УДК 519.216:62.50:681.50.1
DOI: 10.17586/0021-3454-2018-61-6-469-476

ФОРМИРОВАНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ МАТРИЦ МНОГОКАНАЛЬНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Н. А. Вундер, П. И. Захарова, А. С. Павлов, $\boxed{\text{А. В. Ушаков}}$

Университет ИТМО, 197101, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: polinova_nina@mail.ru

Для стохастических дискретных внешних воздействий, стационарных в широком смысле, решается задача формирования корреляционных матриц векторов состояний и выходов многоканальных линейных дискретных систем. Представлены три способа вычисления скалярных корреляционных функций выхода многоканальных систем. Первый позволяет вычислить корреляционную функцию конкретного выхода, зависящую от скалярного стохастического воздействия на конкретном входе; второй — рассчитать корреляционные функции каждого выхода системы при векторном стохастическом воздействии; третий — сформировать миноранту и мажоранту корреляционных функций системы в пространстве ее выходов с помощью сингулярного разложения корреляционной матрицы. Показано, что задача формирования корреляционных матриц и функций может быть решена на основе использования фундаментальных матриц системы при условии, что известна матрица дисперсий вектора состояния. Метод пространства состояний позволил матрицу дисперсий вектора состояний системы вычислять с помощью дискретного матричного уравнения Ляпунова в случае экзогенного стохастического воздействия типа дискретный „белый шум“. Полученные процедуры формирования корреляционных матриц векторных переменных дискретных многоканальных систем иллюстрируются примерами.

Ключевые слова: *дискретное стохастическое воздействие, дискретная система, дискретное уравнение Ляпунова, фундаментальная матрица, корреляционная матрица (функция)*

Введение. Постановка задачи. Корреляционная теория стационарных дискретных эргодических векторных стохастических процессов, как и для непрерывных процессов, использует [1, 2]: матрицу дисперсий, корреляционную матрицу и матрицу спектральных плотностей [3, 4]. Каждая из этих матричных характеристик дискретного стохастического процесса применима в теории дискретных систем управления, функционирующих в условиях стохастических дискретных воздействий.

В настоящей статье предлагается процедура формирования корреляционных матриц [3] стохастических дискретных процессов по переменным дискретной системы. Процедура основана на использовании фундаментальной матрицы решений линейных дискретных систем, ее ключевым этапом является вычисление матрицы дисперсий вектора состояния дискретной системы. Для этого используется тот факт, что матрица дисперсий [1—3, 5, 6] в случае дискретного экзогенного стохастического воздействия, стационарного в широком смысле, может быть вычислена с помощью дискретного матричного уравнения Ляпунова.

Матричное уравнение Ляпунова в задачах вычисления матриц дисперсии переменных линейной дискретной системы. Рассмотрим многоканальную линейную дискретную систему (МЛДС), возбуждаемую стохастическим дискретным векторным экзогенным воздействием $\mathbf{w}(k)$, стационарным в широком смысле [7], типа „белый шум“

$$\mathbf{x}(k+1)=\mathbf{F}\mathbf{x}(k)+\mathbf{G}\mathbf{w}(k);\ \mathbf{x}(0)=0;\ \mathbf{y}(k)=\mathbf{C}\mathbf{x}(k);\ \boldsymbol{\varepsilon}(k)=\mathbf{w}(k)-\mathbf{y}(k). \qquad (1)$$

Здесь $\mathbf{x},\mathbf{y},\boldsymbol{\varepsilon}$ — соответственно векторы состояния, выхода, ошибки по выходу МЛДС, k — дискретное время, выраженное в числе интервалов дискретности длительности Δt ($t=\Delta tk$), $\mathbf{F},\mathbf{G},\mathbf{C}$ — соответственно матрицы состояния, входа и выхода; $\mathbf{x}\in R^n;\mathbf{y},\boldsymbol{\varepsilon}\in R^m;\mathbf{F}\in R^{n\times n}$, $\mathbf{G}\in R^{n\times m},\mathbf{C}\in R^{m\times n}$. Воздействие $\mathbf{w}(k)$ характеризуется нулевым математическим ожиданием и некоррелированностью отсчетов $w(k),w(i)$ при любом шаге $\nu=k-i$ их реализации, так что выполняются соотношения

$$M\{\mathbf{w}(k)\}=\bar{\mathbf{w}}(k)=0\quad M\{\mathbf{w}(k)\mathbf{w}^T(i)\}=\mathbf{V}\delta(k,i);\delta(k,i)=\begin{cases}1:k=i,\\0:k\neq i.\end{cases} \qquad (2)$$

Здесь $M\{(*)\}$ — оператор вычисления математического ожидания стохастической переменной $(*)$, „$\bar{\ }$“ — знак математического ожидания (среднего значения) стохастической переменной, $\mathbf{V}$ — матрица дисперсий дискретного векторного „белого шума“ $\mathbf{w}(k)$; $\mathbf{w}\in R^m$, $\mathbf{V}\in R^{m\times m}$. Дополним характеристику векторного „белого шума“ свойством его некоррелированности [1, 2] со стохастическим вектором состояния МЛДС (1):

$$M\{\mathbf{x}(k)\mathbf{w}^T(k)\}=0,M\{\mathbf{w}(k)\mathbf{x}^T(k)\}=0. \qquad (3)$$

Введем в рассмотрение матрицы дисперсий стохастических переменных линейной дискретной системы (1) с помощью соотношений

$$\mathbf{D}_x(k)=M\{\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^T(k)\};\mathbf{D}_y(k)=M\{\mathbf{y}(k)\mathbf{y}^T(k)\};\mathbf{D}_\varepsilon(k)=M\{\boldsymbol{\varepsilon}(k)\boldsymbol{\varepsilon}^T(k)\}. \qquad (4)$$

При этом матрица дисперсии выхода $\mathbf{y}(k)$ МЛДС (1) удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{D}_y(k)=M\{\mathbf{y}(k)\mathbf{y}^T(k)\}=M\{\mathbf{C}\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^T(k)\mathbf{C}^T\}=\mathbf{C}\mathbf{D}_x(k)\mathbf{C}^T. \qquad (5)$$

Известно [3, 6], что матрица дисперсий $\mathbf{D}_x(k)$ вектора состояний многоканальной линейной дискретной системы (1), возбуждаемой воздействием $\mathbf{w}(k)$, удовлетворяет рекуррентному матричному уравнению Ляпунова

$$\mathbf{D}_x(k+1)=\mathbf{F}\mathbf{D}_x(k)\mathbf{F}^T+\mathbf{G}\mathbf{V}\mathbf{G}^T\quad \mathbf{D}_x(k)\big|_{k=0}=\mathbf{D}_x(0)=0. \qquad (6)$$

В силу стационарности в широком смысле $\mathbf{w}(k)$ в случае устойчивости системы (1) матрицы дисперсий $\mathbf{D}_x(k)$ с течением времени становятся стационарными:

$$\lim_{k\to\infty}\mathbf{D}_x(k)=\mathbf{D}_x\ \lim_{k\to\infty}\mathbf{D}_x(k+1)=\mathbf{D}_x, \qquad (7)$$

в результате чего рекуррентное уравнение (6) сводится к дискретному алгебраическому матричному уравнению Ляпунова

$$\mathbf{D}_x-\mathbf{F}\mathbf{D}_x\mathbf{F}^T=\mathbf{G}\mathbf{V}\mathbf{G}^T. \qquad (8)$$

Рассмотрим теперь случай, когда МЛДС (1) возбуждается стационарным в широком смысле дискретным стохастическим векторным воздействием $\xi(k)$ типа „окрашенный шум“, формируемым из „белого шума“ $\mathbf{w}(k)$ дискретным формирующим фильтром (ДФФ) вида

$$\mathbf{x}_{ф}(k+1)=\mathbf{F}_{ф}\mathbf{x}_{ф}(k)+\mathbf{G}_{ф}\mathbf{w}(k);\ \mathbf{x}_{ф}(0)=0;\ \xi(k)=\mathbf{C}_{ф}\mathbf{x}_{ф}(k). \tag{9}$$

Здесь $\mathbf{x}_{ф},\ \boldsymbol{\xi}$ — соответственно векторы состояния и выхода ДФФ; $\mathbf{F}_{ф}, \mathbf{G}_{ф}, \mathbf{C}_{ф}$ — соответственно матрицы состояния, входа и выхода ДФФ; $\mathbf{x}_{ф}\in R^{l}; \xi\in R^{m}; \mathbf{G}_{ф}\in R^{l\times m}; \mathbf{C}_{ф}\in R^{m\times l}$.

Введем в рассмотрение агрегированный вектор состояния $\tilde{\mathbf{x}}=\left[\mathbf{x}^{T},\ \ \mathbf{x}_{ф}^{T}\right]^{T}$, относительного которого на основании (9) и (1) с заменой $\mathbf{w}(k)$ на $\xi(k)$ можно построить векторно-матричное описание динамики системы

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1)=\begin{bmatrix}\mathbf{x}(k+1)\\ \mathbf{x}_{ф}(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{F}\mathbf{x}(k)+\mathbf{G}_{ф}\mathbf{C}_{ф}\mathbf{x}_{ф}(k)\\ 0\mathbf{x}(k)+\mathbf{F}_{ф}\mathbf{x}_{ф}(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \mathbf{G}_{ф}\mathbf{w}(k)\end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix}\mathbf{F} & \mathbf{G}_{ф}\mathbf{C}_{ф}\\ 0 & \mathbf{F}_{ф}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}(k)\\ \mathbf{x}_{ф}(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \mathbf{G}_{ф}\end{bmatrix}\mathbf{w}(k)=\tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{x}}(k)+\tilde{\mathbf{G}}\mathbf{w}(k), \tag{10}$$

$$\mathbf{x}(k)=\mathbf{I}\mathbf{x}(k)+0\mathbf{x}_{ф}(k)=\begin{bmatrix}\mathbf{I} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}(k)\\ \mathbf{x}_{ф}(k)\end{bmatrix}=\tilde{\mathbf{C}}_{x}\tilde{\mathbf{x}}(k);$$

$$\mathbf{y}(k)=\mathbf{C}\mathbf{x}(k)+0\mathbf{x}_{ф}(k)=\begin{bmatrix}\mathbf{C} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}(k)\\ \mathbf{x}_{ф}(k)\end{bmatrix}=\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{x}}(k); \tag{11}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(k)=\xi(k)-\mathbf{y}(k)=-\mathbf{C}\mathbf{x}(k)+\mathbf{C}_{ф}\mathbf{x}_{ф}(k)=\begin{bmatrix}-\mathbf{C} & \mathbf{C}_{ф}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}(k)\\ \mathbf{x}_{ф}(k)\end{bmatrix}=\tilde{\mathbf{C}}_{\varepsilon}\tilde{\mathbf{x}}(k).$$

Здесь $\tilde{\mathbf{F}}=\begin{bmatrix}\mathbf{F} & \mathbf{G}_{ф}\mathbf{C}_{ф}\\ 0 & \mathbf{F}_{ф}\end{bmatrix}\in R^{(n+l)\times(n+l)}$; $\tilde{\mathbf{G}}=\begin{bmatrix}0\\ \mathbf{G}_{ф}\end{bmatrix}\in R^{(n+l)\times m}$; $\tilde{\mathbf{C}}_{x}=\begin{bmatrix}\mathbf{I} & 0\end{bmatrix}\in R^{n\times(n+l)}$; $\tilde{\mathbf{C}}=\begin{bmatrix}\mathbf{C} & 0\end{bmatrix}\in R^{m\times(n+l)}$; $\tilde{\mathbf{C}}_{\varepsilon}=\begin{bmatrix}-\mathbf{C} & \mathbf{C}_{ф}\end{bmatrix}\in R^{m\times(n+l)}$.

Теперь для системы (10) справедливо использование дискретного уравнения Ляпунова вида (8):

$$\tilde{\mathbf{D}}_{x}-\tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{D}}_{x}\tilde{\mathbf{F}}^{T}=\tilde{\mathbf{G}}\mathbf{V}\tilde{\mathbf{G}}^{T}, \tag{12}$$

в котором $\tilde{\mathbf{D}}_{x}$ — стационарная реализация матрицы дисперсий $\tilde{\mathbf{D}}_{x}(k)$ агрегированного вектора $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ состояния системы (10). Для матрицы $\tilde{\mathbf{D}}_{x}$ можно записать цепочку соотношений

$$\tilde{\mathbf{D}}_{x}=M\left\{\tilde{\mathbf{x}}(k)\tilde{\mathbf{x}}^{T}(k)\right\}=M\left\{\begin{bmatrix}\mathbf{x}(k)\\ \mathbf{x}_{ф}(k)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}^{T}(k) & \mathbf{x}_{ф}^{T}(k)\end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix}\mathbf{D}_{x} & \mathbf{D}_{xx_{ф}}\\ \mathbf{D}_{x_{ф}x} & \mathbf{D}_{x_{ф}}\end{bmatrix}, \tag{13}$$

в которых $\mathbf{D}_{x_{ф}x}=\mathbf{D}^{T}{}_{xx_{ф}}$. Если решить матричное уравнение (12) относительно матрицы $\tilde{\mathbf{D}}_{x}$ дисперсий стохастического вектора $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ состояния агрегированной многоканальной линейной дискретной системы (10), то для матриц дисперсий переменных систем (1) и (9) можно записать

$$\mathbf{D}_{x}=\tilde{\mathbf{C}}_{x}\tilde{\mathbf{D}}_{x}\tilde{\mathbf{C}}_{x}{}^{T}, \mathbf{D}_{y}=\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{D}}_{x}\tilde{\mathbf{C}}^{T}, \mathbf{D}_{\varepsilon}=\tilde{\mathbf{C}}_{\varepsilon}\tilde{\mathbf{D}}_{x}\tilde{\mathbf{C}}_{\varepsilon}{}^{T}, \mathbf{D}_{x_{ф}}=\tilde{\mathbf{C}}_{x_{ф}}\tilde{\mathbf{D}}_{x}\tilde{\mathbf{C}}_{x_{ф}}{}^{T}, \mathbf{D}_{\xi}=\tilde{\mathbf{C}}_{ф}\tilde{\mathbf{D}}_{x}\tilde{\mathbf{C}}_{ф}{}^{T}. \tag{14}$$

Разобьем уравнение Ляпунова (12) на основании матрицы $\tilde{\mathbf{D}}_{x}$ дисперсии (13) агрегированного вектора состояния $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ на компоненты, записав его в форме

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_x & \mathbf{D}_{xx_\text{ф}} \\ \mathbf{D}_{xx_\text{ф}}^T & \mathbf{D}_{x_\text{ф}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{GC}_\text{ф} \\ 0 & \mathbf{F}_\text{ф} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_x & \mathbf{D}_{xx_\text{ф}} \\ \mathbf{D}_{xx_\text{ф}}^T & \mathbf{D}_{x_\text{ф}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}^T & 0 \\ \mathbf{C}_\text{ф}^T\mathbf{G}^T & \mathbf{F}_\text{ф}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{G}_\text{ф} \end{bmatrix} \mathbf{V} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{G}_\text{ф}^T \end{bmatrix}.$$

Покомпонентное перемножение матриц дает систему матричных уравнений Ляпунова

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{D}_{x_\text{ф}} - \mathbf{F}_\text{ф}\mathbf{D}_{x_\text{ф}}\mathbf{F}_\text{ф}{}^T = \mathbf{G}_\text{ф}\mathbf{V}\mathbf{G}_\text{ф}^T \Rightarrow \mathbf{D}_{x_\text{ф}}, \\ &\mathbf{D}_{xx_\text{ф}} - \mathbf{F}\mathbf{D}_{xx_\text{ф}}\mathbf{F}_\text{ф}{}^T = \mathbf{GC}_\text{ф}\mathbf{D}_{x_\text{ф}}\mathbf{F}_\text{ф}{}^T \Rightarrow \mathbf{D}_{xx_\text{ф}} = \mathbf{D}_{x_\text{ф}x}^T, \\ &\mathbf{D}_x - \mathbf{F}\mathbf{D}_x\mathbf{F}^T = \mathbf{GC}_\text{ф}\mathbf{D}_{xx_\text{ф}}^T\mathbf{F}^T + \mathbf{F}\mathbf{D}_{xx_\text{ф}}\mathbf{C}_\text{ф}^T\mathbf{G}^T + \mathbf{GC}_\text{ф}\mathbf{D}_{x_\text{ф}}\mathbf{C}_\text{ф}^T\mathbf{G}^T \Rightarrow \mathbf{D}_x. \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Если решить систему матричных уравнений Ляпунова (15), то для матриц дисперсий переменных исходных дискретных систем (1) и (10) можно записать

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{D}_y = \mathbf{CD}_x\mathbf{C}^T, \mathbf{D}_\xi = \mathbf{C}_\text{ф}\mathbf{D}_{x_\text{ф}}\mathbf{C}_\text{ф}^T, \mathbf{D}_\varepsilon = \tilde{\mathbf{C}}_\varepsilon\tilde{\mathbf{D}}_x\tilde{\mathbf{C}}_\varepsilon^T = \begin{bmatrix} -\mathbf{C} & \mathbf{C}_\text{ф} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_x & \mathbf{D}_{xx_\text{ф}} \\ \mathbf{D}_{xx_\text{ф}}^T & \mathbf{D}_{x_\text{ф}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{C}^T \\ \mathbf{C}_\text{ф}^T \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -\mathbf{C} & \mathbf{C}_\text{ф} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{D}_x\mathbf{C}^T + \mathbf{D}_{xx_\text{ф}}\mathbf{C}_\text{ф}^T \\ -\mathbf{D}_{xx_\text{ф}}\mathbf{C}^T + \mathbf{D}_{x_\text{ф}}\mathbf{C}_\text{ф}^T \end{bmatrix} = \mathbf{CD}_x\mathbf{C}^T - \mathbf{CD}_{xx_\text{ф}}\mathbf{C}_\text{ф}^T - \mathbf{C}_\text{ф}\mathbf{D}_{xx_\text{ф}}^T\mathbf{C}^T + \\ &+ \mathbf{C}_\text{ф}\mathbf{D}_{x_\text{ф}}\mathbf{C}_\text{ф}^T = \mathbf{D}_\xi + \mathbf{D}_y - \mathbf{CD}_{xx_\text{ф}}\mathbf{C}_\text{ф}^T - \mathbf{C}_\text{ф}\mathbf{D}_{xx_\text{ф}}^T\mathbf{C}^T. \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Выражение для дисперсии ошибки в (16) отражает интересную системную особенность: минимизировать дисперсию ошибки МЛДС при дискретном стохастическом экзогенном воздействии типа дискретный „окрашенный шум“ возможно за счет ковариации векторов состояния МЛДС и ДФФ.

Формирование корреляционных матриц (функций) переменных линейных дискретных систем на основе фундаментальных матриц. Введем в рассмотрение корреляционные матрицы векторных переменных линейной дискретной системы вида (1). Тогда [3, 6] в случае центрированных стохастических экзогенных воздействий, стационарных в широком смысле, для вектора состояния системы (1) корреляционная матрица $\mathbf{R}_x(\nu)$ может быть представлена следующим образом:

$$\begin{aligned} &\mathbf{R}_x(\nu) = M\left\{\mathbf{x}(k+\nu)\mathbf{x}^T(k)\right\}, \nu \ge 0; \\ &\mathbf{R}_x(\nu) = M\left\{\mathbf{x}(k-\nu)\mathbf{x}^T(k)\right\}, \nu \le 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Нетрудно видеть, что для случая $\nu = 0$ оба выражения (17) обеспечивают $\mathbf{R}_x(0) = \mathbf{D}_x$. Корреляционная матрица $\mathbf{R}_y(\nu)$ для вектора выхода системы (1) получает представления

$$\mathbf{R}_y(\nu) = M\left\{\mathbf{y}(k+\nu)\mathbf{y}^T(k)\right\} = \mathbf{C}M\left\{\mathbf{x}(k+\nu)\mathbf{x}^T(\nu)\right\}\mathbf{C}^T = \mathbf{CR}_x(\nu)\mathbf{C}^T, \nu \ge 0, \quad (18)$$

$$\mathbf{R}_y(\nu) = M\left\{\mathbf{y}(k-\nu)\mathbf{y}^T(k)\right\} = \mathbf{C}M\left\{\mathbf{x}(k-\nu)\mathbf{x}^T(k)\right\}\mathbf{C}^T = \mathbf{CR}_x(\nu)\mathbf{C}^T, \nu \le 0. \quad (19)$$

Для корреляционной матрицы $\mathbf{R}_x(\nu)$ вектора состояния можно записать

$$\mathbf{R}_x(\nu) = M\left\{\mathbf{x}(k+\nu)\mathbf{x}^T(k)\right\} = M\left\{\mathbf{F}^\nu\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^T(k)\right\} = \mathbf{F}^\nu\mathbf{D}_x, \nu \ge 0, \quad (20)$$

$$\mathbf{R}_x(\nu) = M\left\{\mathbf{x}(k-\nu)\mathbf{x}^T(k)\right\} = M\left\{\mathbf{F}^{-\nu}\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^T(k)\right\} = \mathbf{F}^{-\nu}\mathbf{D}_x, \nu \le 0. \quad (21)$$

В свою очередь, для корреляционной матрицы вектора выхода $\mathbf{R}_y(\nu)$ на основании (18)—(21) получим

$$\mathbf{R}_y(\nu) = \mathbf{C}\mathbf{R}_x(\nu)\mathbf{C}^T = \mathbf{C}\mathbf{F}^{\nu}\mathbf{D}_x\mathbf{C}^T,\ \nu \ge 0, \tag{22}$$

$$\mathbf{R}_y(\nu) = \mathbf{C}\mathbf{R}_x(\nu)\mathbf{C}^T = \mathbf{C}\mathbf{F}^{-\nu}\mathbf{D}_x\mathbf{C}^T,\ \nu \le 0. \tag{23}$$

В силу (22) оказывается справедливым матричное рекуррентное уравнение

$$\mathbf{R}_*(\nu+1) = \mathbf{F}\mathbf{R}_*(\nu);\ \mathbf{R}_*(0) = \mathbf{D}_x\mathbf{C}^T;\ \mathbf{R}_y(\nu) = \mathbf{C}\mathbf{R}_*(\nu). \tag{24}$$

Очевидно, если система (1) обладает одномерным выходом, то корреляционная матрица выхода становится корреляционной функцией, которая, согласно (24), формируется как функция свободного движения системы

$$\kappa(\nu+1) = \mathbf{F}\kappa(\nu);\ \kappa(0) = \mathbf{D}_x\mathbf{C}^T;\quad \eta(\nu) = \mathbf{C}\kappa(\nu) = \mathbf{R}_y(\nu). \tag{25}$$

Формирование скалярных корреляционных функций МЛДС. Сформировать скалярную корреляционную функцию выхода МЛДС возможно несколькими способами. Первый способ основан на разбиении системы на разделенные каналы в виде дискретных систем типа „одномерный вход—одномерный выход“, получающих на основании (1) представления

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}_j\mathbf{g}_j(k);\ \mathbf{x}(0) = 0;\ \mathbf{y}_l(k) = \mathbf{C}^l\mathbf{x}(k), \tag{26}$$

где $\mathbf{G}_j, \mathbf{g}_j(k)$ — соответственно j-й столбец матрицы входа $\mathbf{G}$ системы и j-й элемент векторного экзогенного воздействия $\mathbf{g}(k)$, которое в зависимости от задачи исследования удовлетворяет условиям $\mathbf{g}(k) = \mathbf{w}(k), \mathbf{g}(k) = \xi(k)$; $\mathbf{y}_l(k)$ — l-й элемент вектора выхода, $\mathbf{C}^l$ — l-я строка матрицы выхода $\mathbf{C}$; $j, l = \overline{1, m}$. Для (j, l)-го канала (26), в случае задачи исследования реакции дискретной системы на экзогенное стохастическое воздействие типа „белый шум“ $\mathbf{w}(k)$, становится справедливой система соотношений

$$\mathbf{D}_x - \mathbf{F}\mathbf{D}_x\mathbf{F}^T = \mathbf{G}_j\mathbf{V}\mathbf{G}_j^{\ T},\ R_{y_l}(\nu) = \mathbf{C}^l\mathbf{F}^{\nu}\mathbf{D}_x\left(\mathbf{C}^l\right)^T,\ \nu \ge 0. \tag{27}$$

В случае возбуждения системы воздействием $\xi(k)$ получаем следующую процедуру для расчета корреляционной функции l-го элемента стохастического вектора выхода: сначала решаем систему матричных уравнений (15) относительно матрицы $\mathbf{D}_x$, в которой матрица $\mathbf{G}$ заменяется на $\mathbf{G}_j$, с последующим вычислением корреляционной дискретной функции

$$R_{y_l}(\nu) = \mathbf{C}^l\mathbf{F}^{\nu}\mathbf{D}_x\left(\mathbf{C}^l\right)^T,\ \nu \ge 0. \tag{28}$$

Второй способ применяется, когда внешнее дискретное стохастическое воздействие является векторным, при этом необходимо рассчитать корреляционные функции, формируемые для каждого выхода системы. В этом случае получаем следующую процедуру для расчета корреляционной функции l-го элемента стохастического вектора выхода: сначала решаем систему матричных уравнений (15) относительно матрицы $\mathbf{D}_x$ с последующим вычислением искомой корреляционной дискретной функции $R_{y_l}(\nu)$ с помощью (28).

Третий способ основан на применении сингулярного [8] разложения корреляционной матрицы $\mathbf{R}_y(\nu)$, в соответствии с которым ее можно представить в виде

$$\mathbf{R}_y(\nu) = \mathbf{U}(\nu)\boldsymbol{\Sigma}(\nu)\mathbf{V}^T(\nu), \tag{29}$$

где $\mathbf{U}(\nu)$ и $\mathbf{V}^T(\nu)$ — соответственно матрицы левого и правого сингулярных базисов, обладающие свойством $\mathbf{U}(\nu)\mathbf{U}^T(\nu) = \mathbf{U}^T(\nu)\mathbf{U}(\nu) = \mathbf{I}$, $\mathbf{V}(\nu)\mathbf{V}^T(\nu) = \mathbf{V}^T(\nu)\mathbf{V}(\nu) = \mathbf{I}$, для $\forall\nu$;

$\boldsymbol{\Sigma}(\nu)=\operatorname{diag}\left\{\alpha_i(\nu)=\left|\mu_i^{0,5}(\nu)\right|:\det\left(\mu_i(\nu)\mathbf{I}-\mathbf{R}_y^T(\nu)\mathbf{R}_y(\nu)\right)=0;\, i=\overline{1,m}\right\}$, $\alpha_i(\nu)$ — сингулярное число матрицы $\mathbf{R}_y(\nu)$. Тогда в соответствии с (29) становятся справедливыми неравенства

$$\alpha_{\min}(\nu)=R_{y\min}(\nu)\le\left\|\mathbf{R}_y(\nu)\mathbf{V}_i(\nu)\right\|\le R_{y\max}(\nu)=\alpha_{\max}(\nu), \tag{30}$$

где $\alpha_{\min}(\nu)$ и $\alpha_{\max}(\nu)$ — соответственно минимальное и максимальное сингулярные числа матрицы $\mathbf{R}_y(\nu)$; $R_{y\min}(\nu)$, $R_{y\max}(\nu)$ — миноранта и мажоранта корреляционных функций системы в пространстве ее выходов. Нетрудно видеть, что миноранта $\nu_{k\min}$ и мажоранта $\nu_{k\max}$ интервала корреляции ν_k связаны неравенствами

$$\nu_{k\min}=\operatorname{argmax}\left\{R_{y\min}(\nu)=0,05R_{y\min}(0)\right\}\le\nu_k\le\operatorname{argmax}\left\{R_{y\max}(\nu)=0,05R_{y\max}(0)\right\}=\nu_{k\max}.$$

Пример. Рассмотрим двухканальную ЛДС (1) с системными компонентами

$$\left.\begin{array}{l}
\mathbf{F}=\begin{bmatrix}1-0,0004\cos\mu & 0,0097 & -0,0004\sin\mu & 0\\ -0,0874\cos\mu & 0,9418 & -0,0874\sin\mu & 0\\ 0,0047\sin\mu & 0 & 1-0,0047\cos\mu & 0,0091\\ 0,9063\sin\mu & 0 & -0,9063\cos\mu & 0,8187\end{bmatrix},\ \mathbf{G}=\begin{bmatrix}0,0004\cos\mu & 0,0004\sin\mu\\ 0,0874\cos\mu & 0,0874\sin\mu\\ -0,0047\sin\mu & 0,0046\cos\mu\\ 0,9063\sin\mu & 0,9063\cos\mu\end{bmatrix},\\
\mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\ \mathbf{u}(k)=\boldsymbol{\Psi}(\mu)\boldsymbol{\varepsilon}(k),\ \boldsymbol{\Psi}(\mu)=\begin{bmatrix}\cos\mu & \sin\mu\\ -\sin\mu & \cos\mu\end{bmatrix},\\
\boldsymbol{\varepsilon}(k)=\mathbf{g}(k)-\mathbf{y}(k),\ t=k(\Delta t),\ \Delta t=0,01\text{ с},
\end{array}\right\}$$

где $\boldsymbol{\Psi}(\mu)$ — матрица межканальных связей, Δt — интервал дискретности. Первый эксперимент проводился при $\mu=0$, когда каналы ЛДС были несвязанными.

На рис. 1, *а* приведены кривые $R_{y_1}(\nu)$, $R_{y_2}(\nu)$ — корреляционных функций выходных стохастических переменных ЛДС, вычисленных по (28) при дискретном „белом шуме“ единичной матрицы дисперсий, на рис. 1, *б* приведены $R_{y\min}(\nu)$, $R_{y\max}(\nu)$ — соответственно миноранта и мажоранта корреляционных функций, полученные с помощью SVD-разложения корреляционной матрицы $\mathbf{R}_y(\nu)$ вектора выхода. Второй эксперимент проводился при $\mu=45°$, когда каналы ЛДС оказывались связанными.

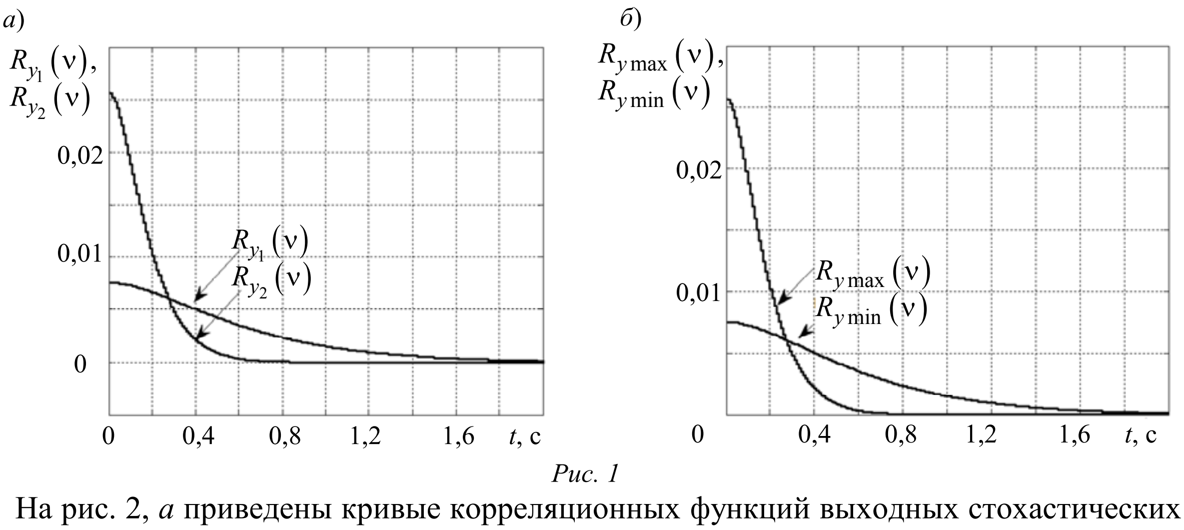

Рис. 1

На рис. 2, *а* приведены кривые корреляционных функций выходных стохастических переменных ЛДС, вычисленных согласно (28) при единичной матрице дисперсий дискретного

„белого шума“ на входе системы, на рис. 2, *б* — миноранта и мажоранта корреляционных функций, полученных с помощью SVD-разложения корреляционной матрицы $\mathbf{R}_y(\nu)$ вектора выхода. Видна зависимость стохастических свойств двухканальной дискретной системы от межканальных связей.

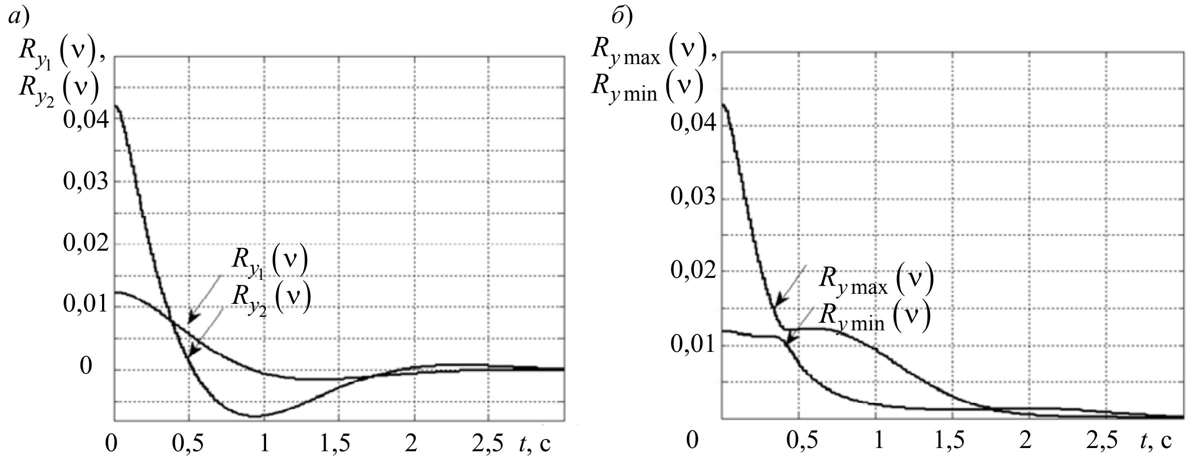

Рис. 2

Заключение. Формализм метода пространства состояний для дискретных систем, опирающийся на матричное уравнение Ляпунова, используемое при вычислении матрицы дисперсий стохастического вектора состояний, позволил разработать алгоритм формирования корреляционных матриц и функций стохастических переменных выхода системы.

Работа выполнена при государственной финансовой поддержке ведущих университетов Российской Федерации (субсидия 08-08), министерства образования и науки РФ 14.Z50.31.0031.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kwakernaak H., Sivan R.* Linear Optimal Control Systems. NY—London—Sidney—Toronto: John Wiley & Sons, 1972. 625 p.
2. *Davis M. H. A.* Linear Estimation and Stochastic Control. Capman and Hall Ltd., 1977. 208 p.
3. *Dudarenko N. A., Ushakov A. V.* Matrix Formalism of the Degeneration Control Problem of Multichannel Dynamical Systems under Vector Stochastic Exogenous Impact of the Colored Noise Type // J. of Automation and Information Sciences. 2013. Vol. 45, is. 6. P. 36—47.
4. *Иванов В. А., Медведев В. С., Чемоданов Б. К., Ющенко А. С.* Математические основы теории автоматического управления. Т. 3. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2009. 352 с.
5. *Oppenheim A. V., Schafer R. W.* Digital signal processing. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, Inc., 1975. 585 p.
6. *Oksendal B.* Stochastic Differential Equations. An Introduction with Application. Berlin—Heidelberg—NY: Springer Verlag, 2003. 385 p.
7. *Григорьев В. В., Дроздов В. Н., Лаврентьев В. В., Ушаков А. В.* Синтез дискретных регуляторов при помощи ЭВМ. Л.: Машиностроение, 1983. 245 с.
8. *Golub G. H., Van Loan Ch. F.* Matrix Computations. Johns Hopkins University Press, 2012. 790 p.

Сведения об авторах

Нина Александровна Вундер — аспирант; Университет ИТМО; кафедра систем управления и информатики; E-mail: polinova_nina@mail.ru

Полина Игоревна Захарова — аспирант; Университет ИТМО; кафедра систем управления и информатики; E-mail: polina19920@yandex.ru

Андрей Сергеевич Павлов — аспирант; Университет ИТМО; кафедра систем управления и информатики; E-mail: a.s.pavlov@email.su

Анатолий Владимирович Ушаков — д-р техн. наук, профессор; Университет ИТМО; кафедра систем управления и информатики

Поступила в редакцию
21.03.17 г.

Ссылка для цитирования: *Вундер Н. А., Захарова П. И., Павлов А. С., Ушаков А. В.* Формирование корреляционных матриц многоканальных дискретных систем // Изв. вузов. Приборостроение. 2018. Т. 61, № 6. С. 469—476.

FORMATION OF CORRELATION MATRICES OF MULTICHANNEL DISCRETE SYSTEMS

N. A. Vunder, P. I. Zakharova, A. S. Pavlov, A. V. Ushakov

ITMO University, 197101, St. Petersburg, Russia
E-mail: polinova_nina@mail.ru

For stochastic discrete external actions stationary in a broad sense, the problem of forming correlation matrices of state vectors and outputs of multichannel linear discrete systems is solved. Three methods for calculating the scalar correlation functions of the output of multichannel systems are presented. The first one allows to calculate the correlation function of an output, which depends on the scalar stochastic effect on a particular input; the second is used to calculate the correlation functions of each output of the system under the vector stochastic action; the third one forms the minorant and the majorant of the correlation functions of the system in the space of its outputs by means of singular expansion of the correlation matrix. It is shown that the problem of forming correlation matrices and functions can be solved based on using the fundamental matrices of the system under the condition that the matrix of dispersions of the state vector is known. The state space method allows calculation of the dispersions matrix of the system state vector using the discrete Lyapunov matrix equation in the case of an exogenous stochastic effect of the discrete "white noise" type. The developed procedures for formation of correlation matrices of vector variables of discrete multichannel systems are illustrated by examples.

Keywords: discrete stochastic effect, discrete system, discrete Lyapunov equation, fundamental matrix, correlation matrix (function)

Data on authors

Nina A. Vunder — Post-Graduate Student; ITMO University, Department of Computer Science and Control Systems; E-mail: polinova_nina@mail.ru

Polina I. Zakharova — Post-Graduate Student; ITMO University, Department of Computer Science and Control Systems; E-mail: polina19920@yandex.ru

Andrey S. Pavlov — Post-Graduate Student; ITMO University, Department of Computer Science and Control Systems; E-mail: a.s.pavlov@email.su

Anatoly V. Ushakov — Dr. Sci., Professor; ITMO University, Department of Computer Science and Control Systems

For citation: Vunder N. A., Zakharova P. I., Pavlov A. S., Ushakov A. V. Formation of correlation matrices of multichannel discrete systems. *Journal of Instrument Engineering*. 2018. Vol. 61, N 6. P. 469—476 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2018-61-6-469-476