УДК 519.872.2+ 330.45
DOI: 10.17586/0021-3454- 2021-64-5-351-356

ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ РАЗДЕЛЕНИЯ КАНАЛОВ В СИСТЕМЕ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОЧЕРЕДЬЮ

С. Н. Фадеев, Н. А. Брейдер

Российский государственный гидрометеорологический университет,
192007, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: fsn3@yandex.ru

Выполнен анализ разделения (специализации) каналов в системе массового обслуживания с неограниченной очередью с конечным случайным временем ожидания (система с „нетерпеливыми“ заявками); вычислены основные показатели эффективности системы при различной интенсивности потока обслуживания. Показано, что разделение каналов существенно улучшает показатели эффективности только для режима, близкого к критическому.

Ключевые слова: *марковские процессы, теория массового обслуживания, простейший поток, „нетерпеливые“ заявки*

Системы массового обслуживания (СМО) с неограниченной очередью можно разделить на системы, в которых на время пребывания заявки в очереди не наложено никаких ограничений (системы с неограниченным временем ожидания), и более реалистические системы, когда время ожидания обслуживания является случайной величиной с фиксированным средним значением, — системы с ограниченным ожиданием (или системы с „нетерпеливыми“ заявками). В настоящей статье анализируется влияние разделения каналов на основные показатели эффективности системы с ограниченным ожиданием. Суть проблемы заключается в следующем. Имеется n-канальная СМО (условно — билетная касса с n кассирами). Предположим, что поток заявок разделяется по некоторым признакам и, соответственно, разделяются каналы обслуживания (например, часть кассиров будет обслуживать только пассажиров, следующих по направлению D_1, часть — по направлению D_2 и т.д.). В работе [1] было исследовано, как изменятся показатели эффективности системы при таком разделении, иначе, при специализации каналов, но предполагалось, что среднее время обслуживания не менялось при разделении каналов. В настоящей работе вычисляются показатели эффективности в предположении, что разделение каналов должно приводить к уменьшению времени обслуживания в каждом из каналов.

Приведем краткие сведения из теории массового обслуживания, используя формулировки и обозначения, принятые в работе [2].

В замкнутой форме с учетом аналитических выражений для основных характеристик СМО теория массового обслуживания построена для так называемых марковских процессов с дискретными состояниями и непрерывным временем [2]. СМО с неограниченной очередью представляет собой систему с бесконечным, но счетным множеством состояний („дискретные состояния“) [3]. Пусть имеется n обслуживающих каналов. Состояние S_0 — в системе нет заявок, все каналы свободны, очередь пуста; состояния S_1, S_2, …, S_n — заняты один, два, … n каналов, в очереди нет заявок; S_{n+k} , k=1, 2, 3,…, — все каналы заняты, в очереди k заявок. Поступающие в систему заявки образуют поток событий, под влиянием которых система в произвольные моменты времени („непрерывное время“) переходит из одного состояния в другое. Обслуженная заявка покидает систему, что можно рассматривать как событие, в результате которого система также меняет свое состояние. Последовательность таких событий образует поток обслуживаний. В статье рассматриваются так называемые простейшие или пуассоновские стационарные потоки, для которых процесс, протекающий в системе, будет марковским* [2].

Единственной характеристикой пуассоновского потока является интенсивность λ, которая представляет собой среднее число событий за единицу времени, причем для пуассоновского потока эта величина не зависит от времени.

Предполагается, что известны следующие величины: t_a — средний интервал времени между поступающими заявками, t_s — среднее время обслуживания одной заявки. Интенсивность потока заявок определяется как $\lambda = 1/t_a$. Аналогично вводится интенсивность потока обслуживания $\mu = 1/t_s$. Для рассматриваемой системы с ограниченным ожиданием считаем известным математическое ожидание случайной величины — времени, в течение которого заявка „согласна“ находиться в очереди. Обозначим математическое ожидание данной величины как t_q и свяжем с ним величину $\nu = 1/t_q$, которую естественно назвать интенсивностью потока уходов.

Все процессы в СМО носят вероятностный характер. Фактически задачей теории массового обслуживания является вычисление вероятностей состояний системы $p_i(t)$ как функций времени [4]. Важнейшая особенность марковских процессов заключается в том, что с течением времени зависимость от него вероятности состояний уменьшается и система переходит в стационарный режим, при этом определяющим фактором является величина $\exp(-\lambda t)$, т.е.

$$p_i(t) \sim p_i^{\infty} - Ce^{-\lambda t},\ t \to \infty, .$$

где C — произвольная постоянная.

Таким образом, уже при $t \geq 5/\lambda$ стационарный режим с предельными вероятностями p_i^{∞} для возможных состояний системы является хорошим приближением.

Вычисляются следующие показатели эффективности системы в стационарном режиме:

p_0 — вероятность того, что все обслуживающие каналы свободны, т.е. вероятность состояния S_0;

A — абсолютная пропускная способность системы, т.е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени;

L_q — средняя длина очереди, т.е. среднее число заявок в очереди;

T_q — среднее время пребывания заявки в очереди;

P_{nd} — вероятность отсутствия задержки, т.е. вероятность того, что поступившая заявка будет немедленно принята к обслуживанию.

Все показатели эффективности, кроме T_q, выражаются через безразмерные величины $\rho = \lambda/\mu$ и $\alpha = \nu/\mu$.

Для системы с неограниченным временем ожидания стационарный режим существует только в случае, если $\rho/n < 1$. В противном случае стационарный режим не существует и не могут быть определены предельные вероятности состояний. Фактически это означает, что система не справляется с потоком заявок. С течением времени длина очереди будет неограниченно расти [5, 6].

Все показатели эффективности выражаются через вероятность p_0, которая для системы с ограниченным ожиданием определяется как

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^k}{\prod_{j=1}^{k} (n + j\alpha)} \right)^{-1}. \tag{1}$$

* Процесс может быть марковским не только для простейшего потока; простейший поток — достаточное, но не необходимое условие марковского процесса.

Заметим, что для p_0 может быть получено выражение через вырожденную гипергеометрическую функцию [7].

Так как

$$\frac{\rho^k}{\prod_{j=1}^{k}(n+j\alpha)} < \frac{(\rho/\alpha)^k}{k!},$$

ряд в выражении (1) сходится при любых значениях ρ и α, а следовательно, в системе с ограниченным ожиданием стационарный режим существует всегда. Но далее, по аналогии с системой с неограниченным ожиданием, режим при отношении ρ/n, близком к единице, будем называть критическим.

Величина L_q может быть вычислена стандартным образом:

$$L_q = 1p_{n+1} + 2p_{n+2} + 3p_{n+3} + \ldots, \quad (2)$$

где p_{n+k}, k=1,2, ..., — вероятности состояний S_{n+k}.

Абсолютная пропускная способность определяется как

$$A = \lambda - \nu L_q. \quad (3)$$

Вероятность P_{nd} равна

$$P_{nd} = p_0 + p_1 + \ldots + p_{n-1}. \quad (4)$$

Заявка может покинуть очередь как в результате обслуживания, так и не дождавшись такового („нетерпеливая“ заявка). Поэтому среднее время T_q пребывания заявки в очереди не совпадает с величиной t_q. Величина T_q определяется состоянием всей очереди, в первом приближении эта величина может быть найдена как

$$T_q = L_q/\lambda. \quad (5)$$

Некоторые детали вычислений приведены в [1].

Все вычисления были выполнены посредством программного кода, написанного на языке JavaScript [8]. В программный код заложены вычисления для следующих СМО в стационарном режиме:

— система с отказами;

— система с неограниченной очередью;

— система с ограниченной очередью;

— систем с „нетерпеливыми“ заявками.

Вычисления выполнены для двухканальной и одноканальной (после разделения каналов) систем. Рассмотрены два случая: $\rho/n = 0,5$ и $\rho/n = 101/100$. В первом случае система далека от критического режима, во втором случае система работает со значительной нагрузкой.

Предполагается, что интенсивность потока заявок уменьшается вдвое при разделении каналов. При разделении каналов получим две одинаковые одноканальные системы, поэтому все показатели вычисляются для одноканальной системы, но абсолютная пропускная способность A системы из двух независимых каналов равна удвоенной пропускной способности одного канала.

Как отмечалось выше, все характеристики систем, кроме T_q, зависят только от безразмерных параметров ρ и α. Поэтому далее время указывается в условных единицах. Для некритического режима среднее время обслуживания заявки выбиралось равным t_s=2 для двухканальной системы; среднее время между поступающими заявками $t_a = 2$ для двухканальной системы и, соответственно, $t_a = 4$ для одноканальной. Для режима, близкого к критическому, t_s=2,02 и t_a=1, t_a=2 для двухканальной и одноканальной системы соответственно. Для среднего времени ожидания использовано значение t_q=60.

Для одноканальной системы вероятность P_{nd} совпадает, очевидно, с вероятностью p_0.

В табл. 1 приведены результаты вычислений для некритического режима ($\rho/n = 0,5$), в табл. 2 — для режима, близкого к критическому ($\rho/n = 101/100$). В таблицах приведены перечисленные выше показатели эффективности системы в зависимости от времени обслуживания $t_s^{(1)}$ заявки в одноканальной системе, которое изменялось от $t_s^{(1)} = 2$ до значения, равного или близкого к единице.

Таблица 1

Показатель	n=2, t_a=2, t_s=2	n=1, t_a=4, при $t_s^{(1)}$, равном					
		2	1,8	1,6	1,4	1,2	1,0
p_0	0,337	0,514	0,560	0,606	0,654	0,702	0,751
L_q	0,299	0,415	0,319	0,240	0,174	0,121	0,080
T_q	0,599	1,661	1,278	0,958	0,696	0,485	0,320
A	0,495	0,243·2=0,486	0,2447·2=0,489	0,246·2=0,492	0,247·2=0,494	0,248·2=0,496	0,2487·2=0,497
P_{nd}	0,673	—	—	—	—	—	—

Таблица 2

Показатель	n=2, t_a=1, t_s=2,02	n=1, t_a=2, при $t_s^{(1)}$, равном					
		2,02	1,9	1,8	1,6	1,4	1,2
p_0	0,0405	0,117	0,148	0,179	0,248	0,328	0,415
L_q	5,427	3,765	3,108	2,617	1,798	1,187	0,751
T_q	5,427	7,530	6,216	5,234	3,597	2,374	1,502
A	0,910	0,4373·2=0,875	0,448·2=0,896	0,4564·2=0,913	0,470·2=0,940	0,480·2=0,960	0,4875·2=0,975
P_{nd}	0,122	—	—	—	—	—	—

Отметим, что при условии равенства интенсивностей потоков обслуживания в двухканальной и одноканальной системах показатели эффективности для рассмотренных типов СМО близки, если режим работы далек от критического. Разделение каналов ухудшает основные показатели эффективности, но незначительно. Наиболее существенно изменяется (возрастает) время ожидания в очереди. Однако абсолютное значение этой величины не велико (близко к среднему времени обслуживания) и ее увеличение не критично.

Причина ухудшения показателей эффективности заключается в следующем. Расчеты показывают, что после разделения каналов увеличивается вероятность p_0 и, следовательно, время простоя каждого канала. В исходной многоканальной системе имеет место неявная „взаимопомощь“ каналов: если свободен хотя бы один из каналов, поступившая заявка немедленно принимается к обслуживанию свободным каналом. В системе с разделением каналов, если в ней все каналы заняты, заявка становится в очередь, безотносительно к тому, есть ли свободные каналы в другой подсистеме.

Уменьшение среднего времени обслуживания в системе с разделенными каналами улучшает показатели эффективности только при $t_s^{(1)}/t_s = 0,6$.

Что касается системы при $\rho/n \approx 1$, разделение каналов несколько ухудшает такие показатели, как T_q, A, P_{nd}, но средняя длина очереди даже сокращается, хотя и не радикально. Однако даже незначительное уменьшение времени обслуживания приводит к заметному повышению эффективности. Уже при $t_s^{(1)}/t_s = 1,8/2,02 \approx 0,89$ все рассмотренные показатели эффективности выше в системе с разделенными каналами.

Таким образом, разделение каналов, с учетом увеличения интенсивности потока обслуживания при этом, имеет смысл только для СМО в режиме работы, близком к критическому.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фадеев С. Н.* О разделении каналов в системе массового обслуживания с неограниченной очередью // Ученые записки Санкт-Петербургского им. В. Б. Бобкова филиала Российской таможенной академии. 2019. № 3 (71). С. 37—40.
2. *Вентцель Е. С.* Исследование операций. М.: Сов. радио, 1972. 552 с.
3. *Зайцева И. В.* Методы исследования состояний информационной системы // Алгоритмы, методы и системы обработки данных. 2011. № 2 (17). С. 7.
4. *Malafeyev O., Rylow D., Novozhilova L., Zaitseva I., Popova M., Zelenkovskii P.* Game-theoretic model of dispersed material drying process // AIP Conf. Proc. „International Conference on Functional Materials, Characterization, Solid State Physics, Power, Thermal and Combustion Energy, FCSPTC 2017“. 2017. P. 020063.
5. *Кутузов О. И., Татарникова Т. М.* К оцениванию и сопоставлению очередей классических и фрактальных систем массового обслуживания // Информационно-управляющие системы. 2016. № 2(81). С. 48—55.
6. *Кутузов О. И., Татарникова Т. М.* Из практики применения метода Монте-Карло // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2017. Т. 83, № 3. С. 65—70.
7. *Кирпичников А. П., Флакс Д. Б., Валеева Л. Р.* Системы массового обслуживания с ограниченным временем пребывания заявки в системе // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. 2015. № 6—1. С. 68—73.
8. *Фадеев С. Н.* Программный комплекс для решения стационарных задач теории массового обслуживания // Ученые записки Санкт-Петербургского им. В. Б. Бобкова филиала Российской таможенной академии. 2020. № 3 (75). С. 80—83.

Сведения об авторах

Сергей Николаевич Фадеев — канд. физ.-мат. наук; РГГМУ, кафедра высшей математики и теоретической механики; доцент; E-mail: fsn3@yandex.ru

Наталья Андреевна Брейдер — канд. экон. наук, доцент; РГГМУ; начальник учебно-методического управления; ст. научный сотрудник; E-mail: nata197910@yandex.ru

Поступила в редакцию
23.01.2021 г.

Ссылка для цитирования: *Фадеев С. Н., Брейдер Н. А.* Оценка эффективности разделения каналов в системе массового обслуживания с неограниченной очередью // Изв. вузов. Приборостроение. 2021. Т. 64, № 5. С. 351—356.

EVALUATION OF THE EFFICIENCY OF CHANNELS SEPARATION IN A QUEUING SYSTEM WITH AN UNLIMITED QUEUE

S. N. Fadeev, N. A. Breider

Russian State Hydrometeorological University,
192007, St. Petersburg, Russia
E-mail: fsn3@yandex.ru

The method of channels division (specialization) in a queuing system with an unlimited queue with a finite random waiting time (a system with “impatient” customers) is analyzed. The main indicators of the efficiency of the system are calculated for various intensity of the service flow. The channel separation is shown to significantly improve the efficiency indices only for modes close to critical.

Keywords: Markov processes, queuing theory, simplest flow, “impatient” claims

REFERENCES

1. Fadeev S.N. *Scientific Letters of Russian Customs Academy the St. Petersburg branch named after Vladimir Bobkov*, 2019, no. 3(71), pp. 37–40. (in Russ.)
2. Venttsel' E.S. *Issledovaniye operatsiy* (Operations Research), Moscow, 1972, 552 p. (in Russ.)
3. Zaytseva I.V. *Algoritmy, metody i sistemy obrabotki dannykh*, 2011, no. 2(17), pp. 7. (in Russ.)
4. Malafeyev O., Rylow D., Novozhilova L., Zaitseva I., Popova M., Zelenkovskii P. *AIP Conference Proceedings, International Conference on Functional Materials, Characterization, Solid State Physics, Power, Thermal and Combustion Energy*, FCSPTC 2017, pp. 020063.

5. Kutuzov O.I., Tatarnikova T.M. *Information and Control Systems*, 2016, no. 2(81), pp. 48–55. (in Russ.)
6. Kutuzov O.I., Tatarnikova T.M. *Zavodskaya Laboratoriya. Diagnostika Materialov*, 2017, no. 3(83), pp. 65–70. (in Russ.)
7. Kirpichnikov A.P., Flaks D.B., Valeyeva L.R. *Aktual'nyye problemy gumanitarnykh i yestestvennykh nauk*, 2015, no. 6-1, pp. 68–73. (in Russ.)
8. Fadeev S.N. *Scientific Letters of Russian Customs Academy the St. Petersburg branch named after Vladimir Bobkov*, 2020, no. 3(75), pp. 80–83. (in Russ.)

Data on authors

Sergey N. Fadeev — PhD; Russian State Hydrometeorological University, Department of Higher Mathematics and Theoretical Mechanics; Associate Professor; E-mail: fsn3@yandex.ru

Natalia A. Breider — PhD, Associate Professor; Russian State Hydrometeorological University, Educational and Methodical Management; Head of the Department; Senior Scientist; E-mail: nata197910@yandex.ru

For citation: Fadeev S. N., Breider N. A. Evaluation of the efficiency of channels separation in a queuing system with an unlimited queue. *Journal of Instrument Engineering*. 2021. Vol. 64, N 5. P. 351—356 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454- 2021-64-5-351-356