плоскости (x_1, x_2) в направлении, совпадающем с направлением линейной скорости по оси x_2 .

Понятие градиента позволяет описать решение в аналитической форме, что демонстрируют равенства (8)—(8б), полученные при интегрировании уравнения (7).

Таким образом, в отличие от пространства состояний, где движение ассоциируется с движением во времени изображающей точки решения динамической системы, в фазовом пространстве движется само пространство, являющееся пространством решений динамической системы. Это пространство представляет собой скалярное поле в виде гиперсферы со смещенным центром. Гиперсфера задается началом координат и радиус-вектором начального состояния x_0 . Гиперсфера вращается начиная с момента времени t_0 . Ось вращения по каждой компоненте вектора состояний задается соответствующей ей осью декартовой системы координат, а направление вращения задается знаком соответствующей компоненты ротора.

СКАЛЯРНЫЕ ПОЛЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ 3-ГО ПОРЯДКА

Рассчитаем указанные выше кинематические конструкции применительно к уравнениям Эйлера свободного движения абсолютно твердого тела (АТТ) [14] в связанной системе координат (x — продольная ось, y — горизонтальная или боковая ось, z — вертикальная ось), аттрактору Лоренца (при отсутствии внешних воздействий) [6] и аттрактору Ресслера (при наличии внешних воздействий) [15].

В уравнениях Эйлера трансляционное движение центра масс рассчитаем как

$$dv/dt = [P_{11}(\omega)]_{(*)} v, v = \text{col}[V_x, V_y, V_z], t_0 \geq 0, v(t_0) = v_0, \quad (9)$$

$$P_{11}(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{pmatrix},$$

а спинорное движение вокруг центра масс — как

$$d\omega/dt = P_{22}(\omega)\omega, \omega = \text{col}[\omega_x, \omega_y, \omega_z], t_0 \geq 0, \omega(t_0) = \omega_0, I = \text{col}[I_x, I_y, I_z], \quad (10)$$

$$P_{22}(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{(I_y - I_z)\omega_z}{2I_x} & \frac{(I_y - I_z)\omega_y}{2I_x} \\ \frac{(I_z - I_x)\omega_z}{2I_y} & 0 & \frac{(I_z - I_x)\omega_x}{2I_y} \\ \frac{(I_x - I_y)\omega_y}{2I_z} & \frac{(I_x - I_y)\omega_x}{2I_z} & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом для уравнения (9)

$$\operatorname{div}P_{11}(\omega) = 0 \rightarrow \text{нет внутренних источников и стоков};$$

$$\operatorname{grad}P_{11}(\omega) = \operatorname{col}[0; 0; 0]; \quad \operatorname{rot}P_{11}(\omega) = \begin{pmatrix} -2\omega_x \\ -2\omega_y \\ -2\omega_z \end{pmatrix},$$

а для уравнения (10)

$$\operatorname{div}P_{22}(\omega) = 0 \rightarrow \text{нет внутренних источников и стоков};$$

$$\operatorname{grad}P_{22}(\omega) = \operatorname{col}[0; 0; 0],$$

$$\operatorname{rot}P_{22}(\omega) = \begin{pmatrix} \frac{(I_x - I_y)\omega_x}{2I_z} - \frac{(I_z - I_x)\omega_x}{2I_y} \\ \frac{(I_y - I_z)\omega_y}{2I_x} - \frac{(I_x - I_y)\omega_y}{2I_z} \\ \frac{(I_z - I_x)\omega_z}{2I_y} - \frac{(I_y - I_z)\omega_z}{2I_x} \end{pmatrix}.$$

Уравнение для аттрактора Лоренца имеет вид

$$P(x, t) = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 50 & -1 & -x_1 \\ \frac{1}{2}x_2 & \frac{1}{2}x_1 & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

При этом

$$\operatorname{div}P(x, t) = -13\frac{2}{3} \rightarrow \text{есть внутренний сток};$$

$$\operatorname{grad}P(x, t) = \operatorname{col}\left[-10; -1; -\frac{8}{3}\right],$$

$$\operatorname{rot}P(x, t) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}x_1 \\ -\frac{1}{2}x_2 \\ 40 \end{pmatrix}.$$

Аттрактор Ресслера может быть представлен как

$$P(x, t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0,38 & 0 \\ \frac{1}{2}x_3 & 0 & \frac{1}{2}x_1 - 1,2 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

$$F = (0 \ 0 \ 0,38).$$

При этом

$$\operatorname{div}P(x, t) = -0,82 + \frac{1}{2}x_1 \rightarrow \text{для } x_1 > 1,64$$

есть внутренний источник, в противном случае — внутренний сток;

$$\operatorname{grad}P(x, t) = \operatorname{col} \left[0; 0,38; \frac{1}{2}x_1 - 1,2 \right],$$

$$\operatorname{rot}P(x, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 - \frac{1}{2}x_3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Проанализируем, в какой мере представленные конструкции позволяют обойтись без решения уравнений динамических систем в пространстве состояний.

Уравнения Эйлера. Векторные поля абсолютно твердого тела порождены спинорным движением вокруг центра масс, поскольку функциональные матрицы движений $P_{11}(\omega)$, $P_{22}(\omega)$ определены решениями уравнения, описывающего это движение.

Оба скалярных поля, соответствующие векторным, имеют форму сферы, что позволяет отождествить их с шарообразными „волчками“, параметры вращения которых определяются соответствующими роторами с той разницей, что „волчок“ спинорного движения центра масс имеет неподвижный (несмещенный) центр вращения

$$v^T(t, t_0, v_0)v(t, t_0, v_0) \equiv v_0^T v_0, \quad (13)$$

а „волчок“ спинорного движения вокруг центра масс — подвижный (смещенный) центр вращения (см. формулу (4))

$$\omega^T(t, t_0, \omega_0)\omega(t, t_0, \omega_0) + 2G^T[\omega(t, t_0, \omega_0), \omega_0]\omega(t, t_0, \omega_0) = \omega_0^T \omega_0. \quad (14)$$

Для сферы (13) с несмещенным центром нет „выколотых“ точек.

Особенность движения центра масс заключается в том, что кососимметрическая матрица $P_{11}(\omega)$ определена решениями уравнения движения вокруг центра масс. При этом осью вращения для каждой компоненты вектора состояний в пространства R^3 является совпадающая с ней по номеру ось фазового пространства, направление вращения которой обратно вращению в пространстве состояний. Обратное вращение сферы описывается ротором удвоенных угловых скоростей (взятых с обратным знаком относительно вращений в пространстве состояний).

Скалярное поле свободного движения вокруг центра масс (при нулевом векторе внешних воздействий) порождено некососимметрической функциональной матрицей $P_{22}(\omega)$ и представляет собой сферу со смещенным центром (3), (4).

В „выколотых“ точках центра смещения G сферы (14), как видно из уравнения (4), может происходить смена знака соответствующих компонент вектора угловых скоростей, вследствие чего происходит обращение компоненты вектора центра смещения в дельта-функцию Дирака.

При этом после прохождения „выколотой“ точки знак угловой скорости соответствующей компоненты вектора состояний меняется, что означает переход на другую ветвь гиперболы и приводит к изменению параметров ротора. Тем самым до следующей „выколотой“ точки скалярное поле (14) вновь можно отождествить с шарообразным „волчком“ со смещенным центром (но уже отличающимся от предыдущего в силу изменившегося ротора).

Вышесказанное распространяется и на аттракторы Лоренца и Ресслера.

Аттрактор Лоренца. Все три компоненты ротора отличны от нуля, причем первые две компоненты в явном виде зависят от совпадающих по номеру компонент вектора состояний, в отличие от третьей компоненты, которая является положительным числом. Численное интегрирование уравнений Лоренца [6] показывает, что первые две компоненты вектора состояний являются знакопеременными функциями, а третья — знакопостоянна (положительна). Иными словами, аналитическое представление компонент ротора коррелирует со знаками компонент вектора состояний в части, касающейся их знакопеременности или знакопостоянства.

Фазовое пространство аттрактора Лоренца представляет собой сферу со смещенным центром (3), (4), движение которой можно отождествить со сложным движением шарообразного „волчка“, совершающего обратные истинному вращения как по часовой, так и против часовой стрелки в силу знакопеременности 1-й и 2-й компонент ротора, смещенный центр которого также совершает возвратно-поступательное движение.

Аттрактор Ресслера. Анализ компонент ротора показывает, что 1-я (нулевая) компонента не совершает спинорного движения в фазовом пространстве и движение осуществляется с линейной скоростью; 3-я компонента ротора свидетельствует о знаковоположительности 3-й компоненты вектора состояний, поэтому 2-я компонента ротора удовлетворяет неравенству $\left(-1 - \frac{1}{2}x_3\right) < 0$. Тем самым вращение происходит только в одну сторону и является обратным движению в пространстве состояний.

Фазовое пространство аттрактора Ресслера представляет собой сферу со смещенным центром (3), (4), движение которой можно отождествить со спинорным движением шарообразного „волчка“, совершающего обратное вращение в одну сторону, и смещенный центр которого совершает сложное возвратно-поступательное движение.

Параллель с квантовой механикой. Сложное движение скалярного поля, имеющего вид гиперсферы со смещенным центром, от одной „выколотой“ точки до следующей за ней описывается ротором. На временном отрезке между соседними „выколотыми“ точками знак компонент ротора не меняется. Это позволяет отождествить интервал между двумя „выколотыми“ точками с „квантом движения“.

ЭФФЕКТ СКРЫТЫХ ПАРАМЕТРОВ

В уравнениях движения динамических систем с постоянной массой она, как правило, не содержится в качестве параметра вследствие того, что при выводе этих уравнений из первого закона динамики Эйлера в случае свободного движения этот параметр можно сократить (см. например, [6, 16]). При этом масса становится „скрытым параметром“ [16].

Скалярное поле (14) трансляционного движения центра масс АТТ определено уравнением движения вокруг центра масс. Придать этому полю физический смысл поля кинетической энергии можно, умножив (13) на скрытый параметр $m/2$. Результатом умножения будет тождество, в правой части которого содержится кинетическая „энергии покоя“ по Эйнштейну [3]:

$$\frac{mv^T(t, t_0, v_0)v(t, t_0, v_0)}{2} \equiv \frac{mv_0^T v_0}{2}. \quad (13a)$$

Теорема 2. Тожество (13а) — суть не что иное, как закон сохранения кинетической энергии трансляционного движения абсолютно твердого тела.

Доказательство. Правая часть выражения (13а) описывает начальное состояние кинетической энергии абсолютно твердого тела, предшествующее трансляционному движению. Применительно к скалярному случаю $v \in R^1$ правая часть (13а) совпадает с формулой Эйнштейна [3] „энергии покоя“. Левая часть этого равенства описывает изменения кинетической энергии собственно трансляционного движения. Сумма энергий движения и покоя дает полную кинетическую энергию, причем энергия покоя равна энергии трансляционного движения, что подтверждается принципом покоящейся стрелы Зенона (принципом относительности Галилея о неразличимости покоя и движения). ■

Отметим, что говорить о законе сохранения кинетической энергии спинорного движения вокруг центра масс не представляется возможным, во-первых, в силу существования „выколотых“ точек, где равенство (14) не имеет места, и, во-вторых, из-за того, что после прохождения каждой „выколотой“ точки меняются параметры вращения вследствие изменившегося ротора. Этими параметрами могут быть ось вращения и направление вращения, в дополнение к которым возможно изменение момента инерции.

Уравнения Эйлера свободного движения АТТ — один из немногих примеров, где присутствуют такие смежные понятия, как: 1) кинетическая энергия трансляционного движения, 2) масса (скаляр) $m = \text{const} > 0$ и 3) кинетическая „энергия покоя“ трансляционного движения по Эйнштейну [3].

Если дополнить эйлерову механику понятием дивергенции Гамильтона, то естественной причиной движения (в случае положительной дивергенции) является переменная масса $m(t) = \text{var} > 0$ (внутренний источник движения), идентифицируемая дивергенцией или суммой диагональных элементов матрицы Якоби. Покажем это на примере тела-точки (или односпиновой частицы эйлеровой механики), в которой переменная масса занимает нулевой объем.

Отметим, что рассматриваемый ниже пример дает ответ на вопрос: „Что есть масса?“, инициированный в отношении постоянной массы в работе [17].

Первый закон динамики Эйлера сформулируем (без использования понятия движущей силы) в следующем виде: „Скорость изменения количества движения (названного Декартом импульсом) тела-точки равна скорости подвода количества движения к телу-точке“.

В условиях отсутствия подвода запишем уравнение баланса количества движения, приравняв к нулю результат взятия первой производной по времени от количества движения (массы $m(t)$, умноженной на ее скорость \dot{z} , где $z(t, t_0, z_0)$ — координата текущего положения массы):

$$d[m(t)\dot{z}]/dt = \dot{m}(t)\dot{z} + m(t)\ddot{z} = 0. \quad (15)$$

На языке теории автоматического управления уравнение баланса количества движения — это уравнение свободного движения в форме „вход—выход“ (с нулевым „входом“). В форме Коши это уравнение может быть записано двумя возможными способами: 1) по выходу z , 2) по выходу $m(t)$.

Способ 1. Введя обозначения $x_1 = z$, $x_2 = \dot{z}$, запишем уравнение баланса количества свободного движения в форме „вход—выход“ по выходу z :

$$\dot{x} = [P(t)]_{(*)}x, \quad x = \text{col}[x_1, x_2], \quad t \in [0, \infty), \quad t_0 \geq 0, \quad x(t_0) = x_0, \quad (16)$$

где

$$P(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\dot{m}(t)}{m(t)} \end{pmatrix},$$

а нижним индексом (*) в скобках обозначено дополнительное уравнение скорости изменения массы

$$\dot{m}(t) = f[m(t), t_0, m_0], \quad (16a)$$

решение которого задает область значений параметров $m(t)$ и $\dot{m}(t)$ и в котором зашифрована природа источника внутренней энергии движения, здесь не уточняемая.

Более глубокое изложение смысла дополнительного уравнения (16a) содержится в работе [11, гл. 1].

Отметим, что без задания уравнения (16a) система уравнений (16) не доопределена, поскольку не определена область значений параметров $m(t)$ и $\dot{m}(t)$, вследствие чего система (16) имеет неединственное решение.

Способ 2. Дополнительное уравнение (16a) получим на основании уравнения баланса количества свободного движения в форме „вход—выход“ (16) по выходу $m(t)$ (для $\dot{z} \neq 0$):

$$\dot{m}(t) = -\frac{\ddot{z}}{\dot{z}} m(t), m(t_0) = m_0,$$

откуда следует

$$m(t) = m(t, t_0, m_0) = \exp\left(-\int_{t_0}^t \frac{\ddot{z}(\tau)}{\dot{z}(\tau)} d\tau\right) m_0 = \exp\left(\int_t^{t_0} dz\right) m_0 = \frac{\exp(z_0)}{\exp[z(t, t_0, z_0)]} m_0. \quad (17)$$

Как видно из формулы (17), масса прямо пропорциональна экспоненте ее начального положения и обратно пропорциональна экспоненте текущего положения. Для того чтобы разность между текущим и начальным положениями массы соответствовала пути, пройденному в процессе движения, областью значений z должна быть полуось $z \in [0, \infty)$. После доопределения уравнения (16a), как видно из (17), масса убывает на отрезке $m(t) \in [m_0, 0)$, а скорость ее изменения удовлетворяет неравенству $\dot{m}(t) < 0$. Вследствие этого дивергенция системы уравнений (16) оказывается подчиненной неравенству $\operatorname{div}P(t) = \operatorname{sp}P(t) = -\frac{\dot{m}(t)}{m(t)} > 0$,

которое является математической формализацией существования внутреннего источника движения, его функцию выполняет убывающая масса.

В свете изложенного решения систему уравнений (16) можно записать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} x_2(t, t_0, x_{20}) &= \exp\left[-\int_{t_0}^t \frac{dm(\tau)}{m(\tau)}\right] x_{20} = \exp\left[\ln|m(t)|_{t_0}^t\right] x_{20} = \exp\left[\ln|m(t_0)| - \ln|m(t)|\right] x_{20} = \\ &= \frac{\exp(\ln|m_0|)}{\exp[\ln|m(t)|]} x_{20} = \frac{m_0}{m(t)} x_{20}, \\ x_1(t, t_0, x_{10}) &= x_{10} + m_0 \int_{t_0}^t \frac{d\tau}{m(\tau)} x_{20}. \end{aligned} \right\} (18)$$

Поскольку масса (по умолчанию) положительна, в первом из равенств системы (18) символ модуля массы в табличном интеграле $\int_{t_0}^t \frac{dm(\tau)}{m(\tau)} = \ln |m(t)|_{t_0}^t$ опущен и учтено, что по определению логарифма $\exp[\ln m(t)] = m(t)$.

Введем в рассмотрение понятие „количества движения покоя“ $m_0 x_{20}$ по Эйнштейну [3].

Теорема 3. „Количество движения покоя“ $m_0 x_{20}$ тела-точки с переменной массой равно количеству ее трансляционного движения $m(t) \frac{m_0}{m(t)} x_{20}$:

$$m_0 x_{20} \equiv m(t) \frac{m_0}{m(t)} x_{20}, \tag{19}$$

которые неразличимы в силу скрытого параметра $\frac{m(t)}{m(t)} \equiv 1$.

Доказательство. С учетом первого равенства (18) запишем уравнение баланса количества движения (15) в виде

$$\frac{d[m(t)\dot{z}]}{dt} = \frac{d\left[m(t) \frac{m_0}{m(t)} x_{20}\right]}{dt} = 0,$$

откуда следует

$$\forall t \in [t_0, \infty) \quad \frac{m(t)}{m(t)} m_0 x_{20} \equiv \text{const},$$

где $\frac{m(t)}{m(t)} \equiv 1$; т.е. тождество (19) можно рассматривать как математическую формулировку

принципа покоящейся стрелы Зенона (или принципа относительности Галилея о неразличимости покоя и движения в случае переменной массы). ■

Математическая модель процесса генерации дипольного магнитного поля при движении АТТ. Физический смысл скрытого параметра магнитной индукции B в выражении для угловой скорости ω абсолютно твердого тела придает виртуальная (т.е. „не производящая работы“) сила Лоренца, для которой в условиях независимости вектора угловых скоростей от вектора линейных скоростей в системе СИ справедливо следующее равенство (см., например, [18, с. 229]):

$$\omega = \frac{|q|B}{m}, \tag{20}$$

где $|q|$ — модуль виртуального (электрического) заряда.

Существование дипольного магнитного поля немислимо без существования двух виртуальных зарядов, один из которых должен быть положительным, а второй — отрицательным.

Лемма 6. Положительный виртуальный заряд дипольного магнитного поля порожден спиновым движением АТТ.

Доказательство. Подставив правую часть уравнения (20) в выражение для ротора спинового движения вокруг центра масс АТТ, получим

$$\begin{aligned} \text{rot}B_+ &= \text{rot}P_{22}(\omega) = \\ &= \frac{|q|}{m} \text{col} \left[\frac{(I_x - I_y)B_x}{2I_z} - \frac{(I_z - I_x)B_x}{2I_y}, \frac{(I_y - I_z)B_y}{2I_x} - \frac{(I_x - I_y)B_y}{2I_z}, \frac{(I_z - I_x)B_z}{2I_y} - \frac{(I_y - I_z)B_z}{2I_x} \right] \end{aligned} \tag{21}$$

(здесь и далее будем различать законы движения положительных и отрицательных виртуальных зарядов с помощью нижних индексов „+“ и „-“ в обозначении вектора B магнитной индукции).

Тот факт, что других внутренних источников или стоков положительного виртуального заряда нет, вытекает из равенства нулю дивергенции функциональной матрицы $P_{22}(\omega)$, т.е. $\operatorname{div}B_+ = \operatorname{div}P_{22}(\omega) = 0$. ■

Лемма 7. Отрицательный виртуальный заряд дипольного магнитного поля порожден трансляционным движением АТТ.

Доказательство. Подставив правую часть уравнения (20) в выражение для ротора трансляционного движения центра масс АТТ, получим

$$\operatorname{rot}B_- = \operatorname{rot}P_{11}(\omega) = -2 \frac{|q|}{m} \operatorname{col}[B_x, B_y, B_z]. \quad (22)$$

Тот факт, что других внутренних источников или стоков отрицательного виртуального заряда нет, вытекает из равенства нулю дивергенции для функциональной матрицы $P_{11}(\omega)$, т.е. $\operatorname{div}B_- = \operatorname{div}P_{11}(\omega) = 0$. ■

Лемма 8. Векторное поле магнитной индукции для положительного виртуального заряда (лемма 6) дипольного магнитного поля (обозначим ее $B_+ = \operatorname{col}[B_{+x}, B_{+y}, B_{+z}]$) описывается уравнением

$$\frac{dB_+}{dt} = [P_{22}(\omega)]_{(*)} B_+, \quad t_0 \geq 0, \quad B_+(t_0) = B_{0+}. \quad (23)$$

Доказательство. Уравнение (23) получено подстановкой правой части выражения (20) вместо векторов обеих частей уравнения спинорного движения АТТ вокруг центра масс и делением полученного результата на скаляр $|q|/m$. ■

Лемма 9. Векторное поле магнитной индукции для отрицательного виртуального заряда (лемма 7) дипольного магнитного поля (обозначим ее $B_- = \operatorname{col}[B_{-x}, B_{-y}, B_{-z}]$) за исключением точек, совпадающих с осью вращения ротора (22), описывается уравнением

$$\frac{dB_-}{dt} = [P_{11}(\omega)]_{(*)} B_-, \quad t_0 \geq 0, \quad B_-(t_0) = B_{0-}. \quad (24)$$

Доказательство. Связь вектора v линейной скорости АТТ с вектором ω его угловой скорости описывается векторным уравнением

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}, \quad (25)$$

где \mathbf{R} — радиус-вектор, соединяющий центр масс АТТ, находящийся на оси его вращения, с точкой на поверхности АТТ.

Направление вектора линейной скорости v не зависит от выбора „правой“ или „левой“ системы координат, поскольку произвольный выбор знака величины ω компенсируется произвольным выбором направления векторного произведения (25). Поэтому без потери общности скалярную запись уравнения (25) с учетом (20) и леммы 7 можно представить в виде

$$v = \frac{|q|B_-}{m} R \sin \varphi, \quad (26)$$

где φ — угол между векторами $\boldsymbol{\omega}$ и \mathbf{R} .

Подстановка правой части уравнения (26) вместо векторов обеих частей уравнения трансляционного движения центра масс АТТ и деление полученного результата на скаляр $|q|R \sin \varphi / m$ дает (25). При этом в точках поверхности АТТ, пересекающихся с осью враще-

ния ротора (22), описанная процедура деления на указанный скаляр приводит к бесконечному разрыву второго рода в силу того, что в этих точках $\sin \varphi = 0$. ■

Теорема 4. Движение всякого абсолютно твердого тела порождает дипольное магнитное поле, описываемое двумя скалярными полями магнитной индукции:

1) полем магнитной индукции для отрицательных виртуальных зарядов, представляющим собой сферу с несмещенным центром

$$B_-^T(t, t_0, B_0) B_-(t, t_0, B_0) = B_{0-}^T B_{0-},$$

порожденную векторным полем (24) (лемма 9);

2) полем магнитной индукции для положительных виртуальных зарядов, представляющим собой сферу со смещенным центром, порожденную векторным полем (23) (лемма 8)

$$B_+^T(t, t_0, B_{0+}) B_+(t, t_0, B_{0+}) + 2G^T[B_+(t, t_0, B_{0+}), B_{0+}] B_+(t, t_0, B_{0+}) = B_{0+}^T B_{0+},$$

или, что то же самое, центральную сферу с переменным радиусом (с центром в начале координат)

$$\begin{aligned} B_+(t, t_0, B_{0+}) + G[B_{0+}(t, t_0, B_{0+}), B_{0+}]^T \{ B_{0+}(t, t_0, B_{0+}) + G[B_{0+}(t, t_0, B_{0+}), B_{0+}] \} = \\ = B_{0+}^T B_{0+} + G^T[B_{0+}(t, t_0, B_{0+}), B_{0+}] G[B_{0+}(t, t_0, B_{0+}), B_{0+}] \end{aligned}$$

и центром смещения, подчиненным уравнению

$$G[B(t, t_0, B_{0+}), B_{0+}] = -\frac{1}{2} \operatorname{col} \left[B_x(t, t_0, B_{0+}) - \frac{B_{0x+}^2}{B_x}, B_y(t, t_0, B_{0+}) - \frac{B_{0y+}^2}{B_y}, B_z(t, t_0, B_{0+}) - \frac{B_{0z+}^2}{B_z} \right].$$

Доказательство. Доказательство теоремы вытекает из доказанных выше лемм 6—9. ■

Применительно к геомагнитному полю Земли полученный результат представляет собой математическое обоснование хорошо известной гипотезы Лебедева — Блэкетта [19, с. 163] о том, что вращающееся абсолютно твердое тело намагничивается самопроизвольно вдоль оси вращения.

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ И ОБЫЧНАЯ ДИХОТОМИИ ПЕРРОНА СКАЛЯРНЫХ ПОЛЕЙ

Рассмотрим знаки дивергенции и градиента в ответе на вопрос об обычной и экспоненциальной дихотомии Перрона, начав с неустойчивости по Ляпунову, на которую дихотомия Перрона не распространяется.

Условие $\operatorname{div} > 0$ — есть внутренний источник кинетической энергии движения. Если

$$\forall t \in [0, \infty) \exists t^* \geq t_0, \forall t \in [t^*, \infty) \{ \operatorname{div} P(x, t) > 0 \leftrightarrow \exists i = \overline{(1, n)} p_{ii}(x, t) > 0 \},$$

то

$$\exists i = \overline{(1, n)} \lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t, t_0, x_{i0})\| = \infty,$$

и система неустойчива по Ляпунову.

Неустойчивость следует из того, что $\forall t \in [t^*, \infty)$ второе слагаемое i -й компоненты вектора центра смещения (4) обращается в нуль ($x_{i0}^2 / x_i(t, t_0, x_{i0}) = 0$). Это означает вырождение по Тихонову i -го дифференциального уравнения системы (1) в алгебраическое, для которого зависимость от начальных условий отсутствует [9, с. 266—267]).

Пример — свободное движение тела-точки с переменной массой и аттрактор Ресслера. Для аттрактора Ресслера вторая компонента вектора градиента является положительным числом, что свидетельствует о возможном вырождении второго дифференциального уравнения этой системы в алгебраическое, которого не происходит на конечном интервале времени. Дополнительным свидетельством возможной неустойчивости по Ляпунову являются временные

интервалы, на которых дивергенция положительна, что говорит о наличии „мерцающего“ внутреннего источника кинетической энергии. Вообще говоря, сконструированные кинематические конструкции для этого примера свидетельствуют о достаточно экзотическом движении тела-точки и не менее экзотических свойствах этого движения. Классификация этих свойств с помощью предложенных кинематических инструментов не вызывает принципиальных затруднений. Тем не менее для определения момента вырождения второго уравнения в алгебраическое требуется численное интегрирование.

Условие $\text{div} < 0$ — есть внутренний сток кинетической энергии движения. Если

$$\forall t \in [0, \infty) \exists t^* \geq t_0, \forall t \in [t^*, \infty) \left\{ \text{div} P(x, t) < 0, \forall i = (\overline{1, n}) p_{ii}(x, t) < 0 \right\},$$

то система наделена свойством экспоненциальной дихотомии по Перрону.

Пример — аттрактор Лоренца. Подтверждением экспоненциальной дихотомии по Перрону является отрицательное значение дивергенции, свидетельствующее о наличии внутреннего стока кинетической энергии. Кроме того, для аттрактора Лоренца все компоненты вектора градиента — отрицательные числа.

Подобно варианту, приведенному в работе [9, с. 45, пример 1.3], запишем решения уравнения Лоренца с использованием численных значений градиента:

$$\begin{aligned} x_1(t, t_0, x_0) &= e^{-10t} \left[x_{10} + 10 \int_{t_0}^t e^{10\tau} x_2(\tau, t_0, x_{20}) d\tau \right], \\ x_2(t, t_0, x_0) &= -e^{-t} \left[x_{20} + 50 \int_{t_0}^t e^{\tau} x_1(\tau, t_0, x_{10}) d\tau - \int_{t_0}^t e^{\tau} x_1(\tau, t_0, x_{10}) x_3(\tau, t_0, x_{30}) d\tau \right], \\ x_3(t, t_0, x_0) &= -e^{-\frac{8}{3}t} \left[x_{30} + \int_{t_0}^t e^{\frac{8}{3}\tau} x_1(\tau, t_0, x_{10}) x_2(\tau, t_0, x_{20}) d\tau \right]. \end{aligned}$$

Экспоненциально убывающие сомножители правых частей приведенных равенств в условиях ограниченности компонент вектора состояний, являющегося решением, свидетельствуют об экспоненциальной дихотомии по Перрону.

Условие $\text{div} = 0$ — и внутренние источники, и внутренние стоки кинетической энергии движения отсутствуют. Пример — уравнения Эйлера движения абсолютно твердого тела в связанной системе координат.

Спинорное движение сферы (13). Как показано выше, это движение надделено свойством обычной дихотомии по Перрону.

Спинорное движение сферы (14). С использованием евклидовой нормы и теоремы Пифагора для прямоугольного нелинейного треугольника возвратно-поступательное движение сферы (14) в промежутках между „выколотыми“ точками может быть записано в виде тождества

$$\|\omega_0\|^2 + \|G\|^2 \equiv \|\omega + G\|^2,$$

которое в „выколотых“ точках не выполняется. Очевидно, что это движение надделено свойством экспоненциальной дихотомии по Перрону, а существование „выколотых“ точек компонент вектора центра смещения является достаточным условием такой дихотомии.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя итог, можно утверждать, что окружающий нас мир, математической формализацией которого является фазовое пространство, представляет собой пространство скалярных полей, находящихся в постоянном вращении вокруг несмещенных либо смещенных центров. Каждый двигающийся в пространстве состояний объект порождает свое скалярное поле в ви-

де гиперсферы, уникальность которой определяется изображающей точкой начального состояния объекта. Эта точка находится в состоянии покоя на гиперсфере, а возвратно-поступательное движение относительно нее осуществляют сама гиперсфера и смещенный центр. Следом этого движения является фазовый портрет, который наблюдатель принимает за „клубок ниток“ динамического хаоса.

Описание скалярных полей в виде гиперсфер может быть использовано для аналитического решения задач финитного управления (см., например, [9, 11]) траекториями движения посредством параметрического синтеза компонент роторов и переключения режимов прохождения „квантов движения“ за счет обнуления соответствующих компонент ротора (или, другими словами, управления знаками компонент ротора).

Проблемой при описании скалярных полей являются „выколотые“ точки движения центра смещения гиперсферы. Тот факт, что отсутствие таких точек — недостаток, демонстрирует задача Б. В. Булгакова о накоплении отклонений при наихудших внешних воздействиях [11, § 2.7]. Проблема состоит в идентификации колебательных процессов без решения уравнения (1).

При этом сама процедура численного интегрирования может быть значительно упрощена посредством „квантового компьютера“, техническое задание на разработку которого сформулировано в работе [6, § 1.3.2].

Другой проблемой, но уже теоретической физики, является стандартная модель движения, которую необходимо распространить на случай переменной массы.

З а м е ч а н и е . Физический смысл скалярным полям динамических систем может быть придан с помощью эффекта скрытого параметра посредством замены векторов линейных и угловых скоростей их связями с другими физическими величинами, в частности с вектором магнитной индукции виртуальной силы Лоренца.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 15-08-00181А.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зенон Элейский // БСЭ. М.: Изд-во „Сов. энциклопедия“, 1972. Т. 9.
2. Галилей Г. Диалог о двух главнейших системах мира — птолемеевой и коперниковой / Пер. А. И. Долгова. М.—Л.: ОГИЗ, 1948.
3. Окунь Л. Б. Формула Эйнштейна: $E_0 = mc^2$. „Не смеется ли Господь Бог?“ // Успехи физ. наук. 2008. Т. 178, № 5. С. 541—555.
4. Hilbert D. Mathematical problems // Bull. Amer. Math. Soc. 1902. Vol. 8. P. 437—479.
5. Подчукаев В. А. Математическая модель динамического хаоса // Изв. Саратов. ун-та. Новая Серия. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 4. С. 27—31.
6. Подчукаев В. А. „Великие проблемы“ физики и „физического минимума“ (в смысле В. Л. Гинзбурга) глазами инженера от „искусства управления“ // Докл. Академии военных наук. 2013. № 5 (59). Вып. 1. С. 5—75.
7. Подчукаев В. А. Аналитическая теория автоматического управления. Саратов: Изд-во СГТУ, 1996.
8. Герасимов С. М., Подчукаев В. А. Алгебраический подход к анализу и синтезу распределенных управляемых систем // АиТ. 1991. № 5. С. 57—62.
9. Подчукаев В. А. Теория автоматического управления (аналитические методы). М.: Физматлит, 2005.
10. Подчукаев В. А. К задаче определения области возможных состояний нестационарной линейной системы // АиТ. 1976. № 7. С. 187—189.
11. Подчукаев В. А. Аналитические методы теории автоматического управления. М.: Физматлит, 2002.
12. Дихотомия // Математическая энциклопедия. М.: Изд-во „Сов. энциклопедия“, 1970. Т. 2.

13. Турьшиев В. Г. Экспериментальные проверки общей теории относительности: недавние успехи и будущие направления исследований // Успехи физ. наук. 2009. Т. 179, № 1. С. 3—34.
14. Подчукаев В. А., Стрельцов А. А. Восстановление линейных скоростей абсолютно твердого тела по результатам измерения угловых скоростей в условиях зависимости моментов сил от угловых скоростей // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1994. № 5. С. 11—19.
15. Подчукаев В. А. Математическая модель динамической системы в фазовом пространстве // Тр. XII Всерос. совещ. по проблемам управления (ВСПУ-2014), 15—19 июня 2014 г., Москва. М.: ИПУ РАН, 2014.
16. Podchukaev V. A., Peredel'sky G. I., Filonovich A. V. The geometric properties of free motion of the dynamical systems in the phase space // Proc. of the 12th Intern. Conf. on Actual Problems of Electronic Instrument Engineering (APEIE-2014), 2—4 Oct. 2014, Novosibirsk. Vol. 1. P. 35—40.
17. Окунь Л. Б. О письме Р. И. Храпко „Что есть масса?“ // Успехи физ. наук. 2000. Т. 170, № 12. С. 1366—1371.
18. Матвеев А. Н. Механика и теория относительности. М.: Изд. дом „ОНИКС 21 век“: Изд-во „Мир и Образование“, 2003.
19. Ораевский В. Н. Плазма на Земле и в космосе. Киев: Наукова думка, 1980.

Сведения об авторе

Владимир Анатольевич Подчукаев — д-р техн. наук, профессор; СГЮА, ИПТМУ РАН, Саратов;
E-mail: sstu85@yandex.ru

Поступила в редакцию
25.08.15 г.

Ссылка для цитирования: Подчукаев В. А. Анализ скалярных полей динамических систем // Изв. вузов. Приборостроение. 2016. Т. 59, № 1. С. 5—24.

ANALYSIS OF SCALAR FIELDS OF DYNAMIC SYSTEMS

V. A. Podchukaev

Saratov State Academy of Law, 410028, Saratov, Russia
Institute of Precision Mechanics and Control, Russian Academy of Sciences, 410028, Saratov, Russia
E-mail: sstu85@yandex.ru

The principles of scalar field analysis for dynamic systems are presented as applied to point-body and rigid body. The space of the dynamic system solutions (the phase space) is shown to be a scalar field of the shape of a hypersphere with moveable or stable center as related to a fixed point on the hypersphere surface; the point is specified by the initial states vector. The scalar field movement is proved to have a reciprocating character, i.e. is a retrograde one relative to the movement in the state space supplemented, in the case of a shifted center, with the hyperbolic component of its drive. It is demonstrated that with a fixed center, the scalar field movement possesses the feature of normal Perron dichotomy. Conditions for exponential Perron dichotomy to take place, in the case of shifted center, are specified. The scalar field hidden parameters such as constant and variable mass and Lorentz force are taken into consideration; the analysis confirms the conservation laws for kinetic energy and pulse, as well as the magnetizing effect for moving rigid body.

Keywords: scalar field, hypersphere, shifted center, deleted point, hidden parameter, reciprocating motion of shifted center.

Data on author

Vladimir A. Podchukaev — Dr. Sci., Professor; Saratov State Academy of Law; Institute of Precision Mechanics and Control RAS, E-mail: sstu85@yandex.ru

For citation: Podchukaev V. A. Analysis of scalar fields of dynamic systems // Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Priborostroyeniye. 2016. Vol. 59, N 1. P. 5—24 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2016-59-1-5-24