

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ОДНОКАНАЛЬНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ, ПРЕДСТАВЛЕННЫХ ЦИКЛИЧЕСКИМ ГРАФОМ СОСТОЯНИЙ

В. А. СМАГИН, Я. Н. ГУСЕНИЦА

*Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского, 197198, Санкт-Петербург, Россия  
E-mail: yaromir226@mail.ru*

Предложено использовать вероятностный принцип баланса для состояний системы обслуживания. Составлена и решена система уравнений баланса в комплексной области с применением изображений Лапласа. Выполнено обратное преобразование Лапласа для перехода от изображений к вероятностям во временной области. Разработанный метод рекомендован для исследования нестационарных систем обслуживания при произвольных распределениях.

**Ключевые слова:** система обслуживания, комплексная вероятность состояния, изображение Лапласа, баланс состояний, система уравнений, вероятность во временной области

**Введение.** Впервые термин „комплексные вероятности“ был использован в статье D. R. Cox [1]. Во вводной статье к книге Дж. Риордана [2] И. Н. Коваленко отметил, что «...применив метод „комплексных вероятностей“ Кокса, мы можем охватить случай, когда плотность длительности обслуживания при  $x > 0$  задается любой функцией вида  $p(x) = \sum_i C_i x^{\lambda_i} e^{-\lambda_i x}$ , лишь бы она была неотрицательной и имела интеграл, равный 1». Поми-

мо того, любые законы распределения длительности обслуживания допускают аппроксимацию суммой экспонент с полиномиальными множителями. В статье [3] применено разложение распределений вероятностей на сумму экспоненциальных плотностей с комплексными сопряженными коэффициентами и параметрами с целью исследования немарковских процессов. В статье [4] изучаются особенности вероятностного анализа комплексной переменной с введением комплексной дельта-функции Дирака. В статье [5] дается строгое обоснование комплексных функций Хевисайда и Дирака и приводится численный пример приложения дельта-функции к исследованию альтернирующего случайного процесса с накоплением и потерей информации. В статьях [6, 7] приведены примеры практического применения описанных выше методов аппроксимации для оценивания надежности программного обеспечения при ограниченном объеме испытаний. В статье [8] предложены немарковская модель и метод расчета стационарных вероятностей состояний нестационарных систем обслуживания, представляемых разомкнутым графом состояний. В их основу положены использование „комплексных вероятностей“ состояний в виде изображений Лапласа и принцип вероятностного баланса состояний системы. Даны рекомендации о возможности учета различных видов временных задержек и достоверности контроля в системе.

В настоящей работе рассматривается возможность исследования нестационарных систем обслуживания, представленных не разомкнутым, а замкнутым циклическим графом состояний.

**Принцип баланса.** Исследователи различных по назначению и принципам действия систем, применяющие вероятностные методы, часто привлекают для достижения своих целей аппарат дифференциальных или интегральных уравнений. Во многих случаях рассматриваются марковские, полумарковские случайные процессы. Если необходимо рассматривать

немарковские процессы, то на помощь могут приходиться различные способы сведения немарковских процессов к марковским. Одним из таких способов является применение аппроксимации распределений вероятностей, на основе которой составляются и решаются дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Если рассмотреть соответствующий граф состояний марковского процесса, то можно заметить, что стационарная вероятность нахождения процесса не в начальном состоянии может быть найдена из условия вероятностного баланса. Под балансом понимается равенство сумм произведений интенсивностей на вероятности состояний, являющихся отправителями заявок (начальными вершинами дуг графа состояний), и сумм произведений интенсивностей на вероятности состояний получателей заявок (конечными вершинами дуг графа состояний). Иначе говоря, состояние процесса определяется как равновесное, когда среднестатистические характеристики входящих и выходящих случайных потоков взаимно уравниваются. Именно это может быть названо статистическим или вероятностным балансом состояний. Полученные уравнения для состояний процесса необходимо решить, чтобы найти стационарные вероятности состояний. Во временной области математическая формализация основывается на операциях умножения независимых интенсивностей и вероятностей и сложения полученных произведений вероятностей несоместных событий состояний процесса.

Обратимся к аналогу этого формального процесса не во временной, а в комплексной области, применив преобразование Лапласа, которое широко используется в прикладных задачах.

Предположим, что была получена система дифференциальных или интегральных уравнений, описывающая происходящий в системе обслуживания вероятностный процесс. Если к этой системе уравнений применить преобразование Лапласа, то можно ее представить как систему алгебраических уравнений, которая решается достаточно просто. Далее предположим, что интерес представляет только ее стационарное решение. Тогда временные характеристики — вероятности состояний — нужно заменить их изображениями в преобразовании Лапласа. Попаданию системы в некоторое состояние предшествует суммирование случайных временных интервалов траектории случайного процесса. В преобразовании Лапласа это представляется соответствующим произведением изображений плотностей вероятностей. Таким образом, для составления уравнений баланса состояний необходимо использовать соответствующие произведения изображений с их последующим суммированием. Эквивалентность двух различных рассматриваемых балансов, на наш взгляд, очевидна и в проверке не нуждается.

Не будем приводить общую математическую формализацию рассматриваемой задачи, а только ограничимся примером сравнительно простой структуры.

**Пример использования принципа баланса.** Пусть требуется найти вероятности состояний двухфазного немарковского процесса, граф состояний и переходов нестационарной системы обслуживания которого изображен на рис. 1, составим для него систему уравнений баланса.

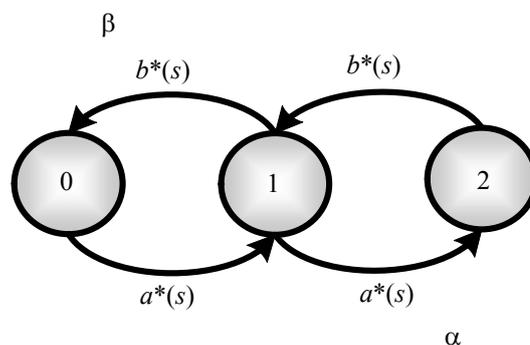


Рис. 1

Тогда получим:

$$\left. \begin{aligned} a^*(s)P_0^*(s) &= \beta b^*(s)P_1^*(s); \\ (\alpha a^*(s) + \beta b^*(s))P_1^*(s) &= a^*(s)P_0^*(s) + b^*(s)P_2^*(s); \\ b^*(s)P_2^*(s) &= \alpha a^*(s)P_1^*(s). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Принимая во внимание условие нормирования изображений вероятностей

$$\sum_{i=0}^2 P_i^*(s) = \frac{1}{s}$$

и решив систему уравнений (1), получим:

$$\left. \begin{aligned} P_0^*(s) &= \frac{\beta(b^*(s))^2}{s[\beta(b^*(s))^2 + a^*(s)b^*(s) + \alpha(a^*(s))^2]}; \\ P_1^*(s) &= \frac{a^*(s)b^*(s)}{s[\beta(b^*(s))^2 + a^*(s)b^*(s) + \alpha(a^*(s))^2]}; \\ P_2^*(s) &= \frac{\alpha(a^*(s))^2}{s[\beta(b^*(s))^2 + a^*(s)b^*(s) + \alpha(a^*(s))^2]}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Символы „\*“ и „s“ означают изображение и комплексную переменную Лапласа.

Используем следующие исходные данные:

— время между поступающими требованиями распределено по нормальному закону с плотностью вероятности

$$a(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}$$

и параметрами  $m = 20$  ч,  $\sigma = 5$  ч;

— время обслуживания требований также распределено по нормальному закону с плотностью вероятности

$$b(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{-\frac{(n-t)^2}{2\theta^2}}$$

и параметрами  $n = 15$  ч,  $\theta = 3$  ч.

Соответствующие функции распределений обозначим через  $A(t)$  и  $B(t)$ . Используя их, определим условные вероятности переходов при ветвлении случайного процесса из состояния 2 графа на рис. 1:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \int_0^{\infty} (1 - B(z)) dA(z) = 0,196; \\ \beta &= \int_0^{\infty} (1 - A(z)) dB(z) = 0,804. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Изображения Лапласа плотностей вероятностей найдем, используя гипердельтную аппроксимацию нормальной плотности по четырем начальным моментам, приведенную в [9]. Она представляется в виде

$$f_{н.ап}(t) = \frac{1}{2} (\delta(t - m - \sigma) + \delta(t - m + \sigma)), \quad (4)$$

где  $\delta$  — дельта-функция Дирака;  $m$  и  $\sigma$  — параметры аппроксимируемого распределения.

Применив формулу (4), получим аппроксимационные формулы плотностей вероятностей:

$$\begin{aligned} a(t) &\approx \frac{1}{2}(\delta(t-15) + \delta(t-25)); \\ b(t) &\approx \frac{1}{2}(\delta(t-12) + \delta(t-18)). \end{aligned} \quad (5)$$

В изображениях Лапласа они принимают вид:

$$\begin{aligned} a^*(s) &= \frac{1}{2}(e^{-15s} + (e^{-15s})^{5/3}); \\ b^*(s) &= \frac{1}{2}(e^{-12s} + (e^{-12s})^{3/2}). \end{aligned} \quad (6)$$

Подставив формулы (6) в уравнения (1), получим их в развернутом виде для приведенных числовых данных примера. Чтобы получить выражения для вероятностей состояний во временной области, необходимо применить обратное преобразование Лапласа. Однако достичь ожидаемых результатов затруднительно из-за сложности прямых изображений Лапласа искомым вероятностей и вычислительных трудностей работы с нормальными распределениями. Поэтому от изображений  $P_0^*(s), P_1^*(s), P_2^*(s)$  к оригиналам  $P_0(t), P_1(t), P_2(t)$  перейдем, применяя приближенный способ преобразования Лапласа с использованием формулы Алфрея, получаемой из формулы Уайдера [9] с учетом свойства фильтрации преобразования Лапласа, с помощью дельта-функции:

$$f(t) \approx s f^*(s) \text{ при } s = \frac{1}{t}. \quad (7)$$

В результате применения формулы (7) получим выражения для вероятностей состояний процесса:

$$\begin{aligned} P_0(t) &= \frac{0,804 \left( \frac{e^{-\frac{12}{t}}}{2} + \frac{\left( e^{-\frac{12}{t}} \right)^{\frac{3}{2}}}{2} \right)^2}{\left( \frac{e^{-\frac{12}{t}}}{2} + \frac{\left( e^{-\frac{12}{t}} \right)^{\frac{3}{2}}}{2} \right) \left( \frac{e^{-\frac{15}{t}}}{2} + \frac{\left( e^{-\frac{15}{t}} \right)^{\frac{5}{3}}}{2} \right) + 0,804 \left( \frac{e^{-\frac{12}{t}}}{2} + \frac{\left( e^{-\frac{12}{t}} \right)^{\frac{3}{2}}}{2} \right)^2 + 0,196 \left( \frac{e^{-\frac{15}{t}}}{2} + \frac{\left( e^{-\frac{15}{t}} \right)^{\frac{5}{3}}}{2} \right)^2}; \\ P_1(t) &= \frac{\left( \frac{e^{-\frac{15}{t}}}{2} + \frac{\left( e^{-\frac{15}{t}} \right)^{\frac{5}{3}}}{2} \right) \left( \frac{e^{-\frac{12}{t}}}{2} + \frac{\left( e^{-\frac{12}{t}} \right)^{\frac{3}{2}}}{2} \right)}{\left( \frac{e^{-\frac{12}{t}}}{2} + \frac{\left( e^{-\frac{12}{t}} \right)^{\frac{3}{2}}}{2} \right) \left( \frac{e^{-\frac{15}{t}}}{2} + \frac{\left( e^{-\frac{15}{t}} \right)^{\frac{5}{3}}}{2} \right) + 0,804 \left( \frac{e^{-\frac{12}{t}}}{2} + \frac{\left( e^{-\frac{12}{t}} \right)^{\frac{3}{2}}}{2} \right)^2 + 0,196 \left( \frac{e^{-\frac{15}{t}}}{2} + \frac{\left( e^{-\frac{15}{t}} \right)^{\frac{5}{3}}}{2} \right)^2}; \\ P_2(t) &= \frac{0,196 \left( \frac{e^{-\frac{15}{t}}}{2} + \frac{\left( e^{-\frac{15}{t}} \right)^{\frac{5}{3}}}{2} \right)^2}{\left( \frac{e^{-\frac{12}{t}}}{2} + \frac{\left( e^{-\frac{12}{t}} \right)^{\frac{3}{2}}}{2} \right) \left( \frac{e^{-\frac{15}{t}}}{2} + \frac{\left( e^{-\frac{15}{t}} \right)^{\frac{5}{3}}}{2} \right) + 0,804 \left( \frac{e^{-\frac{12}{t}}}{2} + \frac{\left( e^{-\frac{12}{t}} \right)^{\frac{3}{2}}}{2} \right)^2 + 0,196 \left( \frac{e^{-\frac{15}{t}}}{2} + \frac{\left( e^{-\frac{15}{t}} \right)^{\frac{5}{3}}}{2} \right)^2}. \end{aligned}$$

Численные результаты представлены в виде кривых вероятностей на рис. 2 (1 —  $P_0(t)$ , 2 —  $P_1(t)$ , 3 —  $P_2(t)$ ).

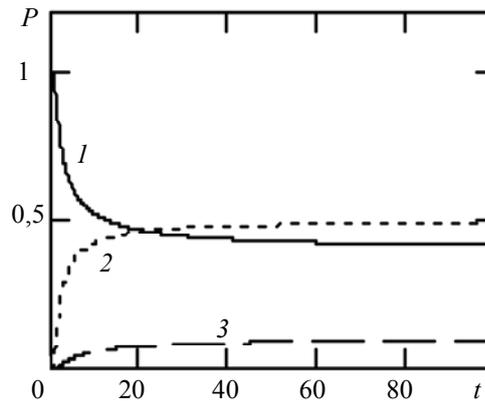


Рис. 2

Из полученных аналитических выражений можно найти стационарные значения этих вероятностей.

В условиях примера при начальных значениях вероятностей  $P_0(0,05) = 1$ ;  $P_1(0,5) = 0$ ;  $P_2(0,05) = 0$  они равны  $P_0(\infty) = 0,402$ ;  $P_1(\infty) = 0,5$ ;  $P_2(\infty) = 0,098$ .

**Заключение.** В статье рассмотрен метод расчета стационарных вероятностей состояний систем обслуживания, представленных графом с обратными связями. Для таких циклических систем обслуживания вместо систем дифференциальных или интегральных уравнений в теории случайных процессов предложено использовать алгебраические уравнения с записью вероятностей состояний в изображениях Лапласа.

Рекомендовано использовать принцип вероятностного баланса для описания состояний системы обслуживания в изображениях Лапласа. Получены и решены уравнения баланса состояний. Выполнено обратное преобразование Лапласа для перехода от изображений к вероятностям во временной области. Метод проиллюстрирован численным примером.

Результаты статьи могут быть применены для исследования многоциклических стационарных и нестационарных систем обслуживания, а также переходных процессов, протекающих в них. Результаты также предназначены для систем с различными видами временных задержек в их элементах при контроле и необходимости оценивания его достоверности.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cox D. R. A use of complex probabilities in the theory of stochastic processes // Proc. Cambr. Phil. Soc. 1955. Vol. 51. P. 313—319.
2. Риордан Дж. Вероятностные системы обслуживания. М.: Связь, 1966.
3. Смагин В. А. Об одном методе исследования немарковских систем // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1983. № 6. С. 31—36.
4. Смагин В. А. Вероятностный анализ комплексной переменной // Автоматика и вычислительная техника. 1999. № 5. С. 3—13.
5. Smagin V. A. Complex delta function and its information application // Automatic Control and Computer Sciences. 2014. Vol. 48, N 1. P. 10—16.
6. Гусеница Я. Н. Модификация динамической модели Липова для оценивания надежности программного обеспечения автоматизированных систем управления войсками и оружием при ограниченном объеме испытаний // Сб. тр. Всерос. науч.-техн. конф. „Теоретические и прикладные проблемы развития и совершенствования автоматизированных систем управления военного назначения“. СПб: ВКА им. А. Ф. Можайского, 2014. Т. 1, ч. 2. С. 126—132.

7. Гусеница Я. Н. Обобщенная модель разнотипных программных ошибок для оценивания надежности программного обеспечения // Научно-технические исследования в космических исследованиях Земли. 2015. Т. 7, № 5. С. 18—23.
8. Смагин В. А., Гусеница Я. Н. К вопросу моделирования одноканальных нестационарных систем с произвольными распределениями моментов времени поступления заявок и длительностей их обслуживания // Тр. ВКА им. А.Ф. Можайского. 2015. Вып. 649. С. 56—63.
9. Смагин В. А. Немарковские задачи теории надежности. Л.: МО СССР, 1982.

**Сведения об авторах**

- Владимир Александрович Смагин** — д-р техн. наук, профессор; ВКА им. А. Ф. Можайского, кафедра метрологического обеспечения вооружения, военной и специальной техники; E-mail: va\_smagin@mail.ru
- Ярослав Николаевич Гусеница** — канд. техн. наук; ВКА им. А. Ф. Можайского, кафедра метрологического обеспечения вооружения, военной и специальной техники; E-mail: yaromir226@mail.ru

Рекомендована кафедрой  
метрологического обеспечения вооружения,  
военной и специальной техники

Поступила в редакцию  
21.04.16 г.

**Ссылка для цитирования:** Смагин В. А., Гусеница Я. Н. Моделирование одноканальных нестационарных систем обслуживания, представленных циклическим графом состояний // Изв. вузов. Приборостроение. 2016. Т. 59, № 10. С. 801—806.

**MODELING SINGLE-CHANNEL NON-STATIONARY QUEUEING SYSTEMS PRESENTED  
IN THE FORM OF A CYCLIC GRAPH OF STATES**

**V. A. Smagin, Ya. N. Gusenitsa**

*A. F. Mozhaysky Military Space Academy, 197198, St. Petersburg, Russia  
E-mail: yaromir226@mail.ru*

A principle of probability balance of states is proposed for study of non-stationary queueing system. System of equations for the balance in the complex domain is derived and solved with the use of Laplace images. The inverse Laplace transform is performed for the transition from images to probabilities in the time domain. The developed method is recommended to study non-stationary queueing systems under arbitrary distributions.

**Keywords:** queueing system, complex probability of state, Laplace transform, balance of states, system of equations, probability in the time domain

**Data on authors**

- Vladimir A. Smagin** — Dr. Sci.; A. F. Mozhaysky Military Space Academy, Department of Metrological Maintenance of Arms, Military, and Special Equipment; E-mail: va\_smagin@mail.ru
- Yaroslav N. Gusenitsa** — PhD, A. F. Mozhaysky Military Space Academy, Department of Metrological Maintenance of Arms, Military, and Special Equipment; E-mail: yaromir226@mail.ru

**For citation:** Smagin V. A., Gusenitsa Ya. N. Modeling single-channel non-stationary queueing systems presented in the form of a cyclic graph of states // Izv. vuzov. Priborostroenie. 2016. Vol. 59, N 10. P. 801—806 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2016-59-10-801-806