УДК 004.056.53
DOI: 10.17586/0021-3454-2017-60-12-1119-1123

ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОТ МАТРИЦ МЕТОДОМ СУММИРОВАНИЯ МАТРИЧНЫХ РЯДОВ

А. И. Коршунов

Военно-морской политехнический институт ВУНЦ ВМФ „Военно-морская академия им. Н. Г. Кузнецова“,
198514, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: a.i.korshunov@mail.ru

Рассмотрены особенности вычисления в общем виде аналитической функции матричного аргумента, заданной сходящимся бесконечным рядом. Предложен метод вычисления переходной матрицы линейной стационарной системы и других функций от матриц, использующий суммирование матричных рядов. Метод основан на использовании равенства аналитической функции матричного аргумента, заданной бесконечным рядом, сходящимся на спектре матрицы, и полинома от матрицы, совпадающего на спектре матрицы с аналитической функцией. Рассмотрен пример вычисления переходной матрицы линейной стационарной системы с использованием преобразования Лапласа, а также предлагаемого метода. Продемонстрирована бóльшая простота вычисления предлагаемым методом по сравнению с широко используемым в инженерной практике методом, основанным на преобразовании Лапласа.

Ключевые слова: *аналитическая функция матричного аргумента, переходная матрица, вычисление, суммирование матричных рядов*

Современные ЭВМ позволяют вычислять значение функции от матрицы, определенной бесконечным рядом, практически с любой нужной точностью. Примером служит часто используемая в исследованиях систем автоматического управления [1] переходная матрица системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$H(t) = \exp(At) = \sum_{i=0}^{\infty} A^i \frac{t^i}{i!},$$

где A — квадратная матрица системы дифференциальных уравнений, t — время.

Однако в аналитических исследованиях во многих случаях необходимо использовать аналитическое выражение $H(t)$. Обычно переходную матрицу в виде конечного аналитического выражения получают методом приведения матрицы A к диагональной (квазидиагональной) форме или методом преобразования Лапласа [2—5]. В обоих случаях необходимо знать собственные значения матрицы A. Трудоемкость в обоих случаях многократно возрастает при увеличении порядка матрицы. Поэтому разработка менее трудоемких методов вычисления функций от матриц в конечной аналитической форме остается актуальной задачей. Таковым является метод, основанный на суммировании бесконечного матричного ряда, определяющего функцию от матрицы. Его основой служит метод, применяемый при доказательстве сходимости ряда [6]:

$$f(A)=f(z)\big|_{z=A}=a_0E+a_1A+a_2A^2+...+a_mA^m+..., \tag{1}$$

($f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+...+a_mz^m+...$ — аналитическая, т.е. бесконечное число раз дифференцируемая, функция комплексного переменного z, заданная рядом с радиусом сходимости ρ), и собственных значениях квадратной числовой матрицы A, лежащих внутри круга сходимости ряда:

$$|\lambda_i|<\rho, \quad i=1,2,...,n,$$

λ_i — собственные значения матрицы A. Заметим, что функции $f(z)$ и $f(A)$ различаются тем, что первая принимает комплексные значения, а вторая — матричные, в общем случае комплексные; ее значение определяется подстановкой в тот же полином матрицы A вместо комплексного числа z. Для квадратной матрицы, как известно [6—8], определены все операции, необходимые при вычислении значения полинома: возведение в степень, умножение на константу и сложение.

В монографии [6, теорема 29] доказано, что матричный ряд (1) сходится и совпадает с многочленом от A: $\varphi(A)$ степени $\mu\le k-1$, где k — степень минимального аннулирующего матрицу A многочлена $\Delta(z)$ (многочлена минимальной степени, обращающегося в нулевую матрицу при подстановке вместо z матрицы A), $\varphi(z)=\alpha_{k-1}z^{k-1}+\alpha_{k-2}z^{k-2}+...+\alpha_1z+\alpha_0$ — полином, заданный на спектре матрицы A. Если известны попарно различные корни полинома $\Delta(z):\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_r$ кратности $k_1,k_2,...,k_r, k_1+k_2+...+k_r=k$, то коэффициенты полинома $\varphi(z)$ находятся из системы k уравнений:

$$\frac{d^{l_i}}{dz^{l_i}}\varphi(z)\big|_{z=\lambda_i}=\frac{d^{l_i}}{dz^{l_i}}f(z)\big|_{z=\lambda_i}, \quad l_i=0,1,...,k_i, \quad i=1,2,...,r. \tag{2}$$

Во многих случаях минимальный аннулирующий многочлен совпадает с характеристическим полиномом матрицы, например, при ее простых собственных значениях. Однако степень аннулирующего многочлена $\Delta(z)$ меньше степени характеристического полинома [7, 8] для $c(z)=\det(zE-A), E=\operatorname{diag}\{1\}$ — единичная матрица, $(zE-A)$ — характеристическая матрица матрицы A.

В общем случае [7, 8]:

$$\Delta(z)=\frac{c(z)}{D_{n-1}(z)}, \tag{3}$$

где $D_{n-1}(z)$ — наибольший общий делитель всех миноров (n–1)-го порядка характеристической матрицы $zE-A$.

Для сравнения предлагаемого метода с наиболее часто применяемым в инженерной практике методом, использующим преобразование Лапласа, вычислим переходную матрицу:

$$H(t)=\exp(At), \ A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -a_0 & -a_1\end{bmatrix}, \quad a_0,\ a_1=\text{const}$$

системы дифференциальных уравнений;

$$\frac{d}{dt}X=AX, \tag{4}$$

$X=[x,x_2]^T$ — вектор-столбец.

При заданных начальных условиях $X(0)=X_0$ решение системы (4), как известно [2—5], имеет вид

$$X(t)=H(t)X_0, \tag{5}$$

где $H(t)=\begin{bmatrix} h_{11}(t) & h_{12}(t) \\ h_{21}(t) & h_{22}(t) \end{bmatrix}=\exp(At)$.

Следуя методу преобразования Лапласа, получим:

$$X(p)=(pE-A)^{-1}X_0, \tag{6}$$

откуда обратным преобразованием Лапласа находим

$$H(t)=L^{-1}\left\{(pE-A)^{-1}\right\}. \tag{7}$$

Процедуру вычисления обратной характеристической матрицы, трудоемкость которой многократно возрастает с увеличением n — порядка матрицы A, можно исключить. Для этого следует решить систему линейных уравнений.

$$(pE-A)X(p)=X_0, \quad X_0^T=\left[x_{10},x_{20},...,x_{j0},...,x_{n0}\right], \tag{8}$$

что дает $x_i(p)=\sum\limits_{j=1}^{n}h_{ij}(p)x_{j0},\ h_{ij}(t)=L^{-1}\left\{h_{ij}(p)\right\},\ i=1,\ 2,...,n.$

В рассматриваемом примере эта система

$$\left.\begin{aligned} &px_1(p)-x_2(p)=x_{10}, \\ &a_0x_1(p)+(p+a_1)x_2(p)=x_{20} \end{aligned}\right\}$$

имеет решение:

$$x_1(p)=\frac{(p+a_1)x_{10}+x_{20}}{D(p)}, \quad x_2(p)=\frac{-a_0x_1(p)+px_{20}}{D(p)}, \quad D(p)=p^2+a_1p+a_0.$$

Отсюда при различных собственных значениях матрицы A ($\lambda_1\neq\lambda_2$) следует

$$h_{11}(t)=L^{-1}\left\{\frac{p+a_1}{D(p)}\right\}=\frac{\lambda_1e^{\lambda_2t}-\lambda_2e^{\lambda_1t}}{\lambda_1-\lambda_2}, \quad h_{12}(t)=L^{-1}\left\{\frac{1}{D(p)}\right\}=\frac{e^{\lambda_1t}-e^{\lambda_2t}}{\lambda_1-\lambda_2},$$

$$h_{21}(t)=L^{-1}\left\{\frac{-a_0}{D(p)}\right\}=-a_0\frac{e^{\lambda_1t}-e^{\lambda_2t}}{\lambda_1-\lambda_2}, \quad h_{22}(t)=L^{-1}\left\{\frac{p}{D(p)}\right\}=\frac{\lambda_1e^{\lambda_1t}-\lambda_2e^{\lambda_2t}}{\lambda_1-\lambda_2},$$

где $\lambda_{12}=-a_1/2\pm\sqrt{a_1^2/4-a_0}$ — корни характеристического уравнения $p^2+a_1p+a_0=0$.

В случае λ_1=λ_2=$\lambda=-a_1/2$ $(a_1^2=4a_0)$ предельный переход при $\lambda_2\to\lambda_1$ дает

$$h_{11}(t)=\left(1+\frac{a_1}{2}t\right)e^{\lambda t}, \quad h_{12}(t)=te^{\lambda t}, \quad h_{21}(t)=-a_0te^{\lambda t}, \quad h_{22}(t)=\left(1-\frac{a_1}{2}t\right)e^{\lambda t}.$$

Следуя предлагаемому методу и учитывая, что при простых корнях характеристического уравнения λ_1, λ_2 минимальный аннулирующий многочлен $\Delta(z)$ имеет порядок k=n=2, определим коэффициенты имеющего порядок k–1=1 полинома $\varphi(z)=\alpha_1z+\alpha_0$, заданного на спектре матрицы $At\left(\lambda_1t,\ \lambda_2t\right)$, из системы уравнений (2):

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1\lambda_1t+\alpha_0=e^{\lambda_1t}, \\ &\alpha_1\lambda_2t+\alpha_0=e^{\lambda_2t}. \end{aligned}\right\}$$

Решение этой системы уравнений дает:

$$\alpha_1=\frac{e^{\lambda_1 t}-e^{\lambda_2 t}}{(\lambda_1-\lambda_2)t};\quad \alpha_0=\frac{\lambda_1 te^{\lambda_2 t}-\lambda_2 te^{\lambda_1 t}}{(\lambda_1-\lambda_2)t};\quad H(t)=\exp(At)=\varphi(At)=\alpha_1 At+\alpha_0 E=$$

$$=\frac{e^{\lambda_1 t}-e^{\lambda_2 t}}{(\lambda_1-\lambda_2)t}\begin{bmatrix}0 & t\\ -a_0 t & -a_1 t\end{bmatrix}+\frac{\lambda_1 te^{\lambda_2 t}-\lambda_2 te^{\lambda_1 t}}{(\lambda_1-\lambda_2)t}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\lambda_1 e^{\lambda_2 t}-\lambda_2 e^{\lambda_1 t}}{\lambda_1-\lambda_2} & \dfrac{e^{\lambda_1 t}-e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1-\lambda_2}\\ -a_0\dfrac{e^{\lambda_1 t}-e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1-\lambda_2} & \dfrac{\lambda_1 e^{\lambda_1 t}-\lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1-\lambda_2}\end{bmatrix}.$$

Это совпадает с результатом, полученным преобразованием Лапласа.

В случае $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ определяем $D_{n-1}(z)$ по вычисленным минорам порядка n–1=2–1=1 характеристической матрицы:

$$zE-A=\begin{bmatrix}z & -1\\ a_0 & z+a_1\end{bmatrix},\text{ или }\begin{bmatrix}z+a_1 & -a_0\\ 1 & z\end{bmatrix}.$$

Очевидно, что как наибольший общий множитель миноров $z+a_1$, $-a_0$, 1, z — $D_{n-1}=1$. Согласно формуле (3), многочлен $\Delta(z)$ совпадает с характеристическим полиномом и, следовательно, имеет порядок k=2, а полином $\varphi(z)$ имеет порядок k–1=2–1=1, т.е. $\varphi(z)=\alpha_1 z+\alpha_0$.

Система уравнений для определения коэффициентов α_1 и α_0, согласно (2), имеет вид:

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_1\lambda t+\alpha_0=e^{\lambda t},\\ &\alpha_1=e^{\lambda t},\end{aligned}\right\}$$

откуда

$$\alpha_1=e^{\lambda t},\quad \alpha_0=(1-\lambda t)e^{\lambda t}.$$

Переходная матрица в этом случае получена с учетом $\lambda=-a_1/2$ в виде:

$$H(t)=e^{\lambda t}\begin{bmatrix}0 & t\\ -a_0 t & -a_1 t\end{bmatrix}+(1-\lambda t)e^{\lambda t}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\left(1+\dfrac{a_1}{2}t\right)e^{\lambda t} & te^{\lambda t}\\ -a_0 te^{\lambda t} & \left(1-\dfrac{a_1}{2}t\right)e^{\lambda t}\end{bmatrix},$$

что совпадает с результатом, полученным предельным переходом.

Как показал рассмотренный пример, в случае простых корней матрицы предлагаемый метод менее трудоемок, он не требует таких трудноформализуемых операций, как обратное преобразование Лапласа. Несколько усложняется использование метода при наличии кратных собственных значений матрицы вследствие необходимости вычисления алгебраических дополнений элементов характеристической матрицы и определения их наибольшего общего делителя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коршунов А. И.* Численный метод построения реакции автоматической системы // Изв. вузов СССР. Приборостроение. 1985. № 29. С. 16—22.
2. *Бромберг П. В.* Матричные методы в теории линейного и импульсного регулирования. М.: Наука, 1967. 324 с.
3. *Сю Д., Мейер А.* Современная теория автоматического управления и ее применение. М.: Машиностроение, 1972. 544 с.
4. Современная теория систем управления / Под ред. *К. Т. Леондеса*. М.: Наука, 1970. 511 с.
5. *Деруссо П., Рой Р., Клоуз Ч.* Пространство состояний в теории управления. М.: Наука, 1970. 620 с.
6. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1965. 332 с.
7. *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1977. 280 с.

8. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988. 552 с.

Сведения об авторе

Анатолий Иванович Коршунов — д-р техн. наук, профессор; Военно-морской политехнический институт ВУНЦ ВМФ „Военно-морская академия им. Н. Г. Кузнецова", кафедра радиоэлектроники; E-mail: a.i.korshunov@mail.ru

Рекомендована кафедрой радиоэлектроники

Поступила в редакцию 21.03.17 г.

Ссылка для цитирования: *Коршунов А. И.* Вычисление функций от матриц методом суммирования матричных рядов // Изв. вузов. Приборостроение. 2017. Т. 60, № 12. С. 1119—1123.

CALCULATION OF FUNCTIONS FROM MATRIX BY METHOD OF SUMMING OF MATRIX SERIES

A. I. Korshunov

N. G. Kuznetsov Naval Academy, Naval Polytechnic Institute,
198514, St. Petersburg, Russia
E-mail: a.i.korshunov@mail.ru

The features of computing of an analytic function of a matrix argument given by a convergent infinite series are considered in the general form. A method is proposed for calculating the transition matrix of a linear stationary system and other functions of matrices, using summation of matrix series. The method is based on the use of the equality of the analytic function of the matrix argument given by an infinite series that converges on the spectrum of the matrix, and the polynomial from the matrix that coincides on the spectrum of the matrix with the analytic function. An example of the calculation of the transition matrix of a linear stationary system using the Laplace transform and the proposed method is considered. The comparison with the method widely used in engineering practice, based on the Laplace transform, demonstrates a much greater simplicity of calculation by the proposed method.

Keywords: analytical functions of matrix argument, transitional matrix, calculation, summation of matrix series

Data on author

Anatoly I. Korshunov — Dr. Sci., Professor; N. G. Kuznetsov Naval Academy, Naval Polytechnic Institute, Department of Radio-Electronics; E-mail: a.i.korshunov@mail.ru

For citation: Korshunov A. I. Calculation of functions from matrix by method of summing of matrix series. *Journal of Instrument Engineering*. 2017. Vol. 60, N 12. P. 1119—1123 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2017-60-12-1119-1123