

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА НАМАТЫВАНИЯ НИТЕЙ НА ЖЕСТКИЙ ЦИЛИНДР

В. М. МУСАЛИМОВ¹, Ю. С. МОНАХОВ¹, А. Ю. КУТЬИН², Г. А. СОЛОВЬЕВА¹

¹Университет ИТМО, 197101, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: musvm@ya.ru

²Производственная компания „Индустрия цвета“, 196084, Санкт-Петербург, Россия

Изложены положения теории деформирования спирально-анизотропного тела, которая применяется при определении параметров, формирующих напряженно-деформированное состояние таких тел. Приведены примеры применения данной теории для кабельных конструкций и других тел, обладающих спиральной анизотропией. Особое внимание уделено моделированию процесса наматывания длинномерных материалов. Рассматриваемая модель учитывает взаимосвязь модуля упругости и коэффициента Пуассона спирально-анизотропных материалов, физико-механические и кинематические параметры нити и системы намотки. Проведенный таким образом анализ состояния тела намотки позволяет обеспечить выбор оптимального режима наматывания нитей на жесткое основание.

Ключевые слова: спирально-анизотропный стержень, композиционные материалы, окружная намотка, натяжение нити, упругие постоянные

Все существующие в природе твердые тела можно разделить на две большие группы: изотропные и анизотропные. Изотропные тела имеют одинаковые свойства во всех направлениях, а анизотропные — различные свойства в разных направлениях. Задачи теории упругости для случаев прямолинейной анизотропии рассматривались в работах [1—5] и др. Исследование механики тел, обладающих спиральной анизотропией, началось относительно недавно. Сам термин „спирально-анизотропный стержень“ (САС) впервые был введен в работе [6], посвященной задаче о растяжении и кручении сильно закрученной пряжи, которая моделировалась упругим спирально-анизотропным цилиндром.

Различные аспекты механики спирально-анизотропного тела для решения практических задач рассматривались многими исследователями [7—9].

Одним из приложений теории спирально-анизотропного тела к решению практических задач является расчет кабельных конструкций. В работах [10—12] представлена модель спирально-анизотропной среды, которая может быть использована при описании характера деформирования гибких кабелей под действием растягивающей нагрузки, в частности для определения модуля упругости второго рода; выведены уравнения, связывающие внешние силы и моменты с линейными и угловыми деформациями САС; приведены результаты разработки экспериментально-аналитического метода вероятностной оценки модулей спирально-анизотропных стержней. Впоследствии эта модель была применена для построения динамической модели магнитостатического вариометра, чувствительный элемент которого может быть представлен в виде спирально-анизотропного цилиндра [13]. Также эта модель была использована при проектировании устройства для изготовления чувствительных элементов [14], в частности, были разработаны оптимизационные методы оценки физико-механических свойств и упругих характеристик готовых образцов [15, 16].

Теория деформации спирально-анизотропного тела [10, 11] может применяться, в том числе, и для моделирования процессов наматывания длинномерных материалов. Для

корректной регулировки параметров намотки нити на жесткое цилиндрическое основание необходимо учитывать давление, возникающее на границе слоев нитей. Схема формирования слоя нитей представлена на рис. 1, где N_1 и N_2 — давление на соответствующие слои намотки; Δ_1 , Δ_2 — толщина 1-го и 2-го слоев; T — натяжение нити; ω — скорость вращения оправки; d — диаметр оправки.

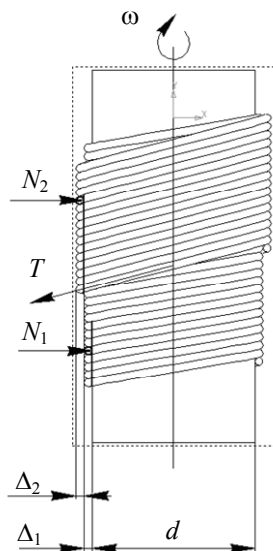


Рис. 1

При давлении на границе первого слоя и основания следует учитывать физико-механические характеристики нити, а также кинематические параметры процесса наматывания, а именно: натяжение нити, скорость вращения оправки, угол намотки (α), модуль упругости нити (E), модуль сдвига нити (G) и коэффициент Пуассона (ν).

Определение модуля упругости нитей производится экспериментально с использованием специальных разрывных машин и по определенным методикам (например, ISO 6939:1988, ГОСТ 6611.2-73). Для минимизации напряжений, возникающих в захватах машины при проведении испытаний, используются специальные кнехтовые захваты [17].

Для определения модуля сдвига нитей и коэффициента Пуассона, что является достаточно сложной задачей, используют экспериментальные зависимости. Один из подходов к определению данных величин — представление нити в виде спирально-анизотропного стержня [15]. Для изотропных тел справедливо соотношение

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (1)$$

Для анизотропных тел это соотношение не выполняется, так как E , G , ν — независимые параметры. Однако, принимая для анизотропных тел $2G/E = m$, можно вывести зависимость $m = f(\nu)$ [16] и таким образом определить неизвестные характеристики, отражающие упругие свойства тела.

Давление на границе первого слоя нитей и жесткого цилиндрического основания можно представить как функцию, зависящую от указанных выше величин:

$$N_1 = f(T, \omega, \alpha, E, G, \nu). \quad (2)$$

Выделим в первом сформированном слое намотки бесконечно малый элемент AB (рис. 2). Окружные (σ_θ) и радиальные (σ_r) напряжения считаем положительными, поскольку они вызывают растяжение материала. Кроме того, полагаем, что при деформации отсутствует осевое смещение витков нитей (актуально для фланцевой катушки, ткацкого

навоя, сновального вала и т.п.), распределение напряжений симметрично относительно оси z и зависит только от переменной r .

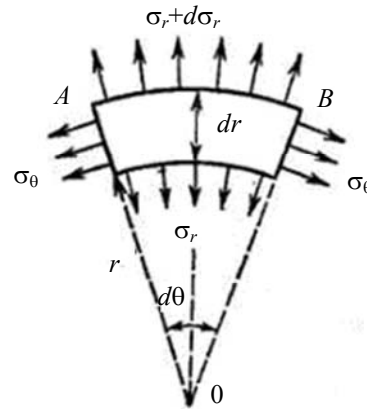


Рис. 2

Для выделенного элемента получено уравнение равновесия в цилиндрических координатах:

$$\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{d\sigma_r}{dr} = 0. \tag{3}$$

Решение данного уравнения, известное как решение задачи Ламе для плоской деформации [17], имеет следующий вид:

$$\sigma_r = a + b \frac{1}{r^2}, \tag{4}$$

здесь $\rho_1 \geq r \geq \rho_0$, где ρ_0 — радиус цилиндрического основания, ρ_1 — радиус первого слоя намотки; a и b — постоянные, полученные при интегрировании уравнения (3), их численные значения определяются граничными условиями на внутренней и наружной поверхностях слоя намотки.

При $r = \rho_0$ напряжение σ_r слоя намотки достигнет максимального значения, равного N_1 , но с противоположным знаком. Появление знака „минус“ объясняется выбором в качестве положительного растягивающего напряжения (см. рис. 2). В противном случае при $r = \rho_1$ напряжение $\sigma_r = 0$. С учетом этого получим формулы для определения радиального σ_r и окружного σ_θ напряжений в первом слое намотки в зависимости от его давления:

$$\sigma_r = \frac{N_1 \rho_0^2}{\rho_1^2 - \rho_0^2} \left(1 - \frac{\rho_1^2}{r^2} \right), \quad \sigma_\theta = \frac{N_1 \rho_0^2}{\rho_1^2 - \rho_0^2} \left(1 + \frac{\rho_1^2}{r^2} \right). \tag{5}$$

В то же время следует заметить, что сформированный слой намотки рассматривается как спирально-анизотропное тело. В случае криволинейной анизотропии, как отмечено в работе [2], целесообразно закон Гука записывать в системе криволинейных ортогональных координат, выбранной так, чтобы координатные направления в каждой точке совпадали с эквивалентными (в отношении упругих свойств). Рассматриваемый случай спиральной анизотропии позволяет связать со слоем намотки геликоидальную ортогональную систему координат (рис. 3), обладающую отмеченным выше качеством, а именно — совпадением координатных линий с упругоэквивалентными направлениями [11].

Компоненты тензора напряжений в двух системах координат связаны следующими соотношениями (рис. 4) [11]:

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_r &= \sigma_r, \\
 \sigma_\xi &= \sigma_\theta \sin^2 \alpha + 2\tau_{\theta z} \sin \alpha + \sigma_z \cos^2 \alpha, \\
 \sigma_\eta &= \sigma_\theta \cos^2 \alpha - 2\tau_{\theta z} \sin \alpha + \sigma_z \sin^2 \alpha, \\
 \tau_{r\xi} &= \tau_{\xi r} = \tau_{r\theta} \sin \alpha + \tau_{rz} \cos \alpha, \\
 \tau_{r\eta} &= \tau_{\eta r} = -\tau_{r\theta} \cos \alpha + \tau_{rz} \sin \alpha, \\
 \tau_{\xi\eta} &= \tau_{\eta\xi} = (\sigma_z - \sigma_\theta) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{\theta z} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha);
 \end{aligned} \right\} \tag{6}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_r &= \sigma_r, \\
 \sigma_\theta &= \sigma_\xi \sin^2 \alpha - 2\tau_{\xi\eta} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_\eta \cos^2 \alpha, \\
 \sigma_z &= \sigma_\xi \cos^2 \alpha + 2\tau_{\xi\eta} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_\eta \sin^2 \alpha, \\
 \tau_{r\theta} &= \tau_{\theta r} = \tau_{r\xi} \sin \alpha - \tau_{r\eta} \cos \alpha, \\
 \tau_{rz} &= \tau_{zr} = \tau_{r\xi} \cos \alpha - \tau_{r\eta} \sin \alpha, \\
 \tau_{\theta z} &= \tau_{z\theta} = (\sigma_\xi - \sigma_\eta) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{\xi\eta} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha).
 \end{aligned} \right\} \tag{7}$$

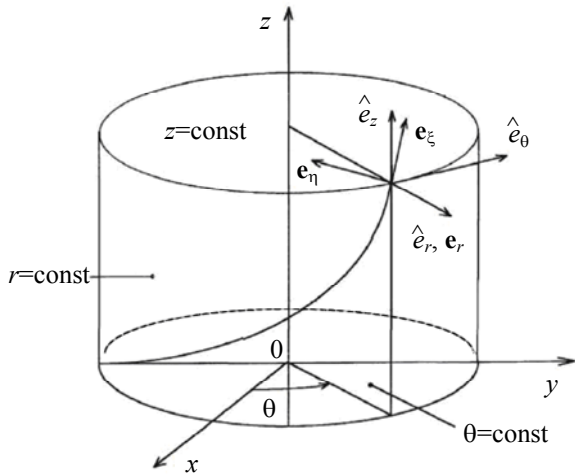


Рис. 3

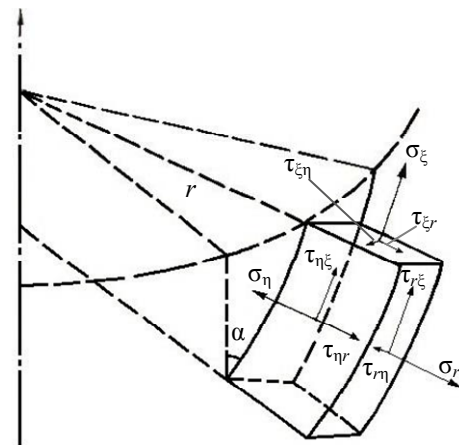


Рис. 4

Аналогичные системе (6) зависимости существуют между компонентами тензора деформаций в цилиндрической и геликоидальной системах координат:

$$\left. \begin{aligned}
 \varepsilon_r &= \varepsilon_r, \\
 \varepsilon_\xi &= \varepsilon_\theta \sin^2 \alpha - \gamma_{\theta z} \sin \alpha \cos \alpha + \varepsilon_z \cos^2 \alpha, \\
 \varepsilon_\eta &= \varepsilon_\theta \cos^2 \alpha + \gamma_{\theta z} \sin \alpha \cos \alpha + \varepsilon_z \sin^2 \alpha, \\
 \gamma_{r\xi} &= \gamma_{\xi r} = \gamma_{r\theta} \sin \alpha - \gamma_{rz} \cos \alpha, \\
 \gamma_{r\eta} &= \gamma_{\eta r} = -\gamma_{r\theta} \cos \alpha - \gamma_{rz} \sin \alpha, \\
 \gamma_{\xi\eta} &= \gamma_{\eta\xi} = 2(\varepsilon_z - \varepsilon_\theta) \sin \alpha \cos \alpha + \gamma_{\theta z} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha).
 \end{aligned} \right\} \tag{8}$$

По условиям задачи $\tau_{r\theta} = \tau_{rz} = \tau_{\theta z} = 0$, $\gamma_{r\theta} = \gamma_{rz} = \gamma_{\theta z} = 0$ и $\varepsilon_z = 0$, поэтому при совместном решении 2-го и 3-го уравнений системы (6) получим взаимосвязь между отдельными компонентами тензора напряжений в двух рассматриваемых системах координат:

$$\sigma_\xi = \sigma_\eta \operatorname{ctg}^2 \alpha - \sigma_\theta \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 2 \right). \tag{9}$$

Из последнего уравнения системы (7) получим соотношение

$$\tau_{\xi\eta} = (\sigma_\eta - \sigma_\xi) \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}, \quad (10)$$

а из последнего уравнения системы (8) — выражение

$$\gamma_{\xi\eta} = -2\varepsilon_0 \sin \alpha \cos \alpha = -2(\varepsilon_\xi + \varepsilon_\eta) \sin \alpha \cos \alpha. \quad (11)$$

Выражения (9)—(11) подставим в уравнение обобщенного закона Гука для спирально-анизотропной среды

$$\gamma_{\xi\eta} = \frac{1}{G} \tau_{\xi\eta}, \quad (12)$$

связывающее деформацию сдвига с напряжением, заменяя при этом в уравнении (11) деформации на соответствующие им напряжения. В результате с учетом выражения (9) найдем один из компонентов тензора напряжений в геликоидальной системе координат:

$$\sigma_\eta = \sigma_\theta \frac{C_2}{C_1} - \sigma_r \frac{C_3}{C_1}, \quad (14)$$

где

$$C_1 = \operatorname{ctg}^2 \alpha + h_p + \frac{\nu - 1}{E\nu} - \frac{1}{G_n}, \quad h_p = \frac{1}{G_n} - \frac{1}{E}, \quad G_n = G(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha), \\ C_2 = (\operatorname{cosec}^2 \alpha - 2)h_p, \quad C_3 = \frac{1}{E\nu}.$$

На основе 3-го уравнения системы (6) и выражения (14) определим нормальный компонент тензора напряжений в цилиндрической системе координат, выраженный через параметры спирально-анизотропной среды намотки:

$$\sigma_z = \frac{\sigma_\eta - \sigma_\theta \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = C_4 \sigma_\theta - C_5 \sigma_r, \quad (15)$$

где

$$C_4 = \frac{C_2}{C_1} \operatorname{cosec}^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha, \quad C_5 = \frac{C_3}{C_1} \operatorname{cosec}^2 \alpha.$$

Для того чтобы получить взаимосвязь напряжения и осевой нагрузки T_Φ , прикладываемой к слою намотки со стороны фланцев, необходимо воспользоваться известными формулами [17]:

$$T_\Phi = \int_S \sigma_z dS = 2\pi \int_{\rho_0}^{\rho_1} \sigma_z r dr, \quad (16)$$

где S — площадь поперечного сечения слоя намотки.

С учетом (15) и (5) выражение (16) примет следующий вид:

$$T_\Phi = \Phi(\rho_0, \rho_1, \alpha, \nu, E, G) N_1,$$

где

$$\Phi = \pi(C_4 - C_5)\rho_0^2 + 2\pi(C_4 + C_5)\rho_1^2 \frac{\rho_0^2}{\rho_1^2 - \rho_0^2} \ln \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} \right).$$

Соответственно, зная величину осевой нагрузки T_Φ , можно определить физико-механические характеристики нити. При наматывании каждого последующего слоя решается аналогичная задача о деформации спирально-анизотропного слоя намотки при наличии спирально-анизотропного заполнителя с учетом новых граничных условий [11].

На основе представленного анализа можно осуществить выбор оптимального режима наматывания нитей на жесткое основание.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лехницкий С. Г. Кручение анизотропных и неоднородных стержней. М.: Наука, 1971. 310 с.
2. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
3. Житков П. Н. Плоская задача теории упругости неоднородного ортотропного тела в полярных координатах // Тр. Воронежского гос. ун-та. 1954. Т. 27. С. 20—29.
4. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 324 с.
5. Ашкенази Е. К. Анизотропия машиностроительных материалов. Л.: Машиностроение, 1969. 240 с.
6. Thwaites J. J. The elastic deformation of a rod with helical anisotropy // Intern. J. Mech. 1977. Vol. 19, N 3. P. 161—169.
7. Hearle J. W. S., Grosberg P., Backer S. Structural Mechanics of Fibres, Yarns and Fabrics. N. Y.: Wiley-Interscience, 1969.
8. Platt M. M. Mechanics of elastic performance of textile materials: iii. some aspects of stress analysis of textile structures — continuous-filament yarns // Textile Research Journal. 1950. N 20. P. 1—15.
9. Treloar L. R. G. The stress-strain properties of multi-ply cords. Part I: Theory // J. Textile Inst. 1965. N 56. T477—T488.
10. Мусалимов В. М., Мокряк С. Я., Соханев Б. В., Шиянов В. Д. Определение упругих характеристик гибких кабелей на основе модели спирально-анизотропного тела // Механика композитных материалов. 1984. № 1. С. 136—141.
11. Мусалимов В. М. Механика деформируемого кабеля. СПб: СПбГУ ИТМО, 2005. 203 с.
12. Perechesova A. D., Soloveva G. A., Kalapyshina I. I. Hough transform for the calculation of twist angle of aramid torsion // Proc. WSCG 2015 — Poster Papers Proc. 2015. P. 72—75.
13. Сергушин П. А. Моделирование динамики магнитостатического вариометра // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. 2007. Вып. 37. С. 333—338.
14. Sergushin P., Perechesova A., Petrishchev M. The torsion magnetic variometer with kevlar-hanger-based sensor // Proc. of ISMTII-2009, 29 June – 2 July 2009, St. Petersburg. Vol. 4. P. 411—414.
15. Мусалимов В. М., Заморуев Г. Б., Перечесова А. Д. Расчет физико-механических характеристик винтовых элементов спирально-анизотропных стержней // Изв. вузов. Приборостроение. 2012. Т. 55, № 6. С. 24—30.
16. Perechesova A. Calculation of elastic constants of the torsion bars with helical anisotropy using the methods of optimization theory // Proc. of the 23rd Intern. Congress of Theoretical and Applied Mechanics. Beijing, China, 2012. SM04–050.
17. Тимошенко С. П., Гудьер Д. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.

Сведения об авторах

- Виктор Михайлович Мусалимов** — д-р техн. наук, профессор; Университет ИТМО; кафедра мехатроники; E-mail: musvm@ya.ru
- Юрий Сергеевич Монахов** — канд. техн. наук; Университет ИТМО; кафедра мехатроники; E-mail: monahovu@gmail.com
- Алексей Юрьевич Кутьин** — канд. техн. наук, доцент; Производственная компания „Индустрия цвета“; программист; E-mail: kutin_alex@mail.ru
- Галина Александровна Соловьева** — аспирант; Университет ИТМО; кафедра мехатроники; E-mail: ymatem@gambler.ru

Рекомендована кафедрой
мехатроники Университета ИТМО

Поступила в редакцию
05.04.16 г.

Ссылка для цитирования: Мусалимов В. М., Монахов Ю. С., Кутьин А. Ю., Соловьева Г. А. Моделирование процесса наматывания нитей на жесткий цилиндр // Изв. вузов. Приборостроение. 2016. Т. 59, № 8. С. 657—663.

**MODELING OF THE PROCESS OF WINDING THREADS
ON A RIGID CYLINDER****V. M. Musalimov¹, Yu. S. Monakhov¹, A. Yu. Kutin², G. A. Solovieva¹**¹*ITMO University, 197101, St. Petersburg, Russia
E-mail: musvm@ya.ru*²*Printing House "Industry of Color", 196084, St. Petersburg, Russia*

Principles of the theory of deformation of helically-anisotropic body as applied to determination of parameters characterizing the stress strain state of the body are presented. Examples of the theory application to cable constructions and other helically-anisotropic bodies are presented. A special attention is paid to modeling the process of layered structure formation during winding. The model accounts for relationship between the elastic modulus and Poisson's ratio of helically-anisotropic materials, physical, mechanical, and kinetic parameters of the yarn and winding system. The presented analysis of winding body state allows to optimize the process of winding yarn on a rigid base.

Keywords: helically-anisotropic rod, composite material, circumferential winding, yarn tension, elastic constants

Data on authors

- Victor M. Musalimov** — Dr. Sci., Professor; ITMO University, Department of Mechatronics;
E-mail: musvm@ya.ru
- Yury S. Monakhov** — PhD; ITMO University, Department of Mechatronics;
E-mail: monahovu@gmail.com
- Alexey Yu. Kutin** — PhD, Associate Professor; Printing House "Industry of Color"; Programmer;
E-mail: kutin_alex@mail.ru
- Galina A. Solovieva** — Post-Graduate Student; ITMO University; Department of Mechatronics;
E-mail: ymatem@rambler.ru

For citation: *Musalimov V. M., Monakhov Yu. S., Kutin A. Yu., Solovieva G. A. Modeling of the process of winding threads on a rigid cylinder // Izv. vuzov. Priborostroenie. 2016. Vol. 59, N 8. P. 657—663 (in Russian).*

DOI: 10.17586/0021-3454-2016-59-8-657-663