

**УЧЕТ ВРЕМЕНИ ЧИСТОГО ЗАПАЗДЫВАНИЯ В ПРЯМОЙ ЦЕПИ
ПРИ РАСЧЕТЕ ДИСКРЕТНОЙ КОРРЕКЦИИ ЦИФРОВОЙ СЛЕДЯЩЕЙ СИСТЕМЫ
С МИНИМАЛЬНЫМ ВРЕМЕНЕМ ПОЛНОГО ЗАТУХАНИЯ СВОБОДНОГО ПРОЦЕССА**

А. М. Коновалов, А. И. Коршунов*

*Военно-морской политехнический институт ВУНЦ ВМФ
„Военно-морская академия им. Н. Г. Кузнецова“, Санкт-Петербург, Россия
a.i.korshunov@mail.ru

Аннотация. Применение известной методики расчета цифровой следящей системы (ЦСС) с минимальным временем полного затухания свободного процесса при наличии времени чистого запаздывания в прямой цепи не позволяет физически реализовать корректирующее устройство (КУ). Адаптация методики расчета к рассматриваемому случаю основана на предварительном определении минимального времени затухания свободного процесса. Это позволило снизить порядок числителя желаемой передаточной функции замкнутой ЦСС до порядка числителя передаточной функции непрерывной части (НЧ) системы и обеспечить физическую реализацию КУ. Установлено, что минимальное время переходного процесса ЦСС увеличивается на время чистого запаздывания τ в прямой цепи, а скоростная ошибка возрастает на величину, равную произведению τ и скорости слежения Ω . Доказано, что выбор числителя желаемой передаточной функции замкнутой ЦСС, равной числителью дискретной передаточной функции НЧ, не только упрощает КУ и обеспечивает „грубость“ ЦСС, но также является необходимым и достаточным условием исключения „скрытых колебаний“ после полного затухания дискретного переходного процесса. Проведено сравнение предложенной методики расчета с методикой, основанной на использовании предиктора Смита. Рассмотрен пример расчета ЦСС с чистым запаздыванием в прямой цепи. Проведено ее цифровое моделирование в системе MatLab при отработке линейно возрастающего и скачкообразного задающего воздействия, подтвердившее минимальное время затухания свободного процесса и расчетное значение скоростной ошибки.

Ключевые слова: цифровая следящая система, время чистого запаздывания, затухание свободного процесса, конечное время

Ссылка для цитирования: Коновалов А. М., Коршунов А. И. Учет времени чистого запаздывания в прямой цепи при расчете дискретной коррекции цифровой следящей системы с минимальным временем полного затухания свободного процесса // Изв. вузов. Приборостроение. 2022. Т. 65, № 8. С. 554—564. DOI: 10.17586/0021-3454-2022-65-8-554-564.

**ACCOUNTING FOR NET DELAY TIME IN DIRECT CIRCUIT WHEN CALCULATING DISCRETE CORRECTION
OF DIGITAL TRACKING SYSTEM WITH MINIMUM TIME
OF FREE PROCESS TOTAL ATTENUATION**

A. M. Konovalov, A. I. Korshunov*

*Naval Polytechnic Institute of the Navy Military Educational and Scientific Center “Fleet Admiral N.G. Kuznetsov
Naval Academy”, St. Petersburg, Russia
a.i.korshunov@mail.ru

Abstract. The use of a well-known method for calculating a digital tracking system with a minimum time of complete attenuation of a free process in the presence of a net delay time in a direct circuit does not allow the correction device to be physically implemented. The adaptation of the calculation method to the case under consideration is based on the preliminary determination of the minimum attenuation time of the free process. This made it possible to reduce the

order of the numerator of the desired transfer function of the closed digital tracking system to the order of the numerator of the transfer function of the continuous part of the system and to ensure the physical implementation of the correction device. The minimum transition time of the digital tracking system is shown to increase by the time of the net delay t in the forward circuit, and the speed error increases by an amount equal to the product of t and the tracking speed. It is proved that the choice of the numerator of the desired transfer function of a closed digital tracking system equal to the numerator of the discrete transfer function of the continuous part, not only simplifies the correction device and ensures the digital tracking system "roughness", but is also a necessary and sufficient condition for the exclusion of "hidden oscillations" after the total attenuation of the discrete transient process. The proposed calculation method is compared with the method based on the use of the Smith predictor. An example of calculating a digital tracking system with a net delay in a direct circuit is considered. Its digital modeling was carried out in the MatLab system when working out linearly increasing and discontinuous setting effects, which confirmed the minimum attenuation time of the free process and the calculated value of the velocity error.

Keywords: digital tracking system, net delay time, free process attenuation, end time

For citation: Konovalov A. M., Korshunov A. I. Accounting for net delay time in direct circuit when calculating discrete correction of digital tracking system with minimum time of free process total attenuation. *Journal of Instrument Engineering*. 2022. Vol. 65, N 8. P. 554—564 (in Russian). DOI: 10.17586/0021-3454-2022-65-8-554-564.

Введение. Цифровые следящие системы (ЦСС) являются одним из важнейших функциональных элементов автоматизированных систем управления технологическими процессами (АСУ ТП) как в производственной, так и в оборонной области. Функциональная задача ЦСС — преобразование в реальном масштабе времени управляющего воздействия на технологический объект, определяемого вычислительным комплексом АСУ в цифровой форме, в соответствующее механическое воздействие. Из назначения следуют основные требования к ЦСС: высокое быстродействие и точность воспроизведения. Современный уровень развития вычислительной техники позволяет рассматривать ЦСС как импульсные системы, пренебрегая квантованием сигналов по уровню. Это позволяет использовать замечательное свойство линейных стационарных импульсных систем — возможность полного затухания свободного процесса за конечное время, обеспечивающее наибольшее быстродействие импульсной системы управления.

Возможность получения в линейной стационарной импульсной системе конечного времени полного затухания свободного процесса известна давно [1—4]. Такие процессы в линейных импульсных системах назывались в отечественной литературе процессами конечной длительности, а в переводной — апериодическими процессами, что, очевидно, хуже отражает их основную особенность.

В доступных публикациях последнего времени не содержится исследований, посвященных развитию методики синтеза цифровых автоматических систем с конечным временем затухания свободного процесса. Более того, встречаются издания высокого уровня, например [5], — учебник для вузов (с грифом „Допущено УМО вузов России по образованию в области энергетики и электротехники в качестве учебника“), содержащий ошибочные рекомендации по синтезу электроприводов постоянного тока с конечным временем переходного процесса, заранее приводящие к длительно затухающим колебаниям выходной величины внутри периодов дискретизации. Это определило необходимость исправления указанных ошибок [6] и дальнейшего развития методики синтеза систем данного класса.

В работе [7] показана возможность с помощью линейного дискретного корректирующего устройства получить конечное время полного затухания свободного процесса в линеаризованной модели ЦСС, представленной на рис. 1 (ИИЭ — идеальный импульсный элемент с периодом дискретизации T , ФНП — фиксатор нулевого порядка). Это время не превышает целого числа периодов дискретизации, равного порядку непрерывной части (НЧ) ЦСС.

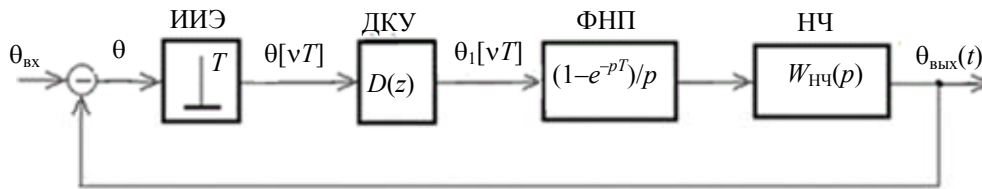


Рис. 1

В работе [7] показано, что управляемость и наблюдаемость дискретной модели непрерывной части системы — достаточные условия реализации затухания свободного процесса за конечное время. Предложена методика выбора простейшей передаточной функции $D(z)$ дискретного корректирующего устройства (ДКУ).

В работе [8] рассмотрен расчет ЦСС с минимальным конечным временем затухания свободного процесса при заданном требовании к ее точности:

$$\theta_k \leq \theta_{\text{клоп}} \quad \text{при} \quad \Omega \leq \Omega_{\text{доп}}, \quad (1)$$

θ_k — скоростная ошибка, а $\theta_{\text{клоп}}$ — ее допустимая величина, $\Omega_{\text{доп}}$ — допустимая скорость слежения при передаточной функции непрерывной части, типовой для электромеханических ЦСС:

$$W_{\text{НЧ}}(p) = \frac{K}{p(T_1 p + 1) \dots (T_{n-1} p + 1)}, \quad n \leq 5, \quad (2)$$

где K — коэффициент преобразования, T_1, \dots, T_{n-1} — постоянные времени исполнительного двигателя, усилителя мощности и других элементов НЧ. Установлена пропорциональность скоростной ошибки периоду дискретизации T , что при выборе T по требованию точности может вызвать завышение частоты дискретизации и сужение линейной зоны системы. В статье [9] предложен метод расчета ДКУ, обеспечивающий конечное время полного затухания свободного процесса, большее минимального, при сохранении скоростной ошибки как при минимальном времени полного затухания свободного процесса. В работе [10] предложена методика расчета ДКУ, обеспечивающего не только конечное время полного затухания свободного процесса, но и необходимый порядок астатизма (2 или 3) ЦСС.

В работах [6—10] не учтено время чистого запаздывания τ , всегда реально существующее в прямой цепи ЦСС. Его причиной могут быть существенное время выполнения вычислений в ДКУ, а также наличие времени чистого запаздывания в НЧ. В исследуемой линеаризованной математической модели ЦСС, представленной на рис. 2, время чистого запаздывания τ учтено звеном чистого запаздывания с передаточной функцией $e^{-p\tau}$.

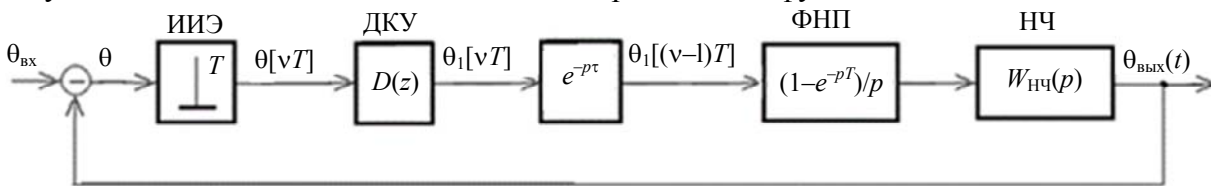


Рис. 2

В дальнейшем полагаем время запаздывания кратным периоду дискретизации, т.е. $\tau = lT$, l — целое число.

Непосредственное применение методики расчета ЦСС с конечным временем затухания свободного процесса, использованной в работах [6—10], при наличии времени чистого запаздывания в прямой цепи приводит к физически не реализуемому ДКУ. Это требует адаптации методики расчета ДКУ к случаю чистого запаздывания и определения необходимых и достаточных условий исключения скрытых колебаний на выходе внутри интервалов дискретизации после полного затухания дискретного переходного процесса.

Задача настоящей статьи — определение простейшей передаточной функции ДКУ, обеспечивающей минимальное время полного затухания переходной характеристики ЦСС с

запаздыванием, без применения известного, но весьма сложного подхода, основанного на использовании предиктора Смита [11, 12], „выводящего“ запаздывание из замкнутого контура управления. При этом предполагается и оценка снижения точности слежения ЦСС, вызванного временем чистого запаздывания.

Синтез передаточной функции ДКУ. Передаточная функция разомкнутой ЦСС (рис. 2) с учетом наличия чистого запаздывания в прямой цепи имеет вид:

$$W_{\text{ЦСС}}(z) = D(z)z^{-l}W_{\text{НЧ}}(z), \quad (3)$$

где $D(z)$ — передаточная функция ДКУ, множитель z^{-l} учитывает время чистого запаздывания в прямой цепи $\tau=lT$, $W_{\text{НЧ}}(z)$ — дискретная передаточная функция НЧ совместно с ФНП,

$$W_{\text{НЧ}}(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{W_{\text{НЧ}}(p)}{p} \right\} = \frac{R_{n-1}(z)}{Q_n(z)}, \quad (4)$$

$$R_{n-1}(z) = \beta_{n-1}z^{n-1} + \dots + \beta_1z + \beta_0, \quad Q_n(z) = (z-1)(z-d_1)\dots(z-d_{n-1}),$$

$Z\{\dots\}$ — символ Z-преобразования [13], $d_i = \exp(-T/T_i)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, T_i — постоянные времени НЧ (2).

Передаточная функция замкнутой ЦСС с конечным временем затухания переходного процесса, как известно [1—4, 7], должна иметь вид:

$$\Phi_{\text{ЦСС}}(z) = \frac{G_{m-1}(z)}{z^m}, \quad G_{m-1}(z) = g_{m-1}z^{m-1} + \dots + g_1z + g_0. \quad (5)$$

Согласно формулам (3), (5) находим передаточную функцию разомкнутой ЦСС:

$$W_{\text{ЦСС}}(z) = D(z)z^{-l}W_{\text{НЧ}}(z) = \frac{\Phi_{\text{ЦСС}}(z)}{1 - \Phi_{\text{ЦСС}}(z)} = \frac{G_{m-1}(z)}{z^m - G_{m-1}(z)} = \frac{g_{m-1}z^{m-1} + \dots + g_1z + g_0}{z^m - g_{m-1}z^{m-1} - \dots - g_1z - g_0}. \quad (6)$$

Из выражения (6) находим необходимую передаточную функцию ДКУ

$$D(z) = \frac{G_{m-1}(z)}{z^m - G_{m-1}(z)} \Big/ z^{-l}W_{\text{НЧ}}(z) = \frac{(g_{m-1}z^{m-1} + \dots + g_1z + g_0)z^l}{z^m - g_{m-1}z^{m-1} - \dots - g_1z - g_0} \cdot \frac{Q_n(z)}{R_{n-1}(z)}. \quad (7)$$

Поскольку степень числителя $D(z)$ на l выше степени его знаменателя, ДКУ оказывается физически не реализуемым. Как будет ясно из дальнейшего, причиной этого является наличие чистого запаздывания в прямой цепи ЦСС.

С учетом времени чистого запаздывания в прямой цепи ЦСС, составляющего l периодов дискретизации, и минимального времени перевода НЧ из состояния $\theta_{\text{вых}} = 0 = \text{const}$ в состояние $\theta_{\text{вых}} \neq 0 = \text{const}$, согласно [7] составляющего n периодов дискретизации, минимальное значение m :

$$m = l + n. \quad (8)$$

Таким образом, время чистого запаздывания в прямой цепи увеличивает минимальное время полного затухания свободного процесса в ЦСС на его величину. Поскольку дискретный выходной сигнал ЦСС при отработке скачка появится в момент $t = (l+1)T$, степень числителя желаемой передаточной функции замкнутой ЦСС должна равняться

$$r = m - (l+1) = l + n - l - 1 = n - 1.$$

Следовательно, желаемая передаточная функция замкнутой ЦСС имеет вид:

$$\Phi_{\text{ЦСС}}(z) = \frac{G_{n-1}(z)}{z^m}, \quad G_{n-1}(z) = g_{n-1}z^{n-1} + \dots + g_1z + g_0. \quad (9)$$

Поскольку для удовлетворения известных требований „грубости“ ЦСС и сохранения первого порядка ее астатизма необходимо наличие единичного полюса передаточной функции $W_{\text{ЦСС}}(z)$ [13], должно выполняться условие:

$$z^m - g_{n-1}z^{n-1} - \dots - g_1z - g_0 \Big|_{z=1} = 0, \quad \text{или} \quad g_{n-1} + \dots + g_1z + g_0 = 1. \quad (10)$$

С учетом формул (4) и (9) находим необходимую передаточную функцию ДКУ:

$$D(z) = \frac{G_{n-1}(z)}{z^m - G_{n-1}(z)} / z^{-l} W_{\text{НЧ}}(z) = \frac{G_{n-1}(z)z^l}{z^m - G_{n-1}(z)} \cdot \frac{Q_n(z)}{R_{n-1}(z)}. \quad (11)$$

При выборе полинома $G_{n-1}(z)$ кроме условий (10) необходимо выполнить:

— условие „грубости“ ЦСС;

— условие простоты ДКУ;

— условие отсутствия скрытых колебаний внутри интервалов дискретизации при $t > mT$.

Для обеспечения необходимой „грубости“ ЦСС [13] и желательной простоты ДКУ в работе [8] рекомендовано выбрать числитель передаточных функций $W_{\text{ЦСС}}(z)$ и $\Phi_{\text{ЦСС}}(z)$ равным числителю совместной дискретной передаточной функции НЧ и ФНП (4), т.е. $R_{n-1}(z)$. При этом с учетом требования (10) необходимо выполнить условие

$$\beta_{n-1} + \beta_{n-2} + \dots + \beta_1z + \beta_0 = 1. \quad (12)$$

Несложно показать (см. Теорему в Приложении), что рекомендованный выбор является необходимым и достаточным для исключения скрытых колебаний внутри интервалов дискретизации при $t > mT$.

Заметим, что возможное другое решение задачи, основанное на применении предиктора Смита [11, 12], сложнее, поскольку требует использования модели НЧ с запаздыванием, что также показано в Приложении.

Оценка скоростной ошибки ЦСС. Скоростная ошибка линейризованной модели ЦСС определяется, как известно, выражением

$$\theta_k = \frac{\Omega T}{W_{\text{ЦСС1}}(1)}, \quad (13)$$

где $W_{\text{ЦСС1}}(z) = (z-1)W_{\text{ЦСС}}(z)$, $W_{\text{ЦСС1}}(1) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)W_{\text{ЦСС}}(z)$.

В рассматриваемом случае с учетом (П.1) и (П.2) получаем

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)W_{\text{ЦСС}}(z) &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{R_{n-1}(z)}{z^m - R_{n-1}(z)} = \frac{R_{n-1}(1)}{\lim_{z \rightarrow 1} [(z^m - R_{n-1}(z)) / (z-1)]} = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \beta_{n-1-i} / (m - \sum_{i=0}^{n-1} (n-1-i)\beta_{n-1-i}) = 1 / (l + \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)\beta_{n-1-i}). \end{aligned} \quad (14)$$

При выполнении вычислений использованы правило Лопиталья и вытекающее из условия (12) равенство

$$R_{n-1}(1) = \beta_{n-1} + \beta_{n-2} + \dots + \beta_1 + \beta_0 = 1. \quad (15)$$

В результате θ_k можно представить в виде

$$\theta_k = \Omega T (l + \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)\beta_{n-1-i}). \quad (16)$$

В статье [8] показано, что при достаточно малом периоде дискретизации T величину

$$\mu = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_{n-1-i} / (l + \sum_{i=0}^{n-1} i\beta_{n-1-i}) = \frac{\beta_{n-1} + \beta_{n-2} + \dots + \beta_1z + \beta_0}{\beta_{n-1} + 2\beta_{n-2} + \dots + (n-1)\beta_1 + n\beta_0}$$

можно полагать постоянной, зависящей от порядка n передаточной функции $W_{НЧ}(p)$ (2). При рассматриваемых значениях $n = 2, 3, 4$ и 5 , согласно [8], $\mu = 2/3, 1/2, 2/5$ и $1/3$ соответственно. Таким образом, выражение (16) можно представить в виде:

$$\theta_k = \Omega(\tau + T/\mu), \tag{17}$$

Из полученного выражения (17) следует, что в ЦСС с конечным временем затухания свободного процесса время чистого запаздывания в прямой цепи повышает скоростную ошибку на величину $\Omega\tau$.

Пример. Рассмотрим ЦСС из примера, приведенного в работе [8], усложнив его наличием чистого запаздывания в прямой цепи. Исходные данные, заимствованные из статьи [8]:

$$W_{НЧ}(p) = \frac{K}{p(T_1p + 1)(T_2p + 1)}, \quad T_1 = 0,1 \text{ с}, \quad T_2 = 0,02 \text{ с}, \quad T = 0,0025 \text{ с}, \quad W_{НЧ}(z) = \frac{R_2(z)}{Q_3(z)} =$$

$$= \frac{\beta_2 z^2 + \beta_1 z + \beta_0}{(z-1)Q_2(z)}, \quad \beta_2 / K = 1,2545 \cdot 10^{-6}, \quad \beta_1 / K = 4,8346 \cdot 10^{-6}, \quad \beta_0 / K = 1,1638 \cdot 10^{-6}, \quad Q_2(z) =$$

$$= (1-d_1)(1-d_2) = z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0, \quad d_1 = e^{-T/T_1}, \quad d_2 = e^{-T/T_2}, \quad \alpha_1 = -d_1 - d_2 = -1,8578, \quad \alpha_0 =$$

$$= d_1 d_2 = 0,86071.$$

Примем для определенности $\tau = lT$, $l = 3$, $\tau = 0,0075$ с.

Из условия (12) определяем необходимое значение коэффициента преобразования K :

$$K = 1/(\beta_2 / K + \beta_1 / K + \beta_0 / K) = 1/(1,1638 \cdot 10^{-6} + 1,2545 \cdot 10^{-6} + 4,8346 \cdot 10^{-6}) =$$

$$= 1/ 7,2529 \cdot 10^{-6} = 1,3788 \cdot 10^5.$$

Минимальное время полного затухания свободного процесса: $t_{\Pi} = mT$, $m = l + n = 3 + 3 = 6$. По формулам (П.1) и (П.2) определяем передаточную функцию ДКУ:

$$D(z) = \frac{Q_2(z)z^3}{S_5(z)} = \frac{z^5 + \alpha_1 z^4 + \alpha_2 z^3}{z^5 + s_4 z^4 + s_3 z^3 + s_2 z^2 + s_1 z + s_0},$$

где $\alpha_1 = -1,8578$, $\alpha_0 = 0,86071$, $s_4 = s_3 = s_2 = 1$, $s_1 = 1 - \beta_2 = 1 - 1,2545 \cdot 10^{-6} \cdot 1,3788 \cdot 10^5 = 0,8270$, $s_0 = 1 - \beta_2 - \beta_1 = \beta_0 = 1,1638 \cdot 10^{-6} \cdot 1,3788 \cdot 10^5 = 0,1605$.

Для исследования процессов в ЦСС в системе Matlab 6.5 Simulink 5 построена ее цифровая модель, представленная на рис. 3. Временное запаздывание в цифровой модели учтено в дискретном блоке с передаточной функцией $D(z)z^{-l}$

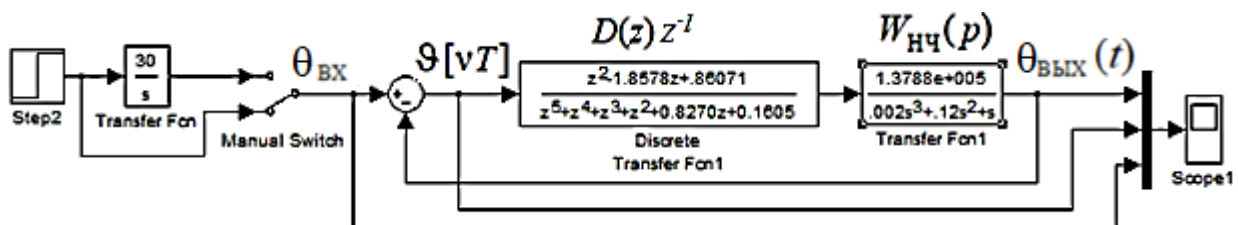


Рис. 3

На рис. 4 и 5 представлены соответственно процессы отработки единичного скачка и линейно возрастающего воздействия со скоростью $\Omega = 30^\circ/\text{с}$. Из рис. 4 видно, что свободный процесс на выходе системы начинается через три периода дискретизации и заканчивается еще через три периода, что согласуется с ожидаемым результатом.

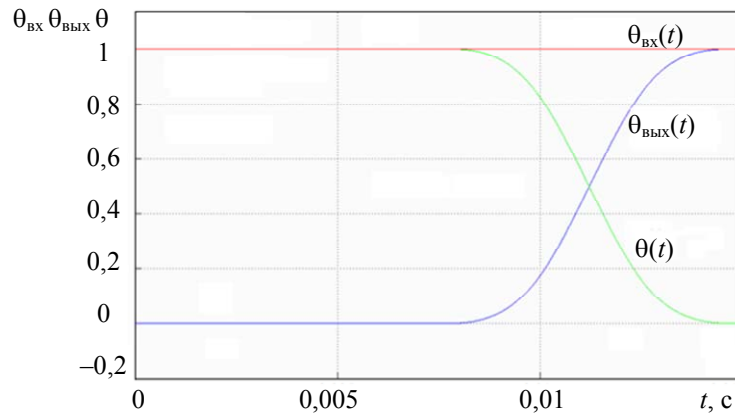


Рис. 4

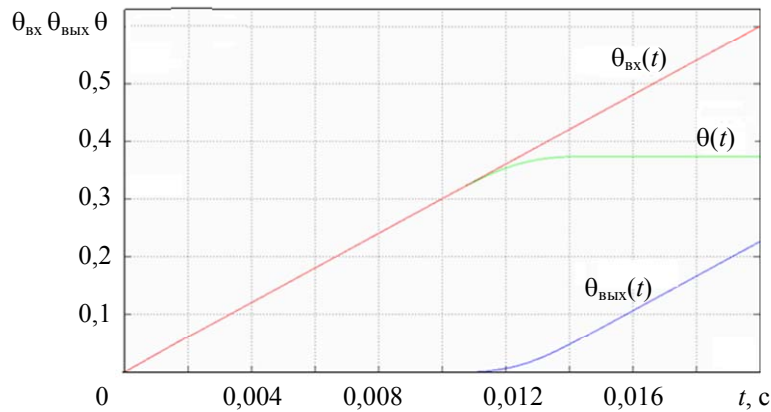


Рис. 5

При обработке линейно возрастающего воздействия, как видно из рис. 5, свободный процесс также заканчивается в конце 6-го периода дискретизации и устанавливается скоростная ошибка $\theta_k = 0,3741^\circ$. Расчетное ее значение составляет, согласно формуле (17), с учетом $\mu = 1/2$:

$$\theta_k = \Omega(\tau + T / \mu) = 30^\circ(0,0075 + 0,0025 / 0,5) = 0,375^\circ.$$

Небольшое расхождение с результатом моделирования вызвано приближенным значением $\mu = 1/2$. Вычислив его точное значение

$$\mu = \frac{\beta_2 + \beta_1 + \beta_0}{\beta_2 + 2\beta_1 + 3\beta_0} = \frac{1,2545 \cdot 10^{-6} + 4,8346 \cdot 10^{-6} + 1,1638 \cdot 10^{-6}}{1,2545 \cdot 10^{-6} + 2 \cdot 4,8346 \cdot 10^{-6} + 3 \cdot 1,1638 \cdot 10^{-6}} = 0,5031,$$

получаем значение

$$\theta_k = \Omega(\tau + T / \mu) = 30^\circ(0,0075 + 0,0025 / 0,5031) = 0,3741^\circ,$$

совпадающее со значением, полученным в результате моделирования.

Выводы

1. Предложен метод синтеза последовательного ДКУ, обеспечивающего минимальное время полного затухания свободного процесса при наличии чистого запаздывания в прямой цепи ЦСС. Минимальное время переходного процесса ЦСС увеличивается на время чистого запаздывания, как и при использовании предиктора Смита.

2. Рекомендованные условия выбора ДКУ являются необходимыми и достаточными для исключения скрытых колебаний внутри интервалов дискретизации после затухания дискретного переходного процесса.

3. Чистое запаздывание в прямой цепи ЦСС вызывает увеличение скоростной ошибки, пропорциональное его времени и скорости слежения.

4. Цифровое моделирование ЦСС при обработке линейно возрастающего и скачкообразного воздействий подтверждает правильность полученных результатов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Теорема. Выбор числителя желаемой передаточной функции $W_{ЦСС}(z)$ разомкнутой ЦСС равным числителю дискретной передаточной функции ФНП и НЧ $W_{НЧ}(z)$ (4), т.е. равным $R_{n-1}(z)$, необходим и достаточен для исключения скрытых колебаний внутри интервалов дискретизации после окончания дискретного переходного процесса.

Достаточность. Действительно, при рекомендуемом выборе

$$D(z) = \frac{G_{m-1}(z)}{z^m - G_{m-1}(z)} / [z^{-l}W_{НЧ}(z)] = \frac{R_{n-1}(z)z^l}{z^m - R_{n-1}(z)} \cdot \frac{Q_n(z)}{R_{n-1}(z)} = \frac{Q_{n-1}(z)z^l}{S_{m-1}(z)}, \quad (П.1)$$

где $Q_{n-1}(z) = Q_n(z) / (z - 1) = (z - d_1)(z - d_2) \dots (z - d_{n-1}) = z^{n-1} + \alpha_{n-2}z^{n-2} + \dots + \alpha_1z + \alpha_0$,

$$S_{m-1}(z) = [z^m - R_{n-1}(z)] / (z - 1) = z^{m-1} + z^{m-2} + \dots + z^{n-1} + (1 - \beta_{n-1})z^{n-2} + (1 - \beta_{n-1} - \beta_{n-2})z^{n-2} + \dots + (1 - \beta_{n-1} - \beta_{n-2} - \dots - \beta_2)z + (1 - \beta_{n-1} - \beta_{n-2} - \dots - \beta_2 - \beta_1), \quad (П.2)$$

$$W_{ЦСС}(z, \varepsilon) = D(z)z^{-l}W_{НЧ}(z, \varepsilon) = \frac{Q_{n-1}(z)z^l}{S_{m-1}(z)} \cdot z^{-l} \cdot \frac{R_{n-1}(z, \varepsilon)}{Q_n(z)} = \frac{R_{n-1}(z, \varepsilon)}{z^m - R_{n-1}(z)}, \quad (П.3)$$

где ε — относительное смещение (локальное время) [13],

$$R_{n-1}(z, \varepsilon) = \beta_{n-1}(\varepsilon)z^{n-1} + \beta_{n-2}(\varepsilon)z^{n-2} + \dots + \beta_1(\varepsilon)z + \beta_0(\varepsilon).$$

Используя смещенное Z-преобразование [13], получаем передаточную функцию замкнутой ЦСС и ее переходную характеристику, описываемую смещенной решетчатой функцией $h[vT + \varepsilon T] = h(t)|_{t=vT+\varepsilon T}$, $v = 0, 1, 2 \dots$:

$$\begin{aligned} \Phi_{ЦСС}(z, \varepsilon) &= \frac{W_{ЦСС}(z, \varepsilon)}{1 + W_{ЦСС}(z)} = \frac{R_{n-1}(z, \varepsilon)}{z^m - R_{n-1}(z)} \Big/ \left[1 + \frac{R_{n-1}(z)}{z^m - R_{n-1}(z)} \right] = \frac{R_{n-1}(z, \varepsilon)}{z^m - R_{n-1}(z) + R_{n-1}(z)} = \\ &= \frac{R_{n-1}(z, \varepsilon)}{z^m} = \frac{R_{n-1}(z, \varepsilon)}{z^n} z^{-l} = \frac{\beta_{n-1}(\varepsilon)z^{n-1} + \beta_{n-2}(\varepsilon)z^{n-2} + \dots + \beta_1(\varepsilon)z + \beta_0(\varepsilon)}{z^n} z^{-l}, \end{aligned} \quad (П.4)$$

$$\begin{aligned} h[vT + \varepsilon T] &= Z^{-1} \{ [\beta_{n-1}(\varepsilon)z^{-l-1} + \beta_{n-2}(\varepsilon)z^{-l-2} + \dots + \beta_1(\varepsilon)z^{-m+1} + \beta_0(\varepsilon)z^{-m}] z / (z - 1) \} = \\ &= \beta_{n-1}(\varepsilon)I[(v - l - 1)T] + \beta_{n-2}(\varepsilon)I[(v - l - 2)T] + \dots + \beta_1(\varepsilon)I[(v - m + 1)T] + \beta_0(\varepsilon)I[(v - m)T], \end{aligned} \quad (П.5)$$

Из выражения (П.5) с учетом свойств единичной решетчатой функции

$$I[vT] = \begin{cases} 0, & v < 0 \\ 1, & v \geq 0 \end{cases}$$

очевидно, что

$$h[vT + \varepsilon T] = \beta_{n-1}(\varepsilon) + \beta_{n-2}(\varepsilon) + \dots + \beta_1(\varepsilon) + \beta_0(\varepsilon) = \text{const при } v \geq m, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1. \quad (П.6)$$

Таким образом, из формулы (П.6) следует, что $h(t)|_{t \geq mT} = \text{const}$ и вследствие астатизма ЦСС равно единице или представляет собой периодическую (незатухающую) функцию, что невозможно вследствие вещественных полюсов $W_{НЧ}(p)$.

Этим доказано отсутствие скрытых колебаний $\theta_{\text{ВЫХ}}(t)$ в промежутках между моментами дискретизации при рекомендованном выборе числителя передаточной функции $W_{\text{ЦСС}}(z)$ и, следовательно $\Phi_{\text{ЦСС}}(z)$.

Необходимость. При любом другом выборе числителя $\Phi_{\text{ЦСС}}(z)$: $G_{n-1}(z) \neq R_{n-1}(z)$ получаем:

$$D(z) = \frac{G_{n-1}(z)}{z^m - G_{n-1}(z)} \bigg/ \frac{W_{\text{НЧ}}(z)}{z^l} = \frac{G_{n-1}(z)z^l}{z^m - G_{n-1}(z)} \cdot \frac{Q_n(z)}{R_{n-1}(z)}, \quad W_{\text{ЦСС}}(z, \varepsilon) =$$

$$= D(z) \frac{W_{\text{НЧ}}(z, \varepsilon)}{z^l} = \frac{G_{n-1}(z)z^l}{z^m - G_{n-1}(z)} \cdot \frac{Q_n(z)}{R_{n-1}(z)} \cdot z^{-l} \cdot \frac{R_{n-1}(z, \varepsilon)}{Q_n(z)} = \frac{G_{n-1}(z)R_{n-1}(z, \varepsilon)}{(z^m - G_{n-1}(z))R_{n-1}(z)}, \quad (\text{П.7})$$

$$\Phi_{\text{ЦСС}}(z, \varepsilon) = \frac{W_{\text{ЦСС}}(z, \varepsilon)}{1 + W_{\text{ЦСС}}(z)} = \frac{G_{n-1}(z)R_{n-1}(z, \varepsilon)}{(z^m - G_{n-1}(z))R_{n-1}(z) + G_{n-1}(z)R_{n-1}(z)} = \frac{G_{n-1}(z)R_{n-1}(z, \varepsilon)}{z^m R_{n-1}(z)}.$$

Наличие у передаточной функции $\Phi_{\text{ЦСС}}(z, \varepsilon)$ (П.7) не равных нулю полюсов вызывает отличие $h(t)|_{t \geq mT}$ от единицы в промежутках между моментами дискретизации, хотя $h(vT)|_{v \geq m} = 1$, $v = m, m+1, m+2, \dots$. Это доказывает необходимость рекомендуемого выбора.

Использование предиктора Смита [11, 12]. Структурная схема рассматриваемой системы при использовании предиктора Смита представлена на рис. П.1.

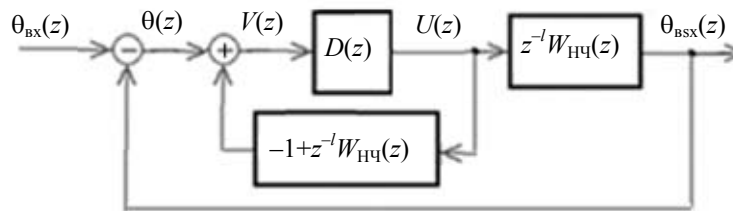


Рис. П.1

Согласно структурной схеме, с учетом $\theta_{\text{ВЫХ}}(z) = z^{-l}W_{\text{НЧ}}(z)U(z)$, получаем

$$V(z) = \theta_{\text{ВХ}}(z) + (-1 + z^{-l})W_{\text{НЧ}}(z)U(z) - z^{-l}W_{\text{НЧ}}(z)U(z) = \theta_{\text{ВХ}}(z) - W_{\text{НЧ}}(z)U(z).$$

И далее с учетом $U(z) = D(z)V(z)$ находим

$$\theta_{\text{ВЫХ}}(z) = z^{-l}W_{\text{НЧ}}(z)U(z) = z^{-l}W_{\text{НЧ}}(z)D(z)V(z) = z^{-l}W_{\text{НЧ}}(z)D(z)[\theta_{\text{ВХ}}(z) - W_{\text{НЧ}}(z)U(z)] =$$

$$= z^{-l}W_{\text{НЧ}}(z)D(z)[\theta_{\text{ВХ}}(z) - W_{\text{НЧ}}(z)\theta_{\text{ВЫХ}}(z) / z^{-l}W_{\text{НЧ}}(z)] = W_{\text{НЧ}}(z)D(z)[z^{-l}\theta_{\text{ВХ}}(z) - \theta_{\text{ВЫХ}}(z)].$$

Решив последнее уравнение относительно $\theta_{\text{ВЫХ}}(z)$, получим

$$\theta_{\text{ВЫХ}}(z) = \Phi_{\text{ЦСС}}(z)\theta_{\text{ВХ}}(z), \quad (\text{П.8})$$

где $\Phi_{\text{ЦСС}}(z) = \Phi'_{\text{ЦСС}}(z)z^{-l}$, $\Phi'_{\text{ЦСС}}(z) = \frac{W_{\text{НЧ}}(z)D(z)}{1 + W_{\text{НЧ}}(z)D(z)}$ — передаточная функция замкнутого

контура ЦСС с вынесенным из него запаздыванием. Для получения минимального конечного времени затухания свободного процесса в нем, согласно [7], передаточная функция должна иметь вид

$$\Phi'_{\text{ЦСС}}(z) = \frac{R_{n-1}(z)}{z^n}, \quad R_{n-1}(1) = \beta_{n-1} + \beta_{n-2} + \dots + \beta_1 z + \beta_0 = 1. \quad (\text{П.9})$$

Достигается это, если ДКУ имеет передаточную функцию

$$D(z) = \frac{\Phi'_{\text{ЦСС}}(z)}{(1 - \Phi'_{\text{ЦСС}}(z))W_{\text{НЧ}}(z)} = \frac{R_{n-1}(z)Q_n(z)}{(z^n - R_{n-1}(z))R_{n-1}(z)} = \frac{Q_{n-1}(z)}{S'_{n-1}(z)}, \quad (\text{П.10})$$

где

$$S'_{n-1}(z) = (z^n - R_{n-1}(z))/(z-1) = z^{n-1} + (1 - \beta_{n-1})z^{n-2} + (1 - \beta_{n-1} - \beta_{n-2})z^{n-3} - \dots - (1 - \beta_{n-1} - \beta_{n-2} - \dots - \beta_2)z - (1 - \beta_{n-1} - \beta_{n-2} - \dots - \beta_2 - \beta_1).$$

С учетом выражения (П.9) передаточная функция ЦСС при использовании предиктора Смита $\Phi_{\text{ЦСС}}(z)$ (П.8) совпадает с $\Phi'_{\text{ЦСС}}(z)$ (П.4), полученной предложенным методом.

Очевидная высокая сложность использования предиктора Смита при одинаковом результате частично компенсируется большей простотой передаточной функции дискретного фильтра $D(z)$ (ср. (П.10) и (П.1)).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Цыпкин Я. З. Теория линейных импульсных систем. М.: Физматгиз, 1963. 968 с.
2. Джури Э. Импульсные системы автоматического регулирования. М.: Физматгиз, 1963. 567 с.
3. Изерман Р. Цифровые системы управления. М.: Мир, 1984. 541 с.
4. Куо Б. Теория и проектирование цифровых систем управления. М.: Машиностроение, 1986. 447 с.
5. Анучин А. С. Системы управления электроприводов. М.: МЭИ, 2015. 372 с.
6. Коршунов А. И. Расчет цифровых систем управления электроприводами с конечным временем затухания свободных процессов // Электротехника. 2020. № 12. С. 50—54.
7. Коршунов А. И. Цифровая следящая система с конечным временем затухания свободного процесса // Изв. вузов. Приборостроение. 2019. Т. 62, № 12. С. 1078—1086.
8. Коновалов А. М., Коршунов А. И. Расчет цифровой следящей системы с конечным временем затухания свободного процесса. Ч. I. Минимальное время переходного процесса // Изв. вузов. Приборостроение. 2020. Т. 63, № 9. С. 786—793.
9. Коновалов А. М., Коршунов А. И. Расчет цифровой следящей системы с конечным временем затухания свободного процесса. Ч. II. Время переходного процесса, большее минимального // Изв. вузов. Приборостроение. 2020. Т. 63, № 9. С. 794—796.
10. Коновалов А. М., Коршунов А. И. Цифровая следящая система с конечным временем затухания свободного процесса и заданным порядком астатизма // Изв. вузов. Приборостроение. 2020. Т. 63, № 10. С. 888—802.
11. Смит О. Дж. М. Автоматическое регулирование. М.: Физматгиз, 1962. 575 с.
12. Острем Л., Виттенмарк К. Системы управления с ЭВМ. М.: Мир, 1987. 480 с.
13. Бесекерский В. А. Цифровые автоматические системы. М.: Физматгиз, 1978. 575 с.

Сведения об авторах

- Артем Михайлович Коновалов** — офицер военно-морского флота Российской Федерации
Анатолий Иванович Коршунов — д-р техн. наук, профессор; Военно-морской политехнический институт ВУНЦ ВМФ „Военно-морская академия им. Н. Г. Кузнецова“; кафедра радиоэлектроники; E-mail: a.i.korshunov@mail.ru

Поступила в редакцию 21.02.22; одобрена после рецензирования 02.06.22; принята к публикации 21.06.22.

REFERENCES

1. Tsympkin Ya.Z. *Teoriya lineynykh impul'snykh sistem* (Theory of Linear Impulse Systems), Moscow, 1963, 968 p. (in Russ.)
2. Jury E.J. *Sampled-data control systems*, NY, Wiley, London, Chapman and Hall, 1958.
3. Isermann R. *Digital Control Systems*, Berlin etc., 1981.
4. Kuo B.C. *Digital Control Systems*, NY, Chicago, San Francisco, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1980.
5. Anuchin A.S. *Sistemy upravleniya elektroprivodov* (Electric Drive Control Systems), Moscow, 2015, 373 p. (in Russ.)

6. Korshunov A.I. *Russian Electrical Engineering*, 2020, no. 12(91), pp. 767–771.
7. Korshunov A.I. *Journal of Instrument Engineering*, 2019, no. 12(62), pp. 1078–1086. (in Russ.)
8. Konovalov A.M., Korshunov A.I. *Journal of Instrument Engineering*, 2020, no. 9(63), pp. 786–793. (in Russ.)
9. Konovalov A.M., Korshunov A.I. *Journal of Instrument Engineering*, 2020, no. 9(63), pp. 794–796. (in Russ.)
10. Konovalov A.M., Korshunov A.I. *Journal of Instrument Engineering*, 2020, no. 10(63), pp. 888–802. (in Russ.)
11. Smith O.J.M. *Feedback control systems*, NY, McGraw-Hill Book Co., Inc., 1958, 694 p.
12. Åström K., Wittenmark B. *Computer-Controlled Systems: Theory and Design*, 1984.
13. Besekerskiy V.A. *Tsifrovyye avtomaticheskiye sistemy* (Digital Automatic Systems), Moscow, 1976, 576 p. (in Russ.)

Data on authors

- Artyom M. Konovalov** — Officer of the Russian Federation Navy
- Anatoly I. Korshunov** — Dr. Sci., Professor; Naval Polytechnic Institute of the Navy Military Educational and Scientific Center “Fleet Admiral N.G. Kuznetsov Naval Academy”;
Department of Radio Electronics; E-mail: a.i.korshunov@mail.ru

Received 21.02.22; approved after reviewing 02.06.22; accepted for publication 21.06.22.