

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СВОЙСТВ КОМПЛЕКСНОГО И АНАЛИТИЧЕСКОГО СИГНАЛОВ

С. И. ЗИАТДИНОВ, А. В. АГРАНОВСКИЙ

*Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения,
190000, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: kaf53@guap.ru*

Выполнен сравнительный анализ ошибок измерения амплитуды и частоты аналитического и комплексного сигналов. Показано, что использование преобразования Гильберта для получения аналитического сигнала вносит погрешности при формировании квадратурной составляющей. Для случаев амплитудной и частотной модуляции несущего колебания рассчитаны относительные ошибки измерения амплитуды и частоты в широком диапазоне отношений средней частоты к ширине спектральной плотности сигнала.

Ключевые слова: комплексный сигнал, аналитический сигнал, спектральная плотность, амплитуда, частота, квадратурный сигнал, преобразователь Гильберта, ошибки

В радиотехнических системах наиболее часто используется квазигармонический сигнал вида [1]:

$$x(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)], \quad (1)$$

где $A(t)$, ω_0 , $\varphi(t)$ — огибающая, средняя частота и начальная фаза сигнала.

Однако такой сигнал не обеспечивает однозначного определения флуктуирующих амплитуды, начальной фазы и мгновенной частоты $\omega(t) = \omega_0 + \dot{\varphi}(t)$, так как для произвольной функции $\varphi(t)$ всегда можно найти функцию $A(t)$, удовлетворяющую равенству (1).

При наличии пары сдвинутых по фазе на 90° (квадратурных) сигналов

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)], \\ y(t) &= A(t) \sin[\omega_0 t + \varphi(t)] \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

возможно однозначно определить основные параметры сигнала (1):

$$A(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}; \quad \varphi(t) = \arctg(y(t)/x(t)) - \omega_0 t; \quad \omega(t) = \frac{\dot{y}(t)x(t) - y(t)\dot{x}(t)}{A^2(t)}. \quad (3)$$

В работе [2] проанализированы методы получения квадратурных сигналов с использованием преобразователя Гильберта и линии задержки. Случайный $x(t)$ и квадратурный (сопряженный по Гильберту) $y_\Gamma(t)$ сигналы связаны друг с другом парой преобразований [3]:

$$y_\Gamma(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(l)}{t-l} dl, \quad x(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y_\Gamma(l)}{t-l} dl. \quad (4)$$

При использовании линии задержки квадратурный сигнал описывается выражением $y_{\text{ЛЗ}}(t) = x(t - T)$, где T — время задержки сигнала $x(t)$.

В частном случае для спектральной плотности $G(\omega) = \frac{2\Delta\omega\sigma^2}{\Delta\omega^2 + (\omega - \omega_0)^2}$ комплексного сигнала $z(t) = x(t) + jy(t)$ были получены соотношения, описывающие коэффициенты взаимной корреляции точного квадратурного сигнала $y(t)$ и полученные с использованием преобразователя Гильберта $y_{\text{Г}}(t)$ и линии задержки $y_{\text{ЛЗ}}(t)$ сигналов:

$$\rho_{\text{Г}}(0) = \frac{2}{\pi} \arctg \frac{\omega_0}{\Delta\omega}; \quad \rho_{\text{ЛЗ}}(0) = \exp\left(-\frac{\pi\Delta\omega}{2\omega_0}\right),$$

где σ^2 , ω_0 , $\Delta\omega$ — дисперсия, средняя частота и ширина спектральной плотности сигнала. Таким образом, преобразователь Гильберта и линия задержки в случае широкополосного сигнала $x(t)$, т.е. при $\frac{\omega_0}{\Delta\omega} < 1$, вносят большие искажения в формируемый квадратурный сигнал

($\rho_{\text{Г}}(0) \approx 0$, $\rho_{\text{ЛЗ}}(0) \approx 0$). И лишь для узкополосного сигнала $x(t)$, $\frac{\omega_0}{\Delta\omega} \gg 1$, оба способа позволяют получить практически точное значение квадратурного сигнала ($\rho_{\text{Г}}(0) \approx 1$, $\rho_{\text{ЛЗ}}(0) \approx 1$). Вместе с тем в известной литературе отсутствуют сведения о влиянии степени узкополосности сигнала $x(t)$ на ошибки измерения его амплитуды и частоты.

Цель настоящей работы — проанализировать влияние соотношения средней частоты ω_0 и ширины спектральной плотности $\Delta\omega$ на ошибки измерения амплитуды и частоты комплексного и аналитического сигналов. Эти сигналы в общем виде записываются соответственно следующим образом:

$$z(t) = x(t) + jy(t), \quad z_{\text{Г}}(t) = x(t) + jy_{\text{Г}}(t).$$

Выражения (2) позволяют представить комплексный сигнал в виде

$$z(t) = x(t) + jy(t) = A(t)e^{j[\omega_0 t + \varphi(t)]}.$$

Используя прямое преобразование Фурье, спектральную плотность комплексного сигнала представим следующим образом:

$$G_z(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} A(t)e^{j\omega_0 t} e^{j\varphi(t)} e^{-j\omega t} dt. \quad (5)$$

Введем обозначения $g(t) = e^{j\omega_0 t}$, $f(t) = A(t)e^{j\varphi(t)}$. Спектральные плотности функций $f(t)$ и $g(t)$ определяются выражениями [3]:

$$G_g(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt = \delta[\omega - \omega_0], \quad G_f(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt,$$

где $\delta[*]$ — дельта-функция.

В результате функцию $g(t)$ можно представить в виде интеграла Фурье

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_g(j\omega)e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta[\omega - \omega_0]e^{j\omega t} d\omega.$$

Подставив этот интеграл в (5), получим

$$\begin{aligned} G_z(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta[b - \omega_0]e^{jbt} db \right] e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta[b - \omega_0] \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j(\omega - b)t} dt \right] db. \end{aligned}$$

Заключенный в квадратные скобки интеграл по переменной t представляет собой спектральную плотность функции $f(t)$ при частоте $(\omega - b)$, т.е. $G_f[j(\omega - b)]$, следовательно

$$G_z(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta[b - \omega_0] G_f[j(\omega - b)] db = G_f[j(\omega - \omega_0)]. \quad (6)$$

Таким образом, спектральная плотность комплексного сигнала $z(t)$ „группируется“ относительно средней частоты ω_0 и может содержать как положительные частоты ($\omega > \omega_0$), так и отрицательные ($\omega < \omega_0$). При этом форма спектральной плотности комплексного сигнала не зависит от ω_0 , которая может принимать и положительные, и отрицательные значения. В результате статистические характеристики флуктуирующих амплитуды, частоты и фазы комплексного сигнала не зависят от его средней частоты.

Определим частотные свойства аналитического сигнала $z_\Gamma(t) = x(t) + jy_\Gamma(t)$, где $y_\Gamma(t)$ — квадратурный (сопряженный по Гильберту) сигнал, полученный в соответствии с преобразованиями (4).

Согласно (4), импульсная характеристика преобразователя Гильберта имеет вид

$$h_\Gamma(t) = 1/\pi t.$$

Тогда его частотная передаточная функция представляется следующим образом [3]:

$$W_\Gamma(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h_\Gamma(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (7)$$

С учетом нечетности функции $h_\Gamma(t)$ формула (7) может быть записана в виде

$$W_\Gamma(j\omega) = -j \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega t)}{\pi t} dt = \begin{cases} -j, & \omega > 0, \\ j, & \omega < 0. \end{cases}$$

Преобразователь Гильберта можно рассматривать как фильтр, модуль частотной передаточной функции которого равен единице, а фазовая частотная характеристика представляется следующим образом:

$$\varphi_\Gamma(\omega) = \begin{cases} -\pi/2, & \omega > 0, \\ \pi/2, & \omega < 0. \end{cases} \quad (8)$$

В общем виде спектральная плотность аналитического сигнала записывается как

$$G_\Gamma(j\omega) = G_x(j\omega) + jG_{y_\Gamma}(j\omega), \quad (9)$$

где $G_x(j\omega)$, $G_{y_\Gamma}(j\omega)$ — спектральная плотность сопряженных сигналов $x(t)$, $y_\Gamma(t)$ соответственно.

С учетом выражения (8) в области положительных частот получим

$$G_{y_\Gamma}(j\omega) = -jG_x(j\omega), \quad \omega > 0, \quad (10)$$

в области отрицательных частот

$$G_{y_\Gamma}(j\omega) = jG_x(j\omega), \quad \omega < 0. \quad (11)$$

После подстановки соотношений (10) и (11) в (9) находим, что

$$G_\Gamma(j\omega) = 2G_x(j\omega), \quad \omega > 0.$$

Таким образом, в спектре аналитического сигнала, в отличие от спектра комплексного, есть составляющие лишь с положительными частотами, поэтому при $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \geq 1$ (широкополосный

сигнал) происходит деформация спектральной плотности аналитического сигнала и как следствие — изменение статистических характеристик амплитуды, частоты и фазы аналитического

сигнала. При узкополосном сигнале $x(t)$ ($\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1, \omega_0 > 0$) статистические характеристики комплексного и аналитического сигналов практически совпадают.

Поскольку степень деформации спектральной плотности аналитического сигнала при уменьшении средней частоты зависит от конкретной формы спектральной плотности, в качестве примера рассмотрим влияние отношения $\Delta\omega/\omega_0$ на характеристики амплитудно-модулированного и частотно-модулированного колебаний.

Амплитудно-модулированное колебание можно записать в виде

$$x(t) = A[1 + Me(t)] \cos \omega_0 t, \tag{12}$$

где $e(t)$ — модулирующий сигнал, M — коэффициент амплитудной модуляции (АМ).

Используем в качестве модулирующего сигнала функцию типа „меандр“ (рис. 1), для нее ряд Фурье в тригонометрической форме имеет вид [3, 4]:

$$e(t) = \frac{4}{\pi} \left(\cos \omega_{\Pi} t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_{\Pi} t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_{\Pi} t - \frac{1}{7} \cos 7\omega_{\Pi} t + \dots \right), \tag{13}$$

где $\omega_{\Pi} = 2\pi F_{\Pi}$, F_{Π} — частота повторения колебаний.

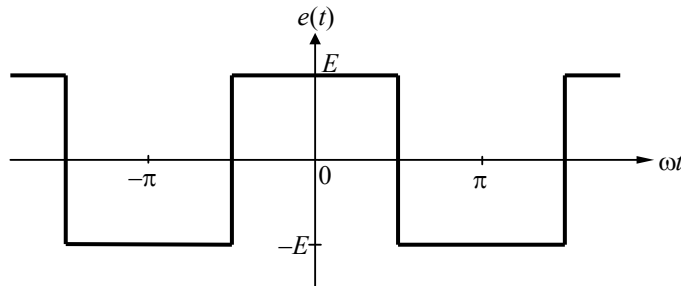


Рис. 1

Подставив (13) в (12) и раскрыв скобки, получим

$$x(t) = A \cos \omega_0 t + \frac{2}{\pi} AM \left[\cos(\omega_0 - \omega_{\Pi})t - \frac{1}{3} \cos(\omega_0 - 3\omega_{\Pi})t + \frac{1}{5} \cos(\omega_0 - 5\omega_{\Pi})t - \frac{1}{7} \cos(\omega_0 - 7\omega_{\Pi})t + \dots + \cos(\omega_0 + \omega_{\Pi})t - \frac{1}{3} \cos(\omega_0 + 3\omega_{\Pi})t + \frac{1}{5} \cos(\omega_0 + 5\omega_{\Pi})t - \frac{1}{7} \cos(\omega_0 + 7\omega_{\Pi})t + \dots \right]. \tag{14}$$

Согласно выражению (8), после преобразования Гильберта спектральные составляющие с частотами $(\omega_0 + n\omega_{\Pi}) > 0$ сдвигаются по фазе на $-\pi/2$, а составляющие с $(\omega_0 - n\omega_{\Pi}) < 0$ — на $\pi/2$.

Рассмотрим частный случай, когда $\omega_0 > 0$; $(\omega_0 - \omega_{\Pi}) > 0$ $(\omega_0 - n\omega_{\Pi}) < 0, n=3, 5, 7, \dots$ Спектр такого комплексного сигнала показан на рис. 2.

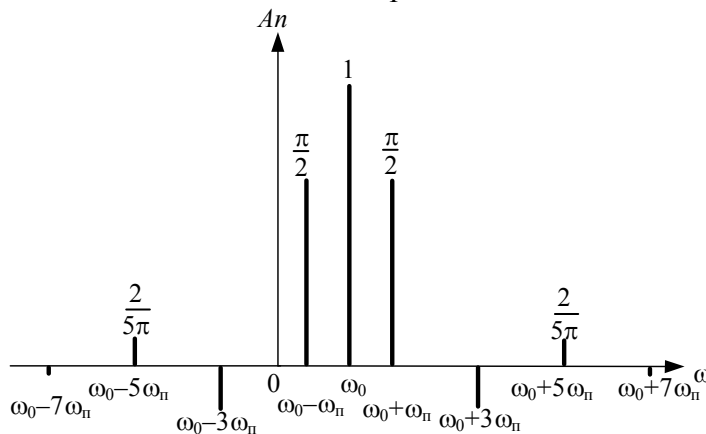


Рис. 2

При этом выходной сигнал преобразователя Гильберта можно записать в виде

$$y_r(t) = A \sin \omega_0 t + \frac{2}{\pi} AM \left[\sin(\omega_0 - \omega_{\Pi})t - \frac{1}{3} \sin(\omega_0 - 3\omega_{\Pi})t - \frac{1}{5} \sin(\omega_0 - 5\omega_{\Pi})t + \frac{1}{7} \sin(\omega_0 - 7\omega_{\Pi})t - \dots + \sin(\omega_0 + \omega_{\Pi})t - \frac{1}{3} \sin(\omega_0 + 3\omega_{\Pi})t + \frac{1}{5} \sin(\omega_0 + 5\omega_{\Pi})t - \frac{1}{7} \sin(\omega_0 + 7\omega_{\Pi})t + \dots \right]. \quad (15)$$

В этом случае амплитуда и частота аналитического сигнала находятся из соотношений

$$A_r(t) = \sqrt{x^2(t) + y_r^2(t)}; \quad \omega_r(t) = \frac{\dot{y}_r(t)x(t) - y_r(t)\dot{x}(t)}{A_r^2(t)}. \quad (16)$$

Нормированные среднеквадратические отклонения амплитуды и частоты аналитического сигнала от значений этих параметров комплексного сигнала вычисляются по следующим формулам:

$$\sigma_A = \frac{\sqrt{[A(t) - A_r(t)]^2}}{A}; \quad \sigma_{\omega} = \frac{\sqrt{[\omega(t) - \omega_r(t)]^2}}{\omega_0}, \quad (17)$$

где черта сверху означает осреднение по времени.

С помощью соотношений (14)—(17) были рассчитаны нормированные среднеквадратические отклонения σ_A и σ_{ω} для различных значений $\frac{\omega_0}{\Delta\omega}$. Ширина спектра сигнала оценивалась по уровню 0,5 относительно амплитуды A несущего колебания с частотой ω_0 . Расчеты проводились при коэффициенте амплитудной модуляции $M=0,8$ и частоте модуляции $\omega_{\Pi} = 2\pi$ рад/с (1 Гц). При этом ширина спектра сигнала составила $\Delta\omega = 4\pi$ рад/с (2 Гц). Результаты расчетов величин σ_A и σ_{ω} в относительной форме представлены на рис. 3.

Проанализировав полученные данные, можно отметить, что при отношении $\frac{\omega_0}{\Delta\omega} \approx 1$ нормированные среднеквадратичные отклонения σ_A и σ_{ω} составляют соответственно 75 и 36 %, а при $\frac{\omega_0}{\Delta\omega} \geq 10$ — не превышают 10 %.

Рассмотрим вариант частотно-модулированного сигнала. При произвольной форме модулирующего сигнала $e(t)$ решение поставленной задачи чрезвычайно сложно. Поэтому для получения в явном виде математических выражений рассмотрим случай частотной модуляции (ЧМ) несущего сигнала гармоническим колебанием

$$e(t) = E \cos \Omega t,$$

где E, Ω — амплитуда и частота модулирующего колебания.

В результате полная фаза частотно-модулированного сигнала определяется выражением

$$\theta(t) = \omega_0 t + \frac{kE}{\Omega} \sin \Omega t + \varphi_0 = \omega_0 t + m \sin \Omega t + \varphi_0,$$

k — коэффициент пропорциональности; $m = \frac{kE}{\Omega}$ — индекс угловой модуляции; φ_0 — начальная фаза.

Тогда выражение (1) принимает вид

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + m \sin \Omega t + \varphi_0). \quad (18)$$

Найдем частотный спектр сигнала (18). Для упрощения математических выкладок положим $\varphi_0 = 0$. После несложных преобразований формулу (18) можно записать следующим образом:

$$x(t) = A \cos(m \sin \Omega t) \cos \omega_0 t - A \sin(m \sin \Omega t) \sin \omega_0 t. \tag{19}$$

Входящие в формулу (19) множители $\cos(m \sin \Omega t)$ и $\sin(m \sin \Omega t)$ являются периодическими функциями времени и могут быть разложены в ряд Фурье [3]:

$$\sin(m \sin \Omega t) = 2J_1(m) \sin \Omega t + 2J_3(m) \sin 3\Omega t + 2J_5(m) \sin 5\Omega t + \dots; \tag{20}$$

$$\cos(m \sin \Omega t) = J_0(m) + 2J_2(m) \cos 2\Omega t + 2J_4(m) \cos 4\Omega t + \dots, \tag{21}$$

где $J_n(m)$ — бesselова функция первого рода n -го порядка от аргумента m .

После подстановки соотношений (20) и (21) в формулу (19) получим

$$x(t) = A[J_0(m) \cos \omega_0 t - 2J_1(m) \sin \Omega t \sin \omega_0 t + 2J_2(m) \cos 2\Omega t \cos \omega_0 t - 2J_3(m) \sin 3\Omega t \sin \omega_0 t \dots]. \tag{22}$$

Развернем выражение (22)

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + m \sin \Omega t) = A\{J_0(m) \cos \omega_0 t + J_1(m)[\cos(\omega_0 + \Omega)t - \cos(\omega_0 - \Omega)t] + J_2(m)[\cos(\omega_0 + 2\Omega)t - \cos(\omega_0 - 2\Omega)t] + J_3(m)[\cos(\omega_0 + 3\Omega)t - \cos(\omega_0 - 3\Omega)t] + J_4(m)[\cos(\omega_0 + 4\Omega)t - \cos(\omega_0 - 4\Omega)t] + \dots\}. \tag{23}$$

Из выражения (23) следует, что при ЧМ спектр сигнала состоит из бесконечного числа боковых частот $\omega_n = \omega_0 \pm n\Omega$, где n — любое целое число. При этом амплитуда каждой гармоники $A_n = J_n(m)A$ зависит от значения m .

На основании соотношений (8), (16), (17) и (23) были рассчитаны нормированные среднеквадратические отклонения σ_A и σ_ω для различных значений $\frac{\omega_0}{\Delta\omega}$. Расчеты проводились при $m=9$ и $\Omega = 2\pi$ рад/с (1 Гц). При этом ширина спектра сигнала составила $\Delta\omega = 12\pi$ рад/с (6 Гц). Результаты расчетов нормированных величин σ_A и σ_ω представлены на рис. 4. Проанализировав полученные данные, можно отметить, что при $\frac{\omega_0}{\Delta\omega} = 1,4$ нормированные среднеквадратичные отклонения σ_A и σ_ω составляют соответственно 30 и 9 %, а при $\frac{\omega_0}{\Delta\omega} \geq 2,5$ — не превосходят 1 %.

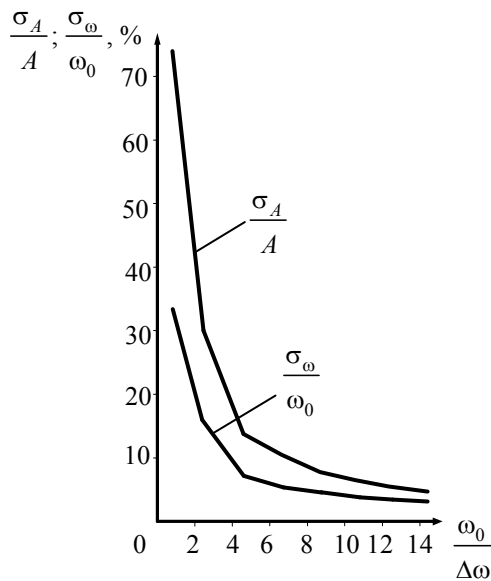


Рис. 3

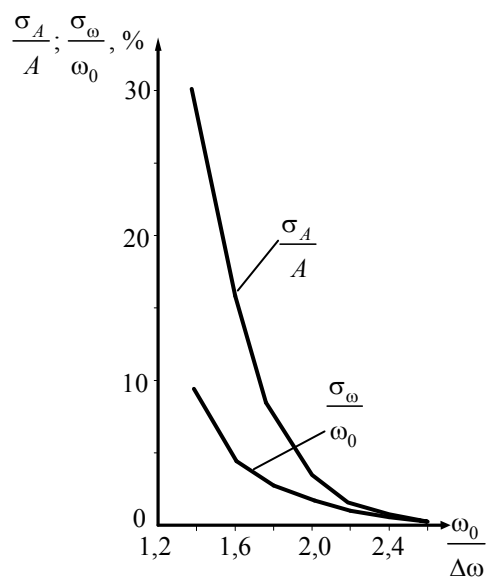


Рис. 4

Проанализировав полученные результаты, можно отметить, что при ЧМ среднеквадратические отклонения σ_A и σ_ω значительно меньше, чем при АМ. Это объясняется тем, при большом индексе угловой модуляции ($m > 10$) спектр частотно-модулированного сигнала имеет практически прямоугольную форму с резко затухающими боковыми гармониками. Когда средняя частота ω_0 больше ширины спектра сигнала $\Delta\omega$, ее влияние на среднеквадратические отклонения σ_A и σ_ω значительно меньше для ЧМ, чем для АМ. Для $m \ll 1$ ширина спектров частотно-модулированных и амплитудно-модулированных сигналов практически одинакова. В результате влияние средней частоты на среднеквадратические отклонения σ_A и σ_ω в обоих случаях одинаково.

В настоящей работе можно сделать следующие выводы:

1) преобразователь Гильберта вносит ошибки при формировании квадратурного сигнала, что приводит к погрешности оценки амплитуды и частоты аналитического сигнала по сравнению с комплексным сигналом;

2) для получения на базе аналитического сигнала нормированных среднеквадратических ошибок измерения амплитуды и частоты сигнала, меньших 10 %, необходимо обеспечить при АМ отношение средней частоты сигнала к ширине его спектра $\frac{\omega_0}{\Delta\omega} \geq 10$, что справедливо лишь для узкополосных сигналов;

3) при ЧМ с большим индексом угловой модуляции для получения на базе аналитического сигнала нормированных среднеквадратических ошибок измерения амплитуды и частоты сигнала, меньших 1 %, достаточно обеспечить $\frac{\omega_0}{\Delta\omega} \geq 2,5$;

4) результаты работы позволяют для конкретных видов сигналов обоснованно дать определение узкополосного и широкополосного сигнала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. М.: Сов. радио, 1966. 678 с.
2. Зиатдинов С. И. Анализ методов формирования квадратурных сигналов // Радиотехника. 2013. № 5. С. 23—26.
3. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Радио и связь, 1986. 512 с.
4. Балакришнан А. В. и др. Теория связи / Пер. с англ. под ред. Б. Р. Левина. М.: Связь, 1972. 324 с.

Сведения об авторах

- Сергей Ильич Зиатдинов** — д-р техн. наук, профессор; Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения;
E-mail: kaf53@guar.ru
- Андрей Владимирович Аграновский** — канд. техн. наук, доцент; Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения

Рекомендована кафедрой
метрологического обеспечения

Поступила в редакцию
12.10.15 г.

Ссылка для цитирования: Зиатдинов С. И., Аграновский А. В. Сравнительный анализ свойств комплексного и аналитического сигналов // Изв. вузов. Приборостроение. 2016. Т. 59, № 4. С. 253—260.

**COMPARATIVE ANALYSIS OF CHARACTERISTICS
OF COMPLEX AND ANALYTICAL SIGNALS****S. I. Ziatdinov, A. V. Agranovsky***St. Petersburg State University of Aerospace Instrumentation,
190000, St. Petersburg, Russia
E-mail: kaf53@guap.ru*

A comparative analysis of accuracy of amplitude and phase measurements for complex and analytical signals is carried out. It is shown that retrieving of analytical signal with the use of the Gilbert transform, introduces errors when quadrature component is derived. Relative errors of measured amplitude and phase values are calculated in a wide range of values of the ratio the average frequency to the width of the signal spectral density, for the cases of amplitude and phase modulation of carrying oscillation.

Keywords: complex signal, analytical signal, spectral density, amplitude, frequency, quadrature signals, Gilbert transform, errors

Data on authors

- Sergey I. Ziatdinov** — Dr. Sci., Professor; St. Petersburg State University of Aerospace Instrumentation; E-mail: kaf53@guap.ru
- Andrey V. Agranovsky** — PhD, Associate Professor; St. Petersburg State University of Aerospace Instrumentation

For citation: Ziatdinov S. I., Agranovsky A. V. Comparative analysis of characteristics of complex and analytical signals // Izv. vuzov. Priborostroenie. 2016. Vol. 59, N 4. P. 253—260 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2016-59-4-253-260