

## ПОЛУЯВНЫЕ МНОГОШАГОВЫЕ МЕТОДЫ АДАМСА—БАШФОРТА—МУЛТОНА ПРИ РЕШЕНИИ ЖЕСТКИХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. В. ТУТУЕВА, Д. Н. БУТУСОВ, Е. Е. КОПЕЦ, В. Г. РЫБИН, А. Г. ДАВИДЧУК

*Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет  
„ЛЭТИ“ им. В. И. Ульянова (Ленина), 197376, Санкт-Петербург, Россия  
E-mail: info@etu.ru*

Исследована вычислительная эффективность полуявных и полунявных модификаций многошаговых методов численного интегрирования при моделировании жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Приведено общее описание полуявных и полунявных методов Адамса—Башфорта—Мултона. Сравняется производительность решателей на основе исследуемых методов четвертого порядка алгебраической точности, а также классических методов Адамса и формулы дифференцирования назад. Вычислительные эксперименты подтверждают, что среди рассмотренных многошаговых схем предложенные модификации метода Адамса—Башфорта—Мултона обладают наилучшей производительностью при моделировании с постоянным и переменным шагом интегрирования. Полученные результаты могут использоваться для ускорения численного моделирования в моделирующих подсистемах систем автоматизированного проектирования.

**Ключевые слова:** *многошаговые методы, полуявное интегрирование, жесткая система, численное интегрирование, метод прогноза-коррекции, метод Адамса—Башфорта—Мултона*

**Введение.** Важным критерием выбора средств и методов компьютерного моделирования физических систем и процессов является вычислительная эффективность, определяемая как соотношение вычислительных затрат и достигаемой точности. Многошаговые численные методы интегрирования позволяют перейти от непрерывной системы к дискретной при исследовании процессов и явлений, описываемых системами обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). За счет однократного вычисления функции правой части на шаге интегрирования и рекуррентного способа расчета многошаговые алгоритмы наиболее эффективны при моделировании систем высокой размерности [1—3]. По этой причине большинство современных моделирующих программных сред — как общего назначения (MatLab, Wolfram Mathematica, LabVIEW), так и специализированные симуляторы, в том числе схемотехнические системы автоматизированного проектирования (SPICE, MicroCAP, Qucs, Electric и др.) — реализуют этот класс алгоритмов в качестве стандартных решателей ОДУ [4, 5]. В то же время известно, что при увеличении порядка численная устойчивость многошаговых схем снижается [6]. Неявные многошаговые методы обладают большей численной устойчивостью, чем

явные, однако требуют применения метода Ньютона или простых итераций для аппроксимации решения в следующей точке, этот вычислительно затратный процесс частично нивелирует достоинства многошаговых алгоритмов. Таким образом, задача синтеза семейства многошаговых методов интегрирования, обладающих достаточной численной устойчивостью при сохранении вычислительных затрат на уровне явных алгоритмов, представляет как научный, так и практический интерес.

Особенно необходимы многошаговые методы повышенной устойчивости для решения жестких систем ОДУ. В работе [7] показано, что шаг явных многошаговых методов моделирования жестких задач много меньше длины отрезка интегрирования, это нивелирует преимущество методов в производительности и ведет к дополнительному росту погрешности за счет накопления ошибки арифметических операций.

В работе [8] предложено использовать полуявный принцип вычислений в многошаговых методах прогноза-коррекции. Вычислительная эффективность этого подхода подтверждена на примере двух тестовых нелинейных систем малой размерности. При этом в ряде работ показано, что полуявные и полунявные одношаговые методы интегрирования демонстрируют промежуточную для полностью явных и неявных аналогов устойчивость и вычислительную эффективность, в том числе при моделировании жестких систем большой размерности [9—12]. Поэтому целью настоящего исследования является изучение вычислительной эффективности многошаговых полуявных и полунявных методов Адамса—Башфорта—Мултона (АБМ) при решении жестких систем ОДУ.

**Полуявные и полунявные методы Адамса—Башфорта—Мултона.** В настоящей работе исследуются полуявные (ПЯ) и полунявные (ПН) модификации метода прогноза-коррекции — метода Адамса—Башфорта—Мултона. В оригинальном алгоритме АБМ все вычисления носят явный характер, в то же время его устойчивость выше, чем у явного метода Адамса—Башфорта (АБ).

Многошаговые полуявные методы интегрирования могут быть применены для систем ОДУ второго порядка и выше. Для систем первого порядка такие алгоритмы вырождаются в классический метод АБМ. Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, t), \\ \dot{y} = g(x, y, t). \end{cases} \quad (1)$$

Пусть система (1) решается при начальных условиях  $x(0) = x_0$  и  $y(0) = y_0$ .

Обозначим две переменные состояния, найденные с применением явного метода АБ, как  $x_{n+1}^p$  и  $y_{n+1}^p$ . Для системы (1) конечно-разностная схема корректора записывается как

$$x_{n+1} = x_n + hb_0 f(x_{n+1}^p, y_{n+1}^p, t_{n+1}) + h \sum_{i=0}^{k-1} b_{i+1} f(x_{n-i}, y_{n-i}, t_{n-i}), \quad (2)$$

$$y_{n+1} = y_n + hb_0 g(x_{n+1}^p, y_{n+1}^p, t_{n+1}) + h \sum_{i=0}^{k-1} b_{i+1} g(x_{n-i}, y_{n-i}, t_{n-i}), \quad (3)$$

где  $b_i$  — коэффициенты неявного метода Адамса—Мултона (АМ), а  $k$  — число шагов метода [13].

Рассматриваемый полуявный способ решения основан на замене интегратора Эйлера в составе алгоритма симплектического методом Эйлера—Кромера [13, 14]. Полуявное интегрирование подразумевает использование предварительно рассчитанных значений переменных состояния на текущем шаге интегрирования для более точной аппроксимации оставшихся значений. К многошаговым интеграторам этот подход применяется следующим образом. Заменяя  $x_{n+1}^p$  в (3) на  $x_{n+1}$ , получим

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= x_n + hb_0 f(x_{n+1}^p, y_{n+1}^p, t_{n+1}) + h \sum_{i=0}^{k-1} b_{i+1} f(x_{n-i}, y_{n-i}, t_{n-i}), \\
 y_{n+1} &= y_n + hb_0 g(x_{n+1}^p, y_{n+1}^p, t_{n+1}) + h \sum_{i=0}^{k-1} b_{i+1} g(x_{n-i}, y_{n-i}, t_{n-i}).
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Формула (4) описывает *полуявный метод АБМ* [8]. Можно заметить, что в случае системы первого порядка представленный метод сводится к классическому методу АБМ.

Формула *полуявного метода АБМ* может быть получена из конечно-разностной схемы (4) путем добавления одного неявного вычисления каждой переменной состояния, которое соответствует решаемому уравнению. Таким образом, для системы (1) полуявный метод прогноза-коррекции записывается как

$$x_{n+1} = x_n + hb_0 f(x_{n+1}, y_{n+1}^p, t_{n+1}) + h \sum_{i=0}^{k-1} b_{i+1} f(x_{n-i}, y_{n-i}, t_{n-i}),
 \tag{5}$$

$$y_{n+1} = y_n + hb_0 g(x_{n+1}, y_{n+1}, t_{n+1}) + h \sum_{i=0}^{k-1} b_{i+1} g(x_{n-i}, y_{n-i}, t_{n-i}),
 \tag{6}$$

где  $x_{n+1}$  в (5) и  $y_{n+1}$  в (6) могут быть найдены с помощью метода Ньютона или других итерационных алгоритмов [11]. В простейшем случае система алгебраических уравнений с учетом значений переменных состояния в точке  $(n + 1)$  может быть решена аналитически. Если невозможно найти аналитическое решение неявности, может быть применен метод простых итераций, имеющий в данном случае меньшую, по сравнению с полностью неявными методами, размерность решаемой задачи.

Обе полуявные модификации метода АБМ рассмотрены выше на примере двумерных систем, но могут быть использованы при решении систем ОДУ произвольного порядка. Кроме того, изменение порядка действий в обоих алгоритмах приводит к появлению целого семейства полуявных и полуявных многошаговых алгоритмов со схожими свойствами [15], но разными асимптотическими разложениями.

Гипотезой исследования является предположение, что, как и в случае одношаговых решателей ОДУ [9—11], внедрение в алгоритм метода АБМ полуявного и полуявного интегрирования приведет к увеличению точности численного решения без роста вычислительных затрат относительно явных методов.

**Результаты моделирования.** В качестве тестовой задачи выбрана следующая система ОДУ седьмого порядка:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= a(y - x) + w - u - v, \\
 \dot{y} &= cx - y - xz - p, \\
 \dot{z} &= -bz + xy, \\
 \dot{w} &= dw - yz, \\
 \dot{u} &= ev + yz, \\
 \dot{p} &= fx + yz, \\
 \dot{v} &= rx,
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

где  $a = 10$ ,  $b = 2,66667$ ,  $c = 28$ ,  $d = -1$ ,  $e = 8$ ,  $f = 1$ ,  $r = 5$  — безразмерные параметры системы [16]. В практических расчетах при данных значениях параметров система (7) считается жесткой [17].

Для системы (7) этап прогноза рассмотренных полуявных и полуявных многошаговых методов АБМ четвертого порядка алгебраической точности записывается как

$$\begin{aligned}
x_{n+1}^p &= x_n + h \left( \frac{55}{24} F_n^x - \frac{59}{24} F_{n-1}^x + \frac{37}{24} F_{n-2}^x - \frac{3}{8} F_{n-3}^x \right), \\
y_{n+1}^p &= y_n + h \left( \frac{55}{24} F_n^y - \frac{59}{24} F_{n-1}^y + \frac{37}{24} F_{n-2}^y - \frac{3}{8} F_{n-3}^y \right), \\
z_{n+1}^p &= z_n + h \left( \frac{55}{24} F_n^z - \frac{59}{24} F_{n-1}^z + \frac{37}{24} F_{n-2}^z - \frac{3}{8} F_{n-3}^z \right), \\
w_{n+1}^p &= w_n + h \left( \frac{55}{24} F_n^w - \frac{59}{24} F_{n-1}^w + \frac{37}{24} F_{n-2}^w - \frac{3}{8} F_{n-3}^w \right), \\
u_{n+1}^p &= u_n + h \left( \frac{55}{24} F_n^u - \frac{59}{24} F_{n-1}^u + \frac{37}{24} F_{n-2}^u - \frac{3}{8} F_{n-3}^u \right), \\
p_{n+1}^p &= p_n + h \left( \frac{55}{24} F_n^p - \frac{59}{24} F_{n-1}^p + \frac{37}{24} F_{n-2}^p - \frac{3}{8} F_{n-3}^p \right), \\
v_{n+1}^p &= v_n + h \left( \frac{55}{24} F_n^v - \frac{59}{24} F_{n-1}^v + \frac{37}{24} F_{n-2}^v - \frac{3}{8} F_{n-3}^v \right),
\end{aligned} \tag{8}$$

где  $F_i^j$  — функция правой части переменной  $j$  в  $i$ -й момент времени. На этапе коррекции предлагаемого полужавного метода вычисление  $F_{n+1}^j$  выполняется с учетом уже скорректированных значений переменных состояния. Для системы (7) такая конечно-разностная схема записывается как

$$\begin{aligned}
F_{n+1}^x &= a \left( y_{n+1}^p - x_{n+1}^p \right) + w_{n+1}^p - u_{n+1}^p - v_{n+1}^p, \\
y_{n+1} &= y_n + h \left( \frac{3}{8} F_{n+1}^y + \frac{19}{24} F_n^y - \frac{5}{24} F_{n-1}^y + \frac{1}{24} F_{n-2}^y \right), \\
F_{n+1}^y &= c x_{n+1} - y_{n+1}^p - x_{n+1} z_{n+1}^p - p_{n+1}^p, \\
y_{n+1} &= y_n + h \left( \frac{3}{8} F_{n+1}^y + \frac{19}{24} F_n^y - \frac{5}{24} F_{n-1}^y + \frac{1}{24} F_{n-2}^y \right), \\
F_{n+1}^z &= -b z_{n+1}^p + x_{n+1} y_{n+1}, \\
z_{n+1} &= z_n + h \left( \frac{3}{8} F_{n+1}^z + \frac{19}{24} F_n^z - \frac{5}{24} F_{n-1}^z + \frac{1}{24} F_{n-2}^z \right), \\
F_{n+1}^w &= d w_{n+1}^p - y_{n+1} z_{n+1}, \\
w_{n+1} &= w_n + h \left( \frac{3}{8} F_{n+1}^w + \frac{19}{24} F_n^w - \frac{5}{24} F_{n-1}^w + \frac{1}{24} F_{n-2}^w \right), \\
F_{n+1}^u &= e v_{n+1}^p + y_{n+1} z_{n+1}, \\
u_{n+1} &= u_n + h \left( \frac{3}{8} F_{n+1}^u + \frac{19}{24} F_n^u - \frac{5}{24} F_{n-1}^u + \frac{1}{24} F_{n-2}^u \right), \\
F_{n+1}^p &= f x_{n+1} + y_{n+1} z_{n+1}, \\
p_{n+1} &= p_n + h \left( \frac{3}{8} F_{n+1}^p + \frac{19}{24} F_n^p - \frac{5}{24} F_{n-1}^p + \frac{1}{24} F_{n-2}^p \right), \\
F_{n+1}^v &= r x_{n+1}, \\
v_{n+1} &= v_n + h \left( \frac{3}{8} F_{n+1}^v + \frac{19}{24} F_n^v - \frac{5}{24} F_{n-1}^v + \frac{1}{24} F_{n-2}^v \right),
\end{aligned} \tag{9}$$

где значения, вычисляемые полужавно, выделены полужирным шрифтом. В классическом методе АБМ данные переменные были бы промаркированы верхним индексом  $p$ .

В полунявном многошаговом методе АБМ, в отличие от конечно-разностной схемы (9), при вычислении  $F_{n+1}^j$  для  $j$ -й переменной присутствует неявность, соответствующая решаемому уравнению:

$$\begin{aligned}
 F_{n+1}^x &= a \left( y_{n+1}^p - x_{n+1} \right) + w_{n+1}^p - u_{n+1}^p - v_{n+1}^p, \\
 x_{n+1} &= x_n + h \left( \frac{3}{8} F_{n+1}^x + \frac{19}{24} F_n^x - \frac{5}{24} F_{n-1}^x + \frac{1}{24} F_{n-2}^x \right), \\
 F_{n+1}^y &= c x_{n+1} - y_{n+1} - x_{n+1} z_{n+1}^p - p_{n+1}^p, \\
 y_{n+1} &= y_n + h \left( \frac{3}{8} F_{n+1}^y + \frac{19}{24} F_n^y - \frac{5}{24} F_{n-1}^y + \frac{1}{24} F_{n-2}^y \right), \\
 F_{n+1}^z &= -b z_{n+1} + x_{n+1} y_{n+1}, \\
 z_{n+1} &= z_n + h \left( \frac{3}{8} F_{n+1}^z + \frac{19}{24} F_n^z - \frac{5}{24} F_{n-1}^z + \frac{1}{24} F_{n-2}^z \right), \\
 F_{n+1}^w &= d w_{n+1} - y_{n+1} z_{n+1}, \\
 w_{n+1} &= w_n + h \left( \frac{3}{8} F_{n+1}^w + \frac{19}{24} F_n^w - \frac{5}{24} F_{n-1}^w + \frac{1}{24} F_{n-2}^w \right), \\
 F_{n+1}^u &= e v_{n+1}^p + y_{n+1} z_{n+1}, \\
 u_{n+1} &= u_n + h \left( \frac{3}{8} F_{n+1}^u + \frac{19}{24} F_n^u - \frac{5}{24} F_{n-1}^u + \frac{1}{24} F_{n-2}^u \right), \\
 F_{n+1}^p &= f x_{n+1} + y_{n+1} z_{n+1}, \\
 p_{n+1} &= p_n + h \left( \frac{3}{8} F_{n+1}^p + \frac{19}{24} F_n^p - \frac{5}{24} F_{n-1}^p + \frac{1}{24} F_{n-2}^p \right), \\
 F_{n+1}^v &= r x_{n+1}, \\
 v_{n+1} &= v_n + h \left( \frac{3}{8} F_{n+1}^v + \frac{19}{24} F_n^v - \frac{5}{24} F_{n-1}^v + \frac{1}{24} F_{n-2}^v \right).
 \end{aligned} \tag{10}$$

На рис. 1 иллюстрируется изменение переменных состояния исследуемой системы (7) со значениями параметров  $a = 10$ ,  $b = 2,66667$ ,  $c = 28$ ,  $d = -1$ ,  $e = 8$ ,  $f = 1$ ,  $r = 5$  при моделировании (в течение 10 с) с начальными условиями  $x_0 = y_0 = z_0 = w_0 = u_0 = p_0 = v_0 = 1$  полунявной схемой (10) с постоянным шагом интегрирования  $h = 0,0001$ .

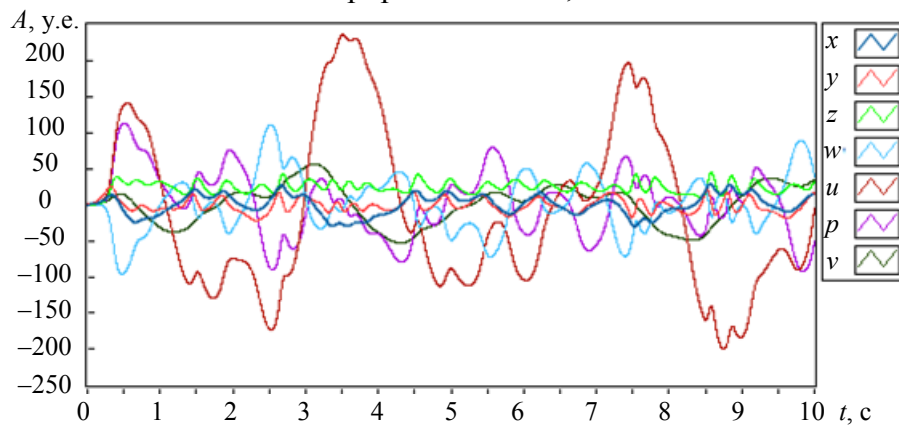


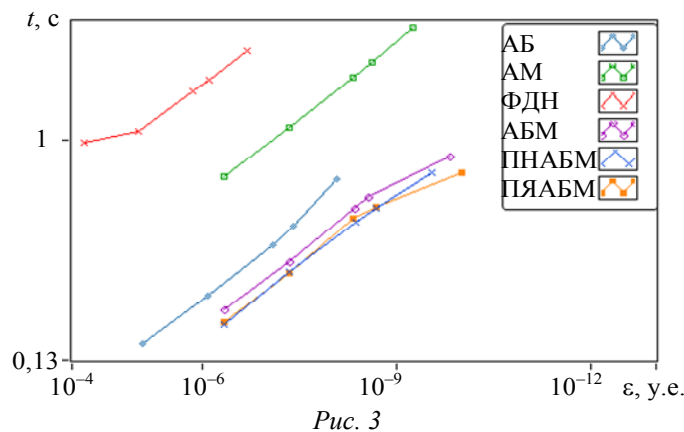
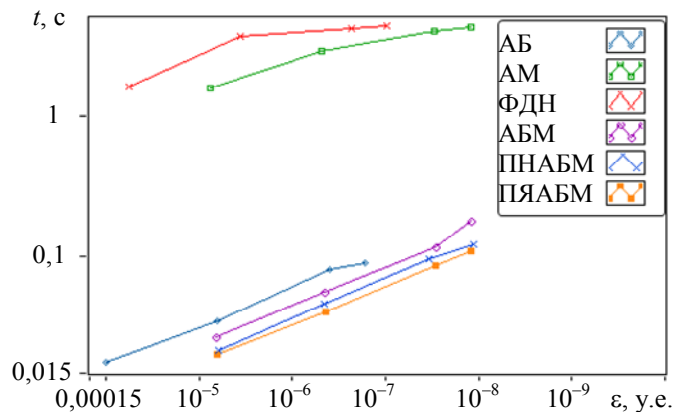
Рис. 1

Решатели ОДУ на основе рассмотренных полуявных и полунявных методов АБМ сравнивались с использованием так называемых графиков оценки производительности метода [7], отражающих зависимость точности численного решения от времени его нахождения. Хотя традиционный подход к оценке производительности численных методов интегрирования основан на использовании числа обращений к функции правой части, он малопригоден для исследования производительности полуявных методов в силу особого способа обращения

к функции правой части у последних. Для построения графиков производительности при моделировании нелинейных систем с постоянным шагом интегрирования оценивается точность получаемого численного решения относительно решения, найденного методом более высокого порядка, а также оцениваются временные затраты на интегрирование при разных значениях шага интегрирования [10]. В случае переменного шага выполняется оценка для нескольких значений допустимой локальной погрешности решения, которая используется в формуле управления шагом интегрирования [6].

Помимо предлагаемых численных методов исследовались: явный метод Адамса—Башфорта, неявный метод Адамса—Мултона, формула дифференцирования назад (ФДН) и метод прогноза-коррекции АБМ. Сравнение выполнялось для методов четвертого порядка при моделировании с постоянным и переменным шагом интегрирования на временном интервале  $T = 10$  с при  $a = 10$ ,  $b = 2,66667$ ,  $c = 28$ ,  $d = -1$ ,  $e = 8$ ,  $f = 1$ ,  $r = 5$  и начальных условиях  $x_0 = y_0 = z_0 = w_0 = u_0 = p_0 = v_0 = 1$ . Погрешность численных решений оценивалась относительно значений, вычисляемых в те же моменты времени методом Дормана—Принса восьмого порядка алгебраической точности [6]. Для построения графиков производительности с постоянным шагом  $h$  использовались значения  $[0,0001; 0,000125; 0,00025; 0,0005]$ ; в случае переменного шага допустимая погрешность составляла  $[10^{-9}; 10^{-10}; 10^{-11}; 10^{-12}]$ . Все эксперименты выполнялись в среде NI LabVIEW 2020 с типом данных двойной точности. Полученные графики оценки вычислительной эффективности сравниваемых решателей ОДУ при интегрировании с постоянным и переменным шагом представлены на рис. 2 и 3 соответственно.

Можно отметить, что полуявные и полунеявные модификации метода АБМ демонстрируют точность численного решения, сопоставимую с точностью решения, получаемого оригинальным методом АБМ и неявным методом АМ как при постоянном, так и при адаптивном шаге интегрирования. При этом вычислительные затраты на вычисление решения полуявными и полунеявными алгоритмами меньше, чем у метода АБМ, и незначительно больше, чем у явного метода АБ.



Таким образом, можно заключить, что среди рассмотренных многошаговых методов наилучшую вычислительную эффективность при моделировании жесткой системы демонстрируют предлагаемые полуявные и полунявные методы АБМ.

**Заключение.** В работе рассмотрена эффективность применения многошаговых решателей ОДУ, основанных на схеме прогноза-коррекции, для решения жесткой системы седьмого порядка. Описаны две модификации метода АБМ с полуявным и полунявным принципами вычислений. Из результатов моделирования видно, что предлагаемые полуявные многошаговые методы интегрирования четвертого порядка точности демонстрируют меньшую погрешность численного решения и отличаются малыми вычислительными затратами, как и в случае нежестких систем, исследованных ранее [8]. Однако производительность решателя на основе полунявного метода интегрирования может значительно снизиться, если для аппроксимации решения в следующей точке применять метод Ньютона. Этот подход стоит использовать только в том случае, когда решение системы диагонально-нявных алгебраических уравнений невозможно. В качестве альтернативы методу Ньютона можно применять метод простых итераций, требующий меньших вычислительных затрат [8].

Поскольку полуявный характер вычислений подразумевает использование переменных состояния, рассчитанных на текущем шаге интегрирования, для вычисления оставшихся переменных, то вычислительную эффективность обоих рассмотренных методов, особенно при моделировании систем высокой размерности, можно повысить, устранив избыточные вычисления на этапе прогноза. Разработка алгоритма определения оптимальной с этой точки зрения последовательности вычислений переменных на этапе коррекции, а также теоретическая оценка областей устойчивости полученных методов являются направлениями дальнейших исследований.

Работа поддержана грантом Российского научного фонда № 19-71-00087.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Iri M., Tsuchiya T., Hoshi M. Automatic computation of partial derivatives and rounding error estimates with applications to large-scale systems of nonlinear equations // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 1988. Vol. 24, N 3. P. 365—392.
2. Faragó I. et al. Efficient algorithms for large scale scientific computations: Introduction // *Computers and Mathematics with Applications*. 2014. Vol. 67, N 12. P. 2085—2087.
3. Faragó I. et al. Efficient numerical methods for scientific applications: Introduction // *Computers and Mathematics with Applications*. 2013. Vol. 65, N 3. P. 297—300.
4. Корчак А. Б. Метод ускорения численного решения систем ОДУ и его применение для программного комплекса моделирования сверхбольших интегральных схем: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т), 2011. 112 с.
5. Han T., Han Y. Numerical solution for super large scale systems // *IEEE Access*. 2013. Vol. 1. P. 537—544.
6. Хайпер Э., Нерсетт С. П., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990. 512 с.
7. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983.
8. Tutueva A., Karimov T., Butusov D. Semi-Implicit and Semi-Explicit Adams-Bashforth-Moulton Methods // *Mathematics*. 2020. Vol. 8, N 5. P. 780.
9. Бутусов Д. Н., Каримов А. И., Каримов Т. И. Аппаратно-ориентированные численные методы интегрирования. СПб: Изд-во СПбГЭТУ „ЛЭТИ“, 2016. 192 с.
10. Butusov D. N., Karimov A. I., Tutueva A. V. Hardware-targeted semi-implicit extrapolation ODE solvers // 2016 Intern. Siberian Conf. on Control and Communications (SIBCON). IEEE, 2016. P. 1—6.

11. *Ostrovskii V. Y., Butusov D. N., Toepfer H.* Application of the semi-implicit numerical integration methods for the simulation of memristor-based circuits // *International Academic Forum Амо–Spitse–Neseff*. 2016. P. 44—46.
12. *Tutueva A. V.* et al. The Convergence of Semi-Implicit Numerical Methods // *2019 IEEE Conf. of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (EIconRus)*. IEEE, 2019. P. 366—368.
13. *Hairer E., Lubich C., Wanner G.* Geometric numerical integration: structure-preserving algorithms for ordinary differential equations. Springer Science & Business Media, 2006. Vol. 31.
14. *Blanes S., Casas F.* A concise introduction to geometric numerical integration. CRC press, 2017.
15. *Butusov D. N.* et al. New technique to quantify chaotic dynamics based on differences between semi-implicit integration schemes // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2021. Vol. 92. P. 105467.
16. *Yu W.* et al. Design of a new seven-dimensional hyperchaotic circuit and its application in secure communication // *IEEE Access*. 2019. Vol. 7. P. 125586—125608.
17. *Ахмеров Р. Р.* Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Учеб. пос. Новосибирск: НГУ, 1994. 100 с.

#### Сведения об авторах

- Александра Вадимовна Тутуева** — СПбГЭТУ „ЛЭТИ“, кафедра систем автоматизированного проектирования; ассистент; E-mail: avtutueva@etu.ru
- Денис Николаевич Бутусов** — канд. техн. наук, доцент; СПбГЭТУ „ЛЭТИ“, кафедра систем автоматизированного проектирования; профессор; E-mail: dnbutusov@etu.ru
- Екатерина Евгеньевна Конец** — СПбГЭТУ „ЛЭТИ“, кафедра систем автоматизированного проектирования; ассистент; E-mail: eekopets@etu.ru
- Вячеслав Геннадьевич Рыбин** — СПбГЭТУ „ЛЭТИ“, кафедра систем автоматизированного проектирования; ассистент; E-mail: vgrybin@etu.ru
- Андрей Геннадьевич Давидчук** — канд. техн. наук; СПбГЭТУ „ЛЭТИ“, кафедра систем автоматизированного проектирования; доцент; E-mail: agdavidchuk@etu.ru

Поступила в редакцию  
09.04.2021 г.

**Ссылка для цитирования:** Тутуева А. В., Бутусов Д. Н., Конец Е. Е., Рыбин В. Г., Давидчук А. Г. Полуявные многошаговые методы Адамса—Башфорта—Мултона при решении жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений // *Изв. вузов. Приборостроение*. 2021. Т. 64, № 8. С. 599—607.

#### SEMI-EXPLICIT MULTISTEP ADAMS-BASHFORTH-MOULTON METHODS FOR SOLVING STIFF SYSTEMS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

A. V. Tutueva, D. N. Butusov, E. E. Kopets, V. G. Rybin, A. G. Davidchuk

St. Petersburg Electrotechnical University "LETI", 197376, St. Petersburg, Russia  
E-mail: info@etu.ru

The computational efficiency of semi-explicit and semi-implicit multistep methods of numerical integration when applied to simulation of seven-dimensional stiff system of ordinary differential equations is studied. A general description of semi-explicit and semi-implicit Adams-Bashforth-Moulton methods is presented. Performance of solvers based on investigated methods of the fourth order is compared to that of solvers using Adams methods and the backward differentiation formula. The computational experiments carried out confirm that the proposed modifications of the Adams-Bashforth-Moulton method demonstrate the best performance among the considered multistep schemes, when simulating with a constant and variable integration step. It is assumed that the obtained results can be used to speed up numerical modeling in modeling subsystems of computer-aided design systems.

**Keywords:** multistep methods, semi-explicit integration, stiff system, numerical integration, prediction-correction method, Adams-Bashforth-Moulton method

#### REFERENCES

1. Iri M., Tsuchiya T., Hoshi M. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1988, no. 3(24), pp. 365—392.
2. Faragó I. et al. *Computers and Mathematics with Applications*, 2014, no. 12(67), pp. 2085—2087.



3. Faragó I. et al. *Computers and Mathematics with Applications*, 2013, no. 3(65), pp. 297–300.
4. Korchak A.B. *Metod uskoreniya chislennogo resheniya sistem ODU i yego primeneniye dlya programmno kompleksa modelirovaniya sverkhbol'shikh integral'nykh skhem* (A Method for Accelerating the Numerical Solution of ODE Systems and Its Application for a Software Package for Modeling Very Large Integrated Circuits), Candidate's thesis, Moscow, 2011, 112 p. (in Russ.)
5. Han T., Han Y. *IEEE Access*, 2013, vol. 1, pp. 537–544.
6. Hairer E., Nørsett S.P., Wanner G. *Solving Ordinary Differential Equations. Nonstiff problems*, Springer Series in Computational Mathematics, 1990.
7. Samarskiy A.A. *Teoriya raznostnykh skhem* (Difference Scheme Theory), Moscow, 1983. (in Russ.)
8. Tutueva A., Karimov T., Butusov D. *Mathematics*, 2020, no. 5(8), pp. 780.
9. Butusov D.N., Karimov A.I., Karimov T.I. *Apparatno-orientirovannyye chislennyye metody integrirovaniya* (Hardware-Oriented Numerical Integration Methods), St. Petersburg, 2016, 192 p. (in Russ.)
10. Butusov D.N., Karimov A.I., Tutueva A.V. *2016 International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON)*, IEEE, 2016, pp. 1–6.
11. Ostrovskii V.Y., Butusov D.N., Toepfer H. *International Academic Forum Amo–Spitse–Neseff*, 2016, pp. 44–46.
12. Tutueva A.V. et al. *2019 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (EIConRus)*, IEEE, 2019, pp. 366–368.
13. Hairer E., Lubich C., Wanner G. *Geometric numerical integration: structure-preserving algorithms for ordinary differential equations*, Springer Science & Business Media, 2006, vol. 31.
14. Blanes S., Casas F. *A concise introduction to geometric numerical integration*, CRC press, 2017.
15. Butusov D.N. et al. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2021, vol. 92, pp. 105467.
16. Yu W. et al. *IEEE Access*, 2019, vol. 7, pp. 125586–125608.
17. Akhmerov R.R. *Chislennyye metody resheniya obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* (Numerical Methods for Solving Ordinary Differential Equations), Novosibirsk, 1994, 100 p. (in Russ.)

#### Data on authors

- Alexandra V. Tutueva** — St. Petersburg Electrotechnical University "LETI", Department of Computer-Aided Design; Assistant; E-mail: avtutueva@etu.ru
- Denis N. Butusov** — PhD, Associate Professor; St. Petersburg Electrotechnical University "LETI", Department of Computer-Aided Design; Professor; E-mail: dnbutusov@etu.ru
- Ekaterina E. Kopets** — St. Petersburg Electrotechnical University "LETI", Department of Computer-Aided Design; Assistant; E-mail: eekopets@etu.ru
- Vyacheslav G. Rybin** — St. Petersburg Electrotechnical University "LETI", Department of Computer-Aided Design; Assistant; E-mail: vgrybin@etu.ru
- Andrey G. Davidchuk** — PhD; St. Petersburg Electrotechnical University "LETI", Department of Computer-Aided Design; Associate Professor; E-mail: avtutueva@etu.ru

**For citation:** Tutueva A. V., Butusov D. N., Kopets E. E., Rybin V. G., Davidchuk A. G. Semi-explicit multi-step Adams-Bashforth-Moulton methods for solving stiff systems of ordinary differential equations. *Journal of Instrument Engineering*. 2021. Vol. 64, N 8. P. 599–607 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2021-64-8-599-607