

ОСОБЕННОСТИ ТРАЕКТОРИЙ СВОБОДНОГО ДВИЖЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОЙ СИСТЕМЫ В ВИДЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ ЦЕПОЧКИ ОДНОТИПНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ЗВЕНЬЕВ

Н. А. ВУНДЕР, А. В. УШАКОВ

*Университет ИТМО, 197101, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: polinova_nina@mail.ru*

Рассматривается устойчивая непрерывная система, матрица состояния которой обладает спектром кратных комплексно-сопряженных собственных чисел. Система реализована в виде последовательной цепочки одноподобных колебательных звеньев, поэтому кратность комплексно-сопряженных собственных чисел равна половине размерности ее вектора состояния. Рассмотрена ситуация, когда спектр собственных чисел представлен модифицированным распределением Баттерворта, так что он оказывается размещенным в секторе с раскрытием не более 60° . Установлено, что в этой ситуации уже при малых значениях мнимой части собственных чисел появляется заметное отклонение нормы свободного движения от монотонно убывающей кривой и величина отклонения тем больше, чем меньше по модулю вещественная составляющая собственного числа и чем больше его кратность и значение коэффициента усиления. Получено аналитическое решение проблемы исследования нормы свободного движения вектора состояния рассматриваемой системы, корректность решения подтверждена компьютерным экспериментом.

Ключевые слова: *комплексно-сопряженные собственные числа, модифицированное распределение Баттерворта, секторное ограничение, модифицированная жорданова форма, кратность, свободное движение, норма, отклонение*

Введение. Модифицированное распределение Баттерворта собственных чисел матрицы состояния системы, характеризующееся раскрытием сектора локализации, не превышающим 60° , является робастным и при этом обеспечивает переходные процессы в системе без переуправления независимо от ее порядка, что особенно важно при управлении уникальным технологическим оборудованием. В то же время, когда система управления с модифицированным распределением собственных чисел Баттерворта, реализованная в виде последовательной цепочки одноподобных колебательных звеньев, оказывается в ненулевом начальном состоянии, наблюдаются отклонения ее траекторий по норме вектора состояния от монотонно убывающей кривой. Системные ситуации, характеризующиеся ненулевым начальным состоянием технического объекта, порождаются внешними ситуационными причинами, такими как неожиданное прекращение электроснабжения системы с последующим его восстановлением. Установлено, что отклонения траекторий от монотонно убывающей кривой, в отличие от ситуаций, рассмотренных в работе [1], могут иметь место при любых значениях модуля вещественной части собственного отрицательного числа.

Постановка задачи. Рассматривается задача исследования свободного движения устойчивой линейной непрерывной многомерной динамической системы по норме вектора состояния в зависимости от кратности собственных комплексно-сопряженных чисел ее матрицы состояния, значений модулей вещественной и мнимой частей собственных чисел, а также коэффициента передачи колебательных звеньев. В рассматриваемом случае кратность собственного числа равна половине размерности вектора состояния. В этой ситуации наблюдается системное явление, состоящее в том, что в устойчивой системе при кратности собственных чисел, превышающей единицу, и произвольных значениях модулей их вещественной и мни-

мой частей, связанных соотношением секторного ограничения, а также при определенных значениях коэффициента передачи могут возникнуть заметные отклонения нормы вектора состояния при свободном движении от монотонно убывающей кривой. Настоящая статья является продолжением работы [1], а также развитием положений работ [2, 3]

Представление матрицы состояния непрерывной системы с кратными комплексно-сопряженными собственными числами в модифицированной жордановой форме. Рассматривается линейная непрерывная система в виде последовательной цепочки из $n/2$ однотипных колебательных звеньев (КЗ), описываемая передаточной функцией

$$\Phi(s) = \left(\frac{k}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1} \right)^{n/2} = \left(\frac{k\Omega^2}{s^2 + 2\zeta\Omega s + \Omega^2} \right)^{n/2}, \quad (1)$$

где $k, T, \zeta, \Omega=(T)^{-1}, n$ — коэффициент передачи, постоянная времени, коэффициент демпфирования, сопрягающая частота КЗ и полный порядок системы соответственно; s — оператор Лапласа.

Представим передаточную функцию (1) в форме

$$\Phi(s) = \left(\frac{\gamma^2}{s^2 + 2\alpha s + (\alpha^2 + \gamma\beta^2)} \right)^{n/2}, \quad (2)$$

где параметры γ, α и β удовлетворяют соотношениям

$$|\beta\sqrt{\gamma}| = |\alpha| \operatorname{tg} \rho, \rho \leq 30^\circ; \gamma = \Omega\sqrt{k}; \alpha = -\zeta\Omega, \beta^2 = \Omega(1 - \zeta^2)/\sqrt{k}. \quad (3)$$

Передаточная функция системы в виде цепочки однотипных КЗ, записанная в форме (2), порождает структурное представление системы, показанное на рис. 1.

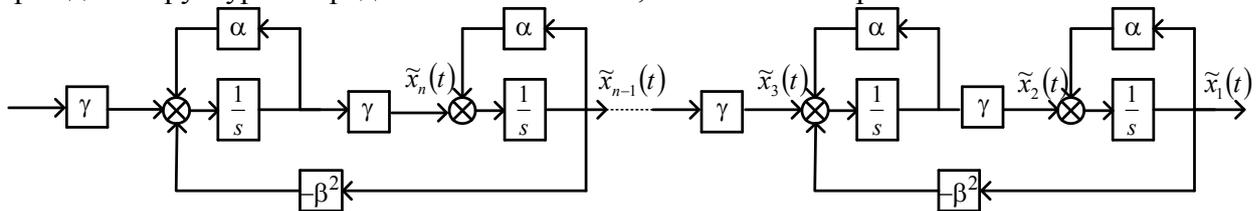


Рис. 1

Векторно-матричную форму непрерывной системы в виде последовательной цепочки однотипных КЗ зададим на основании структурного представления (см. рис. 1) ее передаточной функции (2) и исследуем особенности траекторий свободного движения системы. Тогда автономная версия системы примет вид

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{J}(\alpha, \beta, \gamma) \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t)|_{t=0} = \mathbf{x}(0), \quad (4)$$

где $\mathbf{x}(0) \in R^n, \mathbf{x}(t) \in R^n$ — векторы соответственно начального и текущего состояний системы; $\mathbf{J}(\alpha, \beta, \gamma)$ — $n \times n$ -матрица состояния системы, представляющая собой модифицированную жорданову матрицу:

$$\mathbf{J}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\beta^2 & \alpha & \gamma & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \gamma & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta^2 & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\beta^2 & \alpha \end{bmatrix}, \quad (5)$$

алгебраический спектр $\sigma\{\mathbf{J}(\alpha, \beta, \gamma)\}$ собственных чисел которой удовлетворяет условию

$$\sigma\{\mathbf{J}(\alpha, \beta, \gamma)\} = \left\{ \lambda_{2i-1;2i} = \arg \left[\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{J}(\alpha, \beta, \gamma)) = 0 \right] : \lambda_{2i-1;2i} = \alpha \pm j\beta\sqrt{\gamma}; i = \overline{1, n/2} \right\}. \quad (6)$$

Из условия (6) следует, что матрица $\mathbf{J}(\alpha, \beta, \gamma)$ имеет единственную пару комплексно-сопряженных собственных чисел кратностью $\nu = n/2$, где $n = \dim \mathbf{x}$.

Очевидно, что при $\beta \rightarrow 0$ модифицированная жорданова форма матрицы $\mathbf{J}(\alpha, \beta, \gamma)$ преобразуется в модифицированную жорданову форму

$$\mathbf{J}(\alpha, \gamma) = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \gamma & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \gamma & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad (7)$$

которой соответствует автономная система $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{J}(\alpha, \gamma) \mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x}(t)|_{t=0} = \mathbf{x}(0)$. Структурная реализация системы с матрицей состояния (7) представлена на рис. 2.

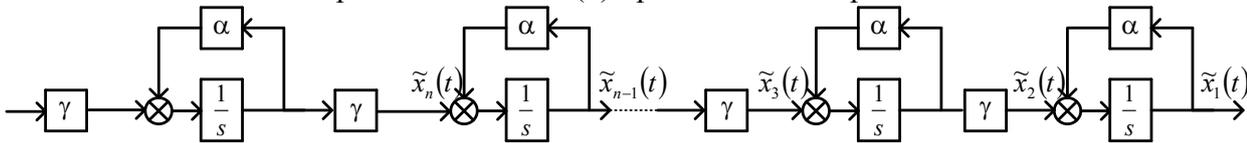


Рис. 2

Анализ представленной рис. 2 схемы показывает, что при $\beta = 0$ система в виде последовательной цепочки из $n/2$ однотипных колебательных звеньев вырождается в последовательную цепочку из n однотипных апериодических звеньев. Такая система рассмотрена в работе [1], где показано, что при $n > 1$ и значения α , удовлетворяющем условиям $\alpha < 0$ и $|\alpha| < \gamma$, на сходящихся траекториях свободного движения по норме вектора состояния возникают отклонения от монотонно убывающей кривой, которые тем больше, чем больше n и чем больше разница между $|\alpha|$ и γ .

В этой связи требуется оценить влияние значения $\beta \neq 0$ на качество процессов свободного движения как при выполнении условий $\alpha < 0$ и $|\alpha| < \gamma$, так и при их невыполнении. Очевидно, что поставленная задача является четырехпараметрической (с параметрами α , β , γ и n), в отличие от случаев, где решаемая задача была трехпараметрической [1, 2] и двухпараметрической [3]. Это значительно увеличивает количество параметрических реализаций исследуемой системы.

Исследование свободного движения непрерывной системы с матрицей состояния $\mathbf{J}(\alpha, \beta, \gamma)$. Исследуем свободное движение системы (4) по вектору ее состояния $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}(0))$:

$$\mathbf{x}(t) = \exp\{\mathbf{J}(\alpha, \beta, \gamma) t\} \mathbf{x}(0). \quad (8)$$

Отметим, что модифицированная жорданова форма $\mathbf{J}(\alpha, \beta, \gamma)$ представима в виде $\mathbf{J}(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha \mathbf{I} + \mathbf{J}(0, \beta, \gamma)$. Так как единичная матрица мультипликативно коммутативна с любой квадратной матрицей согласованной размерности, матричную экспоненту можно представить как

$$\exp\{\mathbf{J}(\alpha, \beta, \gamma) t\} = e^{\alpha t} \exp\{\mathbf{J}(0, \beta, \gamma) t\}. \quad (9)$$

К сожалению, в отличие от рассмотренных в работах [1, 3] случаев, модифицированная жорданова форма (5) с нулевыми элементами на главной диагонали $\mathbf{J}(0, \beta, \gamma)$ не обладает свойством нильпотентности [4], что не позволяет ее представить конечным числом компонентов разложения экспоненты. Однако она разложима на два элемента, которые этим свойством обладают:

$$\mathbf{J}(0, \beta, \gamma) = \text{diag}(\mathbf{J}_{2 \times 2}(0, \beta, 0)_i; i = \overline{1, n/2}) + \mathbf{J}(0, 0, \gamma),$$

где

$$\mathbf{J}_{2 \times 2}(0, \beta, 0)_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\beta^2 & 0 \end{bmatrix} = -\beta^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -\beta^2 \mathbf{J}_{2 \times 2}(0, 1, 0)_i; \quad \mathbf{J}(0, 0, \gamma) = \gamma \mathbf{J}(0, 0, 1).$$

Таким образом, модифицированная жорданова форма $\mathbf{J}(0, \beta, \gamma)$ допускает представление

$$\mathbf{J}(0, \beta, \gamma) = -\beta^2 \text{diag}(\mathbf{J}_{2 \times 2}(0, 1, 0)_i; i = \overline{1, n/2}) + \gamma \mathbf{J}(0, 0, 1),$$

в котором матричный компонент $\text{diag}(\mathbf{J}_{2 \times 2}(0, 1, 0)_i; i = \overline{1, n/2})$ обладает индексом ρ нильпотентности матрицы [4], равным двум ($\rho=2$), в свою очередь, матричный компонент $\mathbf{J}(0, 0, 1)$ обладает индексом нильпотентности, равным $n = \dim \mathbf{x}$ ($\rho=n$). Указанные матричные компоненты, однако, не обладают мультипликативной коммутативностью, поэтому не выполняется условие

$$\exp\{\mathbf{J}(0, \beta, \gamma)t\} \neq \exp\{-\beta^2 \text{diag}(\mathbf{J}_{2 \times 2}(0, 1, 0)_i; i = \overline{1, n/2})t\} \exp\{\gamma \mathbf{J}(0, 0, 1)t\}.$$

Осуществим скаляризацию векторного процесса (8) на основе использования согласованных [5] векторных и матричных норм, в результате чего получим цепочку соотношений

$$\|\mathbf{x}(t)\| = \|e^{at} \exp\{\mathbf{J}(0, \beta, \gamma)t\} \mathbf{x}(0)\| = e^{at} \|\exp\{\mathbf{J}(0, \beta, \gamma)t\} \mathbf{x}(0)\| \leq e^{at} \|\exp\{\mathbf{J}(0, \beta, \gamma)t\}\| \cdot \|\mathbf{x}(0)\|. \quad (9)$$

Вычислим матричную экспоненту $\exp\{\mathbf{J}(0, \beta, \gamma)t\}$ в выражении (9) для достаточно репрезентативной системной ситуации: $n = 6, \nu = n/2 = 3$. В результате получим цепочку равенств на основе вычисления обратного преобразования Лапласа от резольвенты:

$$\exp\{\mathbf{J}(0, \beta, \gamma)t\} = L^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{J}(0, \beta, \gamma))^{-1}\} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos q & \frac{\sqrt{\gamma}}{\beta} \sin q & \frac{(\sqrt{\gamma})^3}{2\beta} t \sin q & \frac{(\sqrt{\gamma})^3}{2\beta^3} (\sin q - q \cos q) & \frac{(\sqrt{\gamma})^5}{8\beta^3} t (\sin q - q \cos q) & \frac{(\sqrt{\gamma})^5}{8\beta^5} ((3 - q^2) \sin q - 3q \cos q) \\ -\frac{\beta}{\sqrt{\gamma}} \sin q & \cos q & \frac{\sqrt{\gamma}}{2\beta} (\sin q + q \cos q) & \frac{(\sqrt{\gamma})^3}{2\beta} t \sin q & \frac{(\sqrt{\gamma})^3}{8\beta^3} ((1 + q^2) \sin q - q \cos q) & \frac{(\sqrt{\gamma})^5}{8\beta^3} t (\sin q - q \cos q) \\ 0 & 0 & \cos q & \frac{\sqrt{\gamma}}{\beta} \sin q & \frac{(\sqrt{\gamma})^3}{2\beta} t \sin q & \frac{(\sqrt{\gamma})^3}{2\beta^3} (\sin q - q \cos q) \\ 0 & 0 & -\frac{\beta}{\sqrt{\gamma}} \sin q & \cos q & \frac{\sqrt{\gamma}}{2\beta} (\sin q + q \cos q) & \frac{(\sqrt{\gamma})^3}{2\beta} t \sin q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos q & \frac{\sqrt{\gamma}}{\beta} \sin q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\beta}{\sqrt{\gamma}} \sin q & \cos q \end{bmatrix}, \quad (10)$$

где $q = \sqrt{\gamma} \cdot \beta t$.

Как видно из (10), столбцевая (первая) норма $\|\exp\{\mathbf{J}(0, \beta, \gamma)t\}\|_1$ матричной экспоненты $\exp\{\mathbf{J}(0, \beta, \gamma)t\}$ и ее строчная (бесконечная) норма $\|\exp\{\mathbf{J}(0, \beta, \gamma)t\}\|_\infty$ совпадают. Для дальнейших исследований целесообразно [6] привести следующее утверждение.

Утверждение. Пусть задана линейная алгебраическая система $\dot{\eta} = \mathbf{N}\eta$, где $\dim \eta = \dim \chi = n$, $\dim \mathbf{N} = (n \times n)$. Необходимо показать, что спектральная норма $\|\mathbf{N}\|_2$ квадратной матрицы \mathbf{N} удовлетворяет условию

$$\|\mathbf{N}\|_2 \leq (\|\mathbf{N}\|_1 \cdot \|\mathbf{N}\|_\infty)^{1/2}. \quad (11)$$

Доказательство. Очевидно [5], вектор η удовлетворяет векторно-матричному соотношению $\mathbf{N}^T \mathbf{N} \eta = \mu \eta$, где $\mu = \arg(\det(\mu \mathbf{I} - \mathbf{N}^T \mathbf{N}) = 0)$, при этом $(\|\mathbf{N}\|_2)^2 = \mu$. В свою очередь, если в выражении $\mathbf{N}^T \mathbf{N} \eta = \mu \eta$ перейти к нормам, то получим цепочку соотношений

$$\mu \|\eta\|_1 = (\|\mathbf{N}\|_2)^2 \|\eta\|_1 = \|\mathbf{N}^T \mathbf{N} \eta\|_1 \leq \|\mathbf{N}^T\|_1 \cdot \|\mathbf{N}\|_1 \cdot \|\eta\|_1 = \|\mathbf{N}\|_\infty \cdot \|\mathbf{N}\|_1 \cdot \|\eta\|_1.$$

Так как полученная цепочка соотношений справедлива для $\forall \eta \neq 0$, то утверждение доказано. ■

Если теперь воспользоваться положением (11) применительно к выражению (10), то получим мажорирующее неравенство

$$\|\exp\{\tilde{\mathbf{J}}(0, \beta, \gamma)t\}\|_2 \leq \left\{ \|\exp\{\tilde{\mathbf{J}}(0, \beta, \gamma)t\}\|_1 \cdot \|\exp\{\tilde{\mathbf{J}}(0, \beta, \gamma)t\}\|_\infty \right\}^{1/2}.$$

Очевидно, в силу равенства первой и бесконечной норм матричной экспоненты оказывается справедлива оценка ее спектральной нормы:

$$\|\exp\{\tilde{\mathbf{J}}(0, \beta, \gamma)t\}\|_2 \leq \|\exp\{\tilde{\mathbf{J}}(0, \beta, \gamma)t\}\|_1 = \|\exp\{\tilde{\mathbf{J}}(0, \beta, \gamma)t\}\|_\infty.$$

Компьютерное исследование. При компьютерном исследовании процессов по норме $\|\mathbf{x}(t)\|$ как функции кратности $\nu = n/2$ требуется оценить влияние значения $\beta \neq 0$ на качество процессов свободного движения как при выполнении условий $\alpha < 0$ и $|\alpha| < \gamma$, так и в случае их невыполнения при ограничении $|\beta\sqrt{\gamma}| = |\alpha| \operatorname{tg} \rho$, $\rho \leq 30^\circ$. При компьютерном исследовании учитывается, что поставленная задача оказывается четырехпараметрической, где параметрами являются α , β , γ и n .

Рассмотрим 4 серии траекторий свободного движения непрерывной системы в виде последовательной цепочки однотипных колебательных звеньев по норме вектора ее состояния, задаваемой в форме (4). Первая серия представлена на рис. 3, а ($n=4$) и 3, б ($n=6$) для случая сочетания параметров четырехпараметрической задачи, приведенных в табл. 1.

Таблица 1

Номер траектории*	α	β	γ	Условие	Секторное ограничение
1	-2	0,667	3	$ \alpha < \gamma$	$\beta\sqrt{\gamma} = \alpha \operatorname{tg} \rho$: $\rho = 30^\circ$
2	-3	1	3	$ \alpha = \gamma$	
3	-5	1,667	3	$ \alpha > \gamma$	

Примечание. Здесь и далее номера траекторий — есть номера кривых на соответствующих рисунках

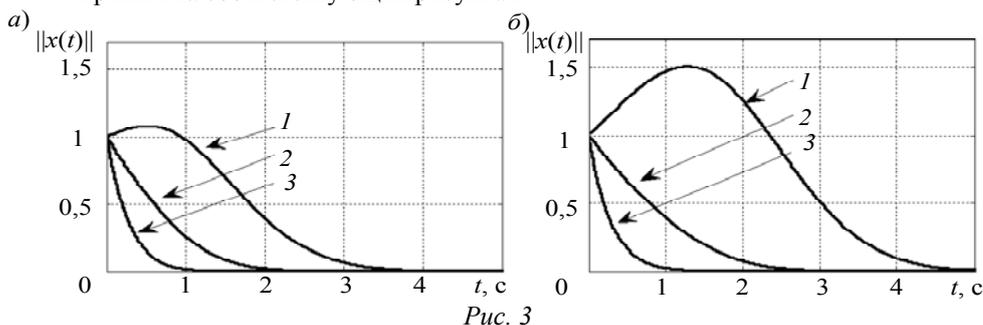


Рис. 3

Вторая серия траекторий представлена на рис. 4, а ($n=4$) и 4, б ($n=6$) для случая сочетания параметров четырехпараметрической задачи, приведенных в табл. 2.

Таблица 2

Номер траектории	α	β	γ	Условие	Секторное ограничение
1	-2	3	0,148	$ \alpha > \gamma$	$\beta\sqrt{\gamma} = \alpha \operatorname{tg} \rho : \rho = 30^\circ$
2	-3	3	0,333	$ \alpha > \gamma$	
3	-5	3	0,926	$ \alpha > \gamma$	

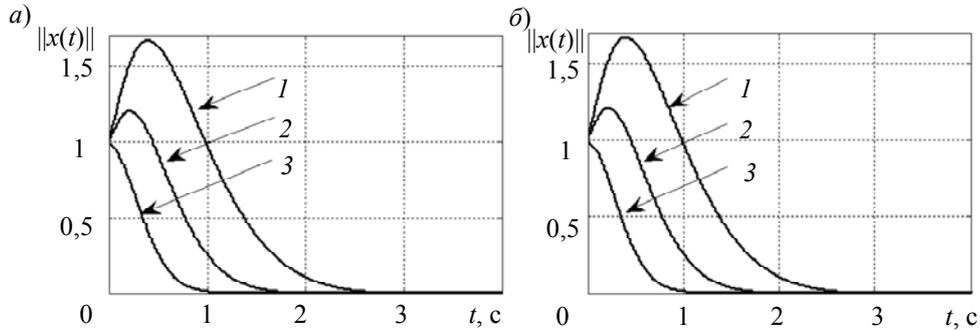


Рис. 4

Третья серия траекторий для случая сочетания параметров, приведенных в табл. 3 при различных секторных ограничениях, представлена на рис. 5, а ($\rho=45^\circ, n=6$) и 5, б ($\rho=60^\circ, n=6$).

Таблица 3

Номер траектории	α	β	γ	Условие	Секторное ограничение
1	-2	1,155	3	$ \alpha < \gamma$	$\beta\sqrt{\gamma} = \alpha \operatorname{tg} \rho : \rho = 45^\circ$
2	-3	1,732	3	$ \alpha = \gamma$	
3	-5	2,887	3	$ \alpha > \gamma$	
1	-2	2	3	$ \alpha < \gamma$	$\beta\sqrt{\gamma} = \alpha \operatorname{tg} \rho : \rho = 60^\circ$
2	-3	3	3	$ \alpha = \gamma$	
3	-5	5	3	$ \alpha > \gamma$	

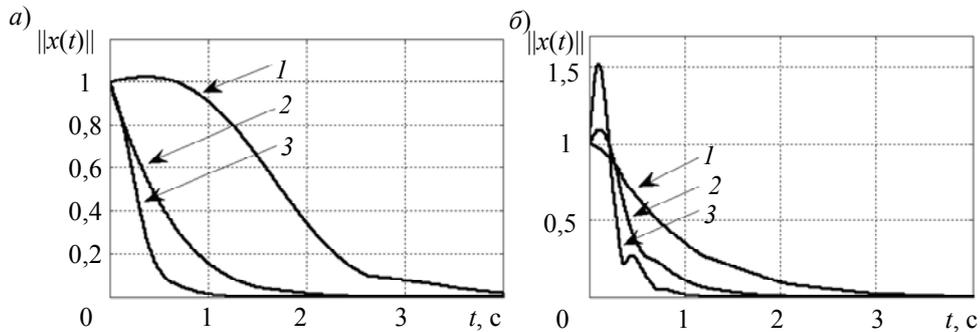


Рис. 5

Четвертая серия траекторий для случая сочетания параметров, приведенных в табл. 4 при различных секторных ограничениях, представлена на рис. 6, а ($\rho=45^\circ, n=6$) и 5, б ($\rho=60^\circ, n=6$).

Таблица 4

Номер траектории	α	β	γ	Условие	Секторное ограничение
1	-2	3	0,444	$ \alpha > \gamma$	$\beta\sqrt{\gamma} = \alpha \operatorname{tg} \rho : \rho = 45^\circ$
2	-3	3	1	$ \alpha > \gamma$	
3	-5	3	2,778	$ \alpha > \gamma$	
1	-2	3	1,333	$ \alpha > \gamma$	$\beta\sqrt{\gamma} = \alpha \operatorname{tg} \rho : \rho = 60^\circ$
2	-3	3	3	$ \alpha = \gamma$	
3	-5	3	8,333	$ \alpha < \gamma$	

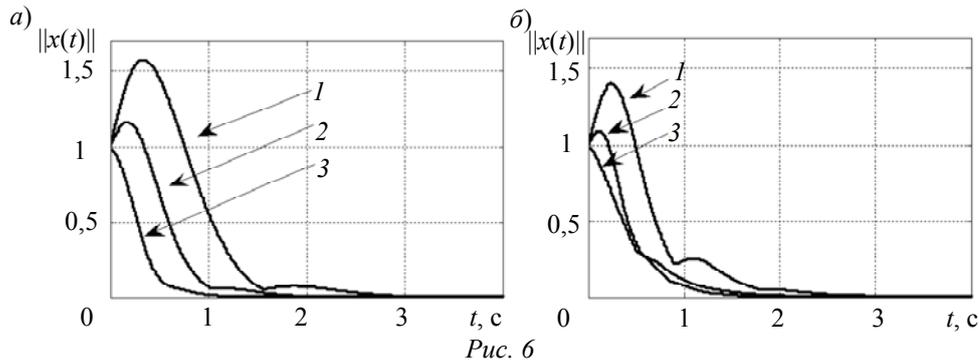


Рис. 6

Заключение. Проведено аналитическое и компьютерное исследование устойчивой непрерывной системы, матрица состояния которой обладает спектром кратных комплексно-сопряженных собственных чисел, кратность чисел равна размерности вектора состояния системы. Подтверждено, что действительно уже при малых значениях мнимой части собственных чисел появляется заметное отклонение нормы свободного движения от монотонно убывающей кривой и величина отклонения тем больше, чем меньше по модулю вещественная составляющая собственного числа и чем больше его кратность и значение коэффициента усиления.

Работа выполнена при поддержке Правительства Российской Федерации (грант 074-U01), Министерства образования и науки РФ (проект 14.Z50.31.0031), гранта Президента Российской Федерации (№ 14.Y31.16.9281-НШ).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вундер Н. А., Нуйя О. С., Пещеров Р. О., Ушаков А. В. Исследование особенностей траекторий свободного движения непрерывной системы в форме последовательной цепочки однопериодических звеньев // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2016. Т. 16, № 1. С. 68—75.
2. Акунов Т. А., Дударенко Н. А., Полинова Н. А., Ушаков А. В. Исследование процессов в непрерывных системах с кратными комплексно-сопряженными собственными числами их матриц состояния // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2013. № 4 (86). С. 25—33.
3. Акунов Т. А., Дударенко Н. А., Полинова Н. А., Ушаков А. В. Исследование колебательности процессов в аperiodических непрерывных системах, порождаемой фактором кратности собственных чисел // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2013. № 3 (85). С. 55—61.
4. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969. 368 с.
5. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1973. 575 с.
6. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления: Пер. с англ. М.: Мир, 1999. 548 с.

Сведения об авторах

Нина Александровна Вундер

— аспирант; Университет ИТМО; кафедра систем управления и информатики; E-mail: polinova_nina@mail.ru

Анатолий Владимирович Ушаков

— д-р техн. наук, профессор; Университет ИТМО; кафедра систем управления и информатики; E-mail: ushakov-avg@yandex.ru

Рекомендована кафедрой систем управления и информатики

Поступила в редакцию 21.03.17 г.

Ссылка для цитирования: Вундер Н. А., Ушаков А. В. Особенности траекторий свободного движения непрерывной системы в виде последовательной цепочки однопериодических колебательных звеньев // Изв. вузов. Приборостроение. 2017. Т. 60, № 9. С. 826—833.

PECULIARITIES OF FREE-MOTION TRAJECTORIES OF CONTINUOUS SYSTEM
IN THE FORM OF A SEQUENCE OF IDENTICAL OSCILLATORY UNITS

N. A. Vunder, A. V. Ushakov

ITMO University, 197101, St. Petersburg, Russia
E-mail: polinova_nina@mail.ru

A stable continuous system with multiple complex conjugate eigenvalues of state matrix is considered. The system is realized as a consecutive chain of identical oscillatory links, so that the eigenvalue multiplicity is equal to half of state vector dimension. The case under investigation presupposes that the eigenvalues spectrum is represented by a modified Butterworth distribution and lies in a sector not wider than 60° . It is found that free motion norm of the system may demonstrate a considerable deviation from a monotonically decreasing curve even at small imaginary part of eigenvalues. The deviation is the greater the smaller is the eigenvalue real part modulus and the greater is its multiplicity and the gain coefficient. An analytical solution to the problem of free motion system state vector norm is derived, the solution correctness is verified by computer modeling.

Keywords: complex-conjugate eigenvalues, modified Butterworth distribution, sectoral restriction, modified Jordan form, multiplicity, free motion, norm, deviation

Data on authors

- Nina A. Vunder** — Post-Graduate Student; ITMO University, Department of Computer Science and Control Systems; E-mail: polinova_nina@mail.ru
Anatoly V. Ushakov — Dr. Sci., Professor; ITMO University, Department of Computer Science and Control Systems; E-mail: ushakov-avg@yandex.ru

For citation: Vunder N. A., Ushakov A. V. Peculiarities of free-motion trajectories of continuous system in the form of a sequence of identical oscillatory units. *Journal of Instrument Engineering*. 2017. Vol. 60, N 9. P. 826—833 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2017-60-9-826-833