УДК 621.01
DOI: 10.17586/0021-3454-2016-59-10-843-846

РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИКИ УПРУГИХ МЕМБРАННЫХ ЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

А. С. Козлов, Р. Я. Лабковская, О. И. Пирожникова, В. Л. Ткалич

Университет ИТМО, 197101, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: vera_leonidovna_tkalich@mail.ru

Представлены математические модели динамики упругих мембранных чувствительных элементов, входящих в состав тензорезистивных микродатчиков давления. Моделирование по методу конечных элементов осуществлено в условиях комплексных механических и температурных нагрузок на тензорезистивный микродатчик давления. При построении моделей учитывались силы вязкого трения, связанные с наличием контакта чувствительного элемента с вязкоупругим клеевым слоем. Адекватность предложенных моделей подтверждена сравнением расчетных значений с данными экспериментальных исследований. Разработанные математические модели динамики упругих мембранных чувствительных элементов позволяют обеспечить высокие показатели надежности и хорошую конкурентоспособность этой элементной базы систем управления. Созданный пакет прикладных программ, предназначенный для работы в современных компьютерных средах, позволяет визуализировать результаты, полученные при математическом моделировании динамики упругих мембранных чувствительных элементов.

Ключевые слова: *упругие мембранные чувствительные элементы, метод конечных элементов, комплексные воздействия, математические модели динамики, тензорезистивные микродатчики давления*

В состав тензорезистивных микродатчиков давления входят упругие мембранные чувствительные элементы (УМЧЭ), реагирующие на изменение механических и температурных нагрузок. Эти элементы находятся в непосредственном контакте с вязкоупругим клеевым слоем, что приводит к необходимости учета их нелинейных свойств. Вязкий клеевой слой обеспечивает передачу УМЧЭ не только полезного сигнала (измеряемое давление), но и вызванных механическими и температурными нагрузками помех, которые приводят к деформационным изменениям тензорезисторов и приращению их сопротивлений [1].

При моделировании динамики УМЧЭ целесообразно применять метод конечных элементов, базирующийся на ансамбле конечных элементов треугольной или четырехугольной формы с последующим разложением матрицы деформаций по главным формам свободных колебаний [2—4].

Анализ математических моделей динамики УМЧЭ с использованием метода конечных элементов осуществлялся с учетом сил вязкого трения. Приведем уравнение динамики в общем виде [1]:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}_1\mathbf{U} = \mathbf{F}(t, \mathbf{U}), \qquad (1)$$

где $\mathbf{F}(t, \mathbf{U}) = \mathbf{Q}(t) + \mathbf{K}_H\mathbf{U}$, $\mathbf{K}_H$ — матрица дополнительной жесткости, $\mathbf{K}_1$ — матрица изгибных жесткостей УМЧЭ, $\mathbf{M}$ — матрица масс, $\mathbf{C}$ — диссипативная матрица, $\mathbf{U}$ — вектор обобщенных перемещений, $\dot{\mathbf{U}}$ — вектор скоростей, $\ddot{\mathbf{U}}$ — вектор ускорений, $\mathbf{Q}(t)$ — вектор обобщенных силовых нагрузок.

Диссипативная матрица $\mathbf{C}$ может быть описана одним из следующих уравнений:

$$\mathbf{C}_1 = \beta_1\mathbf{M} + \beta_2\mathbf{K};$$

$$\mathbf{C}_2 = \mathbf{M}\varphi(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K});$$
$$\mathbf{C} = i\gamma\mathbf{K},$$

где β_1 и β_2 — коэффициенты демпфирования Рэлея, $\varphi(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K})$ — скалярная функция матрицы $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$, параметры которой подбираются экспериментально, $\mathbf{K}$ — матрица жесткости; $\gamma = \psi/2\pi$, $i = \sqrt{-1}$, ψ — коэффициент удельного рассеивания энергии в материале.

Собственные значения матрицы $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ обозначим через ψ_i $(i = 1, 2, ..., n)$, а координаты смещения каждого конечного элемента — через $u_i(t)$. Тогда вектор перемещения представляется выражением [3]:

$$\mathbf{U}(t) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i u_i(t).$$

Координаты смещения $u_i(t)$ каждого конечного элемента задаются уравнением:

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + \varphi_e \frac{d}{dt} + \omega_i^2\right] u_i(t) = q_i(t),$$

где ω_i — собственная частота свободных колебаний УМЧЭ, $i = 1, 2, ..., n$; $e \in \{1; 2; 3\}$ — индекс скалярной функции матрицы $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ в уравнении (1).

Передаточная функция может быть представлена выражением:

$$W_{ie}(s) = \left(1 + \frac{S\varphi_e}{\omega_i^2} + \frac{S^2}{\omega_i^2}\right)^{-1};$$
$$q_i(s) = p(s) q_i.$$

где q_i — постоянные коэффициенты, S — площадь срединной поверхности конечного элемента.

Тогда смещение конечного элемента УМЧЭ задается выражением:

$$U_i(s) = W_i(s) q_i \omega_i^{-2} p(s).$$

При этом вектор перемещений УМЧЭ принимает вид:

$$\mathbf{U}(s) = \sum_{i=1}^{n} W_i(s) q_i \omega_i^{-2} \psi_i p(s).$$

Результирующий вектор деформации УМЧЭ представляется выражением:

$$\mathbf{E}(x, s) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}_{ip}(x) W_i(s) p(s),$$

где $\mathbf{E}_{ip}(x)$ — парциальные деформации УМЧЭ в точке X, вызванные единичным статическим давлением.

Вычислить векторы $\mathbf{E}_{ip}(x)$ можно с помощью алгоритма [3], который базируется на спектральном расчете динамики УМЧЭ. Алгоритм позволяет проанализировать динамику УМЧЭ в случае воздействия импульса при монотонно возрастающем действии давления, которое воспринимается микродатчиком в качестве статической нагрузки.

Экстраполируя приведенные выражения для варианта комплексного нагружения УМЧЭ, запишем:

$$\mathbf{E}(x, s) = \sum_{i=1}^{n} W(s)[\mathbf{E}_{ip}(x) p(s) + \mathbf{E}_{ia}(x) a(s) + \mathbf{E}_{iT}(x) T(s)],$$

где $p(s)$ — давление; $a(s)$ — ускорение; $T(s)$— температурное поле; $\mathbf{E}_{ia}(x), \mathbf{E}_{iT}(x)$ — парциальные деформации УМЧЭ, вызванные ускорением и единичным приращением температуры.

Рассчитаем отклик УМЧЭ на воздействие длительной импульсной объемной нагрузки $\rho(x)\mathbf{\Phi}(x)$, где $\rho(x)$ — плотность материала УМЧЭ, $\mathbf{\Phi}(x)$ — вектор-функция, связанная с определением ускорений $a(x,t) = \mathbf{\Phi}(x)\mathbf{a}(t)$ по объему УМЧЭ.

Математическая модель динамики, которая предусматривает учет таких физических характеристик материалов УМЧЭ, как модули упругости и коэффициенты теплового расширения, а также удельные коэффициенты рассеивания энергии вязкоупругого клеевого слоя, определяемые для циклического одноосного нагружения образцов клея, тензорезисторных микродатчиков давления, описывается выражением:

$$\mathbf{E}(x,s) = \mathbf{W}_p(x,s)p(s) + \mathbf{W}_a(x,s)a(s) + \mathbf{W}_T(x,s)T(s),$$

где $\mathbf{W}_\alpha(x,s) = \sum_{i=1}^{n} W_i(s)E_{i\alpha}(x)$; $\alpha = p, a, T$, $W_p(x,s), W_a(x,s), W_T(x,s)$ — комплексные передаточные функции УМЧЭ для давления, ускорения и температуры.

Далее рассчитываются механические напряжения $\sigma(x, t)$ [4]:

$$\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon},$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ — вектор механических напряжений, $\boldsymbol{\varepsilon}$ — вектор перемещений, $\mathbf{E}$ — матрица упругостей УМЧЭ.

Таким образом, разработанная математическая модель динамики УМЧЭ тензорезистивных микродатчиков давления представляется общей передаточной функцией в комплексной форме, что позволяет перейти к оценке динамических погрешностей измеряемого давления в случае воздействия переменных механических и температурных нагрузок.

Полученные в работе модели и алгоритмы УМЧЭ реализованы в пакетах прикладных программ, работающих в современных компьютерных средах, что позволяет визуализировать полученные результаты, сделав предлагаемый математический аппарат удобным и наглядным для пользователя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лабковская Р. Я., Пирожникова О. И., Ткалич В. Л.* Метод повышения надежности упругих чувствительных элементов систем управления и автоматики // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. 2011. № 1(71). С. 136—138.

2. *Лабковская Р. Я., Ткалич В. Л., Пирожникова О. И.* Разработка библиотеки конечных элементов для САПР упругих конструкций герконов // Изв. вузов. Приборостроение. 2013. Т. 56, № 3. С. 21—24.

3. *Лабковская Р. Я., Ткалич В. Л.* Библиотека конечных элементов в приложении к упругим чувствительным элементам пластин и мембран датчиков систем управления // Научная перспектива. Уфа, 2010. № 3—4. С. 86—89.

4. *Лабковская Р. Я.* Исследование статики и динамики мембранных и пластинчатых электромеханических элементов систем управления // Сб. докл. конгр. молодых ученых. СПб: НИУ ИТМО, 2014. Вып. 1. С. 202—203.

Сведения об авторах

Алексей Сергеевич Козлов — аспирант; Университет ИТМО, кафедра проектирования и безопасности компьютерных систем; E-mail: zz.kozlov@gmail.com

Римма Яновна Лабковская — канд. техн. наук; Университет ИТМО, кафедра проектирования и безопасности компьютерных систем; E-mail: labkovskaya@mail.ifmo.ru

Ольга Игоревна Пирожникова — канд. техн. наук; Университет ИТМО, кафедра проектирования и безопасности компьютерных систем; E-mail: studsovet_itmo@mail.ru

Вера Леонидовна Ткалич — д-р техн. наук, профессор; Университет ИТМО, кафедра проектирования и безопасности компьютерных систем;
E-mail: vera_leonidovna_tkalich@mail.ru

Рекомендована кафедрой проектирования и безопасности компьютерных систем

Поступила в редакцию 26.02.16 г.

Ссылка для цитирования: *Козлов А. С., Лабковская Р. Я., Пирожникова О. И., Ткалич В. Л.* Разработка математических моделей динамики упругих мембранных чувствительных элементов систем управления // Изв. вузов. Приборостроение. 2016. Т. 59, № 10. С. 843—846.

DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL MODELS OF DYNAMICS OF ELASTIC MEMBRANE SENSITIVE ELEMENTS OF CONTROL SYSTEMS

A. S. Kozlov, R. Ya. Labkovskaya, O. I. Pirozhnikova, V. L. Tkalich

ITMO University, 197101, St. Petersburg, Russia
E-mail: vera_leonidovna_tkalich@mail.ru

Mathematical models of dynamics of elastic membrane sensitive elements in piezoresistive pressure microsensors are proposed. Modelling is carried out with the use of the method of finite elements by representing the membrane elastic sensitive element by an ensemble of triangular or quadrangular forms. The models account for viscous friction forces associated with the contact between the sensitive element and a viscoelastic adhesive layer. To confirm the proposed models adequacy, calculated model data are compared to results of experimental study. The developed mathematical models for the dynamics of elastic membrane sensitive elements are reported to provide high reliability and good competitiveness of this element base management systems. Created software package designed to work in modern computer environments allows to visualize the results obtained by mathematical modeling of the dynamics of elastic membrane of sensitive elements.

Keywords: membrane elastic sensitive elements, finite element method, complex influences, mathematical models of dynamics, piezoresistive pressure microsensors

Data on authors

Aleksei S. Kozlov — Post-Graduate Student; ITMO University, Department of Computer Systems Design; E-mail: zz.kozlov@gmail.com

Rimma Ya. Labkovskaya — PhD; ITMO University, Department of Computer Systems Design; E-mail: labkovskaya@mail.ifmo.ru

Olga I. Pirozhnikova — PhD; ITMO University, Department of Computer Systems Design; E-mail: studsovet_itmo@mail.ru

Vera L. Tkalich — Dr. Sci., Professor; ITMO University, Department of Computer Systems Design; E-mail: vera_leonidovna_tkalich@mail.ru

For citation: *Kozlov A. S., Labkovskaya R. Ya., Pirozhnikova O. I., Tkalich V. L.* Development of mathematical models of dynamics of elastic membrane sensitive elements of control systems // Izv. vuzov. Priborostroenie. 2016. Vol. 59, N 10. P. 843—846 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2016-59-10-843-846