УДК 519.21
DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-9-715-730

СТАЦИОНАРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОДНОКАНАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОЧЕРЕДЬЮ И УЧЕТОМ КОНТРОЛЯ КАЧЕСТВА ОБСЛУЖИВАНИЯ

А. И. Песчанский

Севастопольский государственный университет, Севастополь, Россия
peschansky_sntu@mail.ru

Аннотация. Исследуется система обслуживания $M/G/1/\infty$, в которой по завершении обслуживания каждой заявки проводится мгновенный контроль качества ее обслуживания. В случае неудовлетворительного качества заявка отправляется на повторные обслуживания, которые проводятся до тех пор, пока качество не будет признано удовлетворительным. Построен полумарковский процесс функционирования системы, найдено стационарное распределение вложенной цепи Маркова. Для производящих функций стационарных вероятностей получены аналоги формулы Поллачека — Хинчина. Определены стационарные характеристики системы, зависящие от вероятности качественного обслуживания: стационарное распределение очереди по времени, средние стационарные времена пребывания в состояниях, среднее число заявок в очереди и системе, среднее время пребывания заявки в очереди и системе.

Ключевые слова: *однолинейная система обслуживания, бесконечная очередь, контроль качества, повторное обслуживание, стационарные характеристики: финальные вероятности, времена пребывания в состояниях, среднее число заявок и время пребывания в очереди и системе*

Ссылка для цитирования: *Песчанский А. И.* Стационарные характеристики одноканальной системы с неограниченной очередью и учетом контроля качества обслуживания // Изв. вузов. Приборостроение. 2023. Т. 66, № 9. С. 715—730. DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-9-715-730.

STATIONARY CHARACTERISTICS OF AN UNLIMITED QUEUE SINGLE-CHANNEL SYSTEM WITH REGARD TO SERVICE QUALITY CONTROL

A. I. Peschansky

Sevastopol State University, Sevastopol, Russia
peschansky_sntu@mail.ru

Abstract. A service system $M/G/1/\infty$ is studied, in which, upon completion of servicing of each application, instant control of the quality of its service is carried out. In case of unsatisfactory quality, the application is sent for repeated services, which are carried out until the quality is considered satisfactory. A semi-Markov process of system functioning is constructed, and the stationary distribution of the embedded Markov chain is found. Analogues of the Pollaczek — Khinchin formula for generating functions of the stationary probabilities are obtained. The system stationary characteristics depending on the probability of quality service are determined: the stationary distribution of the queue over time, the average stationary duration of stay in a state, the average number of requests in the queue and system, the average duration of the request stay in the queue and system.

Keywords: single-server queuing system, infinite queue, quality control, re-service, stationary characteristics: final probabilities, sojourn times in states, average number of requests and sojourn time in queue and system

For citation: Peschansky A. I. Stationary characteristics of an unlimited queue single-channel system with regard to service quality control. *Journal of Instrument Engineering.* 2023. Vol. 66, N 9. P. 715—730 (in Russian). DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-9-715-730.

Введение. Методы и результаты теории массового обслуживания с успехом используются во многих технических, экономических и социальных областях. Подробное изложение результатов этой теории, в частности, относящейся к одноканальным системам обслуживания с неограниченной очередью, содержится, например, в [1—9]. Одним из требований, предъявляемых к таким системам, является высокое качество обслуживания заявок. В случае неудовлетворительного качества заявки могут быть отправлены на повторное обслуживание. Поэтому возникает необходимость учитывать влияние повторного обслуживания на стационарные показатели системы. В такой постановке система $GI/G/1/0$ изучена в [10—13]. В настоящей работе исследуется система с простейшим входящим потоком и накопителем неограниченной емкости.

Постановка задачи. Рассмотрим однолинейную систему обслуживания с бесконечной очередью $M/G/1/\infty$ в классификации Кендалла — Башарина [14]. Поступающий в систему поток заявок простейший, время β между поступлениями заявок имеет функцию распределения (ФР) $G(t)=1-e^{-\lambda t}$ и плотность распределения (ПР) $g(t)=\lambda e^{-\lambda t}$. Длительность обслуживания заявки прибором — случайная величина (СВ) α с ФР $F(t)=P\{\alpha\le t\}$ и ПР $f(t)$. Если прибор занят обслуживанием, то поступающие в систему заявки становятся в очередь, число мест для ожидания в которой неограниченно. Сразу же после окончания обслуживания каждой заявки мгновенно осуществляется контроль качества ее обслуживания. С вероятностью p обслуживание заявки признается успешным, и прибор приступает к обслуживанию заявки из очереди. В случае отсутствия заявок в очереди прибор переходит в режим ожидания. С вероятностью $q=1-p$ обслуживание заявки признается неудовлетворительным, и прибор немедленно приступает к повторному обслуживанию заявки. Время повторного обслуживания — СВ γ с ФР $\Phi(t)=P\{\gamma\le t\}$ и ПР $\varphi(t)$. После повторного обслуживания снова осуществляется контроль: с вероятностью p обслуживание признается успешным, а с вероятностью q заявка отправляется на повторное обслуживание. Процесс обслуживания заявки повторяется до тех пор, пока обслуживание не будет признано успешным. Таким образом, заявка находится на приборе в течение времени α, когда она обслуживается первый раз и, возможно, несколько раз обслуживается повторно с длительностью γ. Длительность времени пребывания заявки на приборе будем называть полным временем обслуживания. Предполагается, что СВ α и γ независимы, имеют конечные математические ожидания $M\alpha$, $M\gamma$ и дисперсии $D\alpha$, $D\gamma$ соответственно.

Цель настоящей статьи — обобщить математическую модель функционирования однокомпонентной системы обслуживания с бесконечной очередью на случай наличия в системе контроля качества обслуживания заявок и исследовать влияние контроля на стационарные характеристики системы.

Построение математической модели. Для построения модели функционирования рассматриваемой системы используем полумарковский процесс $S(t)$ с дискретно-непрерывным множеством состояний [7—9]. Для задания этого процесса введем фазовое пространство состояний E, вероятности и плотности вероятностей переходов из состояний, а также времена пребывания в состояниях. Начнем с описания пространства фазовых состояний системы. Под физическими состояниями системы будем понимать количество заявок в системе и характер их обслуживания:

0 — в системе отсутствуют заявки;

$1_1\,(1_2)$ — прибор начал обслуживать заявку, поступившую в свободную систему, первый раз (повторно);

$1_1/k\ \ (1_2/k)$ — прибор начал обслуживать заявку из очереди первый раз (повторно), в очереди осталось k заявок, $k \ge 0$.

К кодам физических состояний в момент постановки поступившей заявки в очередь добавим непрерывный компонент — оставшееся время до проведения ближайшего контроля качества обслуживания:

$1_1x/k\ \ (1_2x/k)$ — прибор занят первым (повторным) обслуживанием заявки, до проведения контроля качества обслуживания осталось время x, поступившая в систему заявка становится в очередь, в которой стало k заявок, $k \ge 1$.

Таким образом, фазовое пространство состояний системы имеет вид

$$E = \{\ 1_1;1_2;\ 1_1/k\ ,1_2/k,\ k \ge 0;\ 1_1x/k, 1_2x/k,\ k \ge 1\}.$$

Времена пребывания системы в состояниях определяются минимумом факторов, обусловливающих изменение физических состояний прибора:

$$\theta_0 = \beta\,,\ \theta_{1_1} = \theta_{1_1/k} = \beta \wedge \alpha,\ k \ge 0\,;\ \theta_{1_2} = \theta_{1_2/k} = \beta \wedge \gamma,\ k \ge 0\,;\ \theta_{1_1x/k} = \theta_{1_2x/k} = \beta \wedge x,\ k \ge 1\,,$$

где „$\wedge$“ — знак минимума.

Вероятности переходов вложенной цепи Маркова определяются реализацией минимума факторов, влияющих на изменение физических состояний прибора. Например, из состояния $1_1/k,\ k \ge 0$, в случае $\beta < \alpha$ система переходит в состояние $1_1x/k+1$ с плотностью вероятности перехода

$$p\{1_1/k \to 1_1x/k+1\} = \lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t+x)dt = \lambda e^{\lambda x}\int_x^\infty e^{-\lambda t} f(t)dt,\ x > 0\,.$$

Если $\beta > \alpha$, то система переходит в состояния $1_1/k-1$ или $1_2/k$ соответственно с вероятностями

$$P\{1_1/k \to 1_1/k-1\} = p\int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t)dt\,,\ P\{1_1/k \to 1_2/k\} = q\int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t)dt\,.$$

Из состояния $1_2x/k$ в случае $\beta > x$ система переходит в состояния $1_1/k-1$ или $1_2/k$ с вероятностями $P(1_2x/k \to 1_1/k-1) = p\overline{G}(x) = pe^{-\lambda x}$ и $P(1_2x/k \to 1_2/k) = $ $= q\overline{G}(x) = qe^{-\lambda x}$ соответственно. Если $\beta < x$, то система переходит в состояние $1_2y/k+1$ с плотностью вероятности перехода $p(1_2x/k \to 1_2y/k+1) = g(x-y) = \lambda e^{-\lambda x}e^{\lambda y},\ x > y$.

Стационарное распределение вложенной цепи Маркова. Обозначим ρ_{1_1}, ρ_{1_2}, $\rho_{1_1/k}$ и $\rho_{1_2/k}$ — стационарные вероятности соответственно состояний 1_1, 1_2, $1_1/k$ и $1_2/k$, $k \ge 0$; $\rho(1_1x/k)$, $\rho(1_2x/k)$ — стационарные плотности соответственно состояний $1_1x/k$ и $1_2x/k$, $k \ge 1$. Для рассматриваемой модели стационарное распределение вложенной цепи Маркова определяется из системы уравнений

$$\rho(1_1x/1) = (\rho_{1_1} + \rho_{1_1/0})\lambda e^{\lambda x} r_f(x)\,;\ \rho(1_2x/1) = (\rho_{1_2} + \rho_{1_2/0})\lambda e^{\lambda x} r_\varphi(x)\,; \tag{1}$$

$$\rho(1_1x/k) = \lambda e^{\lambda x}\int_x^\infty e^{-\lambda t}\rho(1_1t/k-1)dt + \rho_{1_1/k-1}\lambda e^{\lambda x} r_f(x),\quad k \ge 2\,; \tag{2}$$

$$\rho(1_2 x/k) = \lambda e^{\lambda x}\int_x^\infty e^{-\lambda t}\rho(1_2 t/k-1)dt + \rho_{1_2/k-1}\lambda e^{\lambda x} r_\varphi(x),\ k \ge 2; \quad (3)$$

$$\rho_{1_1} = \rho_0;\ \rho_{1_2} = q\rho_{1_1}\tilde f(\lambda) + q\rho_{1_2}\tilde\varphi(\lambda);\ \rho_0 = p(\rho_{1_1} + \rho_{1_1/0})\tilde f(\lambda) + p(\rho_{1_2} + \rho_{1_2/0})\tilde\varphi(\lambda); \quad (4)$$

$$\rho_{1_1/k} = p\int_0^\infty e^{-\lambda x}\left[\rho(1_1 x/k+1) + \rho(1_2 x/k+1)\right]dx + p\rho_{1_1/k+1}\tilde f(\lambda) + p\rho_{1_2/k+1}\tilde\varphi(\lambda),\ k \ge 0; \quad (5)$$

$$\rho_{1_2/0} = q\rho_{1_1/0}\tilde f(\lambda) + q\rho_{1_2/0}\tilde\varphi(\lambda); \quad (6)$$

$$\rho_{1_2/k} = q\int_0^\infty e^{-\lambda x}\left[\rho(1_1 x/k) + \rho(1_2 x/k)\right]dx + q\rho_{1_1/k}\tilde f(\lambda) + q\rho_{1_2/k}\tilde\varphi(\lambda),\ k \ge 1. \quad (7)$$

Здесь $\tilde f(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t)dt$, $\tilde\varphi(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\varphi(t)dt$ — преобразования Лапласа соответствующих функций; $r_f(x) = \int_x^\infty e^{-\lambda t} f(t)dt$, $r_\varphi(x) = \int_x^\infty e^{-\lambda t}\varphi(t)dt$.

Условие нормировки определяется следующим выражением:

$$\rho_0 + \rho_{1_1} + \rho_{1_2} + \sum_{j=0}^\infty [\rho_{1_1/j} + \rho_{1_2/j}] + \sum_{k=1}^\infty \int_0^\infty \left[\rho(1_1 x/k) + \rho(1_2 x/k)\right]dx = 1. \quad (8)$$

Решение системы (1)—(7) находится по рекуррентным формулам с точностью до произвольной постоянной ρ_0:

$$\rho_{1_1} = \rho_0,\ \rho_{1_1/0} = \frac{\rho_0}{p\tilde f(\lambda)}[pF_0 + q\Phi_0]; \quad (9)$$

$$\rho_{1_1/k} = \frac{1}{p\tilde f(\lambda)}\left[\rho_{1_1}(pF_k + q\Phi_k) + \sum_{i=0}^{k-1}\rho_{1_1/i}(pF_{k-i} + q\Phi_{k-1-i})\right],\ k \ge 1; \quad (10)$$

$$\rho_{1_2} = \rho_0\frac{q\tilde f(\lambda)}{p + q\Phi_0},\ \rho_{1_2/0} = \rho_0\frac{q}{p}\frac{pF_0 + q\Phi_0}{p + q\Phi_0},\ \rho_{1_2/k} = \frac{q}{p}\rho_{1_1/k-1},\ k \ge 1, \quad (11)$$

где $F_i(\Phi_i)$ — вероятность того, что за время первого (повторного) обслуживания заявки в систему поступит более чем i новых заявок:

$$F_i = \lambda\int_0^\infty \frac{(\lambda t)^i}{i!}e^{-\lambda t}\overline F(t)dt,\ \overline F(t) = 1 - F(t);\ \Phi_i = \lambda\int_0^\infty \frac{(\lambda t)^i}{i!}e^{-\lambda t}\overline\Phi(t)dt,\ \overline\Phi(t) = 1 - \Phi(t),\ i \ge 0.$$

Перейдем к определению производящих функций стационарных вероятностей и плотностей, которые вводятся с помощью формул

$$\rho_{1_1}(s) = \rho_{1_1} + \sum_{j=0}^\infty s^{j+1}\rho_{1_1/j},\ \rho_{1_2}(s) = \rho_{1_2} + \sum_{j=0}^\infty s^{j+1}\rho_{1_2/j}; \quad (12)$$

$$\rho_{1_1}(s,x) = \sum_{k=1}^\infty s^{k+1}\rho(1_1 x/k),\ \rho_{1_2}(s,x) = \sum_{k=1}^\infty s^{k+1}\rho(1_2 x/k). \quad (13)$$

Сначала из (1)—(7) для функций (12) и (13) получим систему уравнений

$$\rho_{1_1}(s,x) = \lambda s e^{\lambda x}\int_x^\infty e^{-\lambda t}\rho_{1_1}(s,t)dt + \lambda e^{\lambda x} r_f(x) s\left[\rho_{1_1}(s) + (s-1)\rho_0\right]; \quad (14)$$

$$\rho_{1_2}(s,x)=\lambda s e^{\lambda x}\int\limits_x^\infty e^{-\lambda t}\rho_{1_2}(s,t)dt+\lambda e^{\lambda x}r_\varphi(x)s\Big[\rho_{1_2}(s)+(s-1)\rho_{1_2}\Big]; \tag{15}$$

$$\rho_{1_1}(s)\Big[p\tilde f(\lambda)-s\Big]+\rho_{1_2}(s)p\tilde\varphi(\lambda)+p\int\limits_0^\infty e^{-\lambda x}\Big[\rho_{1_1}(s,x)+\rho_{1_2}(s,x)\Big]dx=$$
$$=p\tilde f(\lambda)\Big[\rho_{1_1}+\rho_{1_1/0}s\Big]+p\tilde\varphi(\lambda)\Big[\rho_{1_2}+\rho_{1_2/0}s\Big]-\rho_0 s, \tag{16}$$

$$\rho_{1_1}(s)q\,\tilde f(\lambda)+\rho_{1_2}(s)\big[q\,\tilde\varphi(\lambda)-1\big]+q\int\limits_0^\infty e^{-\lambda x}\Big[\rho_{1_1}(s,x)+\rho_{1_2}(s,x)\Big]dx=0. \tag{17}$$

Методом последовательных приближений из уравнений (14) и (15) выразим функции (13) через (12):

$$\rho_{1_1}(s,x)=\lambda s[\rho_{1_1}(s)+(s-1)\rho_0]\int\limits_x^\infty f(y)e^{\lambda(1-s)(x-y)}dy, \tag{18}$$

$$\rho_{1_2}(s,x)=\lambda s[\rho_{1_2}(s)+(s-1)\rho_{1_2}]\int\limits_x^\infty \varphi(y)e^{\lambda(1-s)(x-y)}dy. \tag{19}$$

Подставим (18) и (19) в уравнения (16) и (17). После преобразований, учитывая, что $\rho_{1_2}=\dfrac{\rho_0 q\tilde f(\lambda)}{1-q\tilde\varphi(\lambda)}$, получаем систему уравнений относительно $\rho_{1_1}(s)$ и $\rho_{1_2}(s)$:

$$\Big[p\tilde f[(1-s)\lambda]-s\Big]\;\rho_{1_1}(s)+p\tilde\varphi[(1-s)\lambda]\rho_{1_2}(s)=$$
$$=\rho_0 p\frac{1-s}{1-q\tilde\varphi(\lambda)}\Big\{\tilde f[(1-s)\lambda][1-q\tilde\varphi(\lambda)]+q\tilde f(\lambda)\tilde\varphi[(1-s)\lambda]\Big\},$$
$$q\,\tilde f[(1-s)\lambda]\rho_{1_1}(s)+\big[q\tilde\varphi[(1-s)\lambda]-1\big]\;\rho_{1_2}(s)=$$
$$=\rho_0 q\frac{1-s}{1-q\tilde\varphi(\lambda)}\Big\{\tilde f[(1-s)\lambda][1-q\tilde\varphi(\lambda)]+q\tilde f(\lambda)\tilde\varphi[(1-s)\lambda]-\tilde f(\lambda)\Big\}.$$

Решения этой системы определяются выражениями

$$\rho_{1_1}(s)=\rho_0 p\frac{(1-s)\tilde f[(1-s)\lambda]}{p\tilde f[(1-s)\lambda]+qs\tilde\varphi[(1-s)\lambda]-s}, \tag{20}$$

$$\rho_{1_2}(s)=\rho_0 q\left[\frac{(1-s)\tilde f(\lambda)}{1-q\tilde\varphi(\lambda)}+\frac{s(1-s)\tilde f[(1-s)\lambda]}{p\tilde f[(1-s)\lambda]+qs\tilde\varphi[(1-s)\lambda]-s}\right], \tag{21}$$

которые являются аналогами формулы Поллачека — Хинчина (см., например, [1]).

В результате вычисления с помощью правила Лопиталя пределов производящих функций (20) и (21) при $s\to 1$ получаем

$$\rho_{1_1}(1)=\rho_{1_1}+\sum_{j=0}^\infty\rho_{1_1/j}=\frac{\rho_0}{1-(\rho+q\delta/p)},\;\;\rho_{1_2}(1)=\rho_{1_2}+\sum_{j=0}^\infty\rho_{1_2/j}=\frac{q}{p}\frac{\rho_0}{1-(\rho+q\delta/p)}, \tag{22}$$

где $\rho=\lambda M\alpha$, $\delta=\lambda M\gamma$.

Отсюда следует, что необходимым условием существования стационарного распределения вложенной цепи Маркова является условие $\rho+q\delta/p<1$. Можно показать, что это условие является и достаточным (доказательство аналогично случаю $q=0$ (см., например, [2])).

Заметим, что из (21) и (20) следует соотношение

$$\rho_{1_2}(s)=\rho_0 q\frac{(1-s)\tilde f(\lambda)}{1-q\tilde\varphi(\lambda)}+\frac{q}{p}s\rho_{1_1}(s).$$

Далее, подставляя (20) и (21) в (18) и (19), находим выражения

$$\rho_{1_1}(s,x)=\rho_0\frac{\lambda s^2(1-s)[1-q\tilde\varphi[(1-s)\lambda]]}{p\tilde f[(1-s)\lambda]+qs\tilde\varphi[(1-s)\lambda]-s}\int_0^\infty f(t+x)e^{-\lambda(1-s)t}dt,$$

$$\rho_{1_2}(s,x)=\rho_0 q\frac{\lambda s^2(1-s)\tilde f[(1-s)\lambda]}{p\tilde f[(1-s)\lambda]+qs\tilde\varphi[(1-s)\lambda]-s}\int_0^\infty \varphi(t+x)e^{-\lambda(1-s)t}dt.$$

Проинтегрировав по переменной x последние равенства, найдем производящие функции $\rho^*_{1_1}(s)$ и $\rho^*_{1_2}(s)$ стационарных мер пребывания на полупрямых $1_1x/k$ и $1_2x/k$:

$$\rho^*_{1_1}(s)\equiv\int_0^\infty\rho_{1_1}(s,x)dx=\sum_{k=1}^\infty s^{k+1}\int_0^\infty\rho(1_1x/k)dx\equiv$$

$$\equiv\sum_{k=1}^\infty s^{k+1}\rho^*_{1_1/k}=\rho_0\frac{s^2\left[1-q\tilde\varphi[(1-s)\lambda]\right][1-\tilde f[(1-s)\lambda]\right]}{p\tilde f[(1-s)\lambda]+qs\tilde\varphi[(1-s)\lambda]-s},\qquad(23)$$

$$\rho^*_{1_2}(s)\equiv\int_0^\infty\rho_{1_2}(s,x)dx=\sum_{k=1}^\infty s^{k+1}\int_0^\infty\rho(1_2x/k)dx\equiv$$

$$\equiv\sum_{k=1}^\infty s^{k+1}\rho^*_{1_2/k}=\rho_0 q\frac{s^2\tilde f[(1-s)\lambda][1-\tilde\varphi[(1-s)\lambda]]}{p\tilde f[(1-s)\lambda]+qs\tilde\varphi[(1-s)\lambda]-s}.\qquad(24)$$

В частности, стационарная мера пребывания на всех полупрямых $1_1x/k$ и $1_2x/k$

$$\rho^*_{1_1}(1)=\sum_{k=1}^\infty\int_0^\infty\rho(1_1x/k)dx=\frac{\rho_0\rho}{1-(\rho+q\delta/p)},\quad \rho^*_{1_2}(1)=\sum_{k=1}^\infty\int_0^\infty\rho(1_2x/k)dx=\frac{q}{p}\frac{\rho_0\delta}{1-(\rho+q\delta/p)},$$

$$\rho^*_{1_1}(1)+\rho^*_{1_2}(1)=\sum_{k=1}^\infty\int_0^\infty[\rho(1_1x/k)+\rho(1_2x/k)]dx=\frac{\rho_0(\rho+q\delta/p)}{1-(\rho+q\delta/p)}.\qquad(25)$$

Из условия нормировки (8) с помощью формул (22), (25) находим

$$\rho_0=\frac{p(1-\rho)-q\delta}{p+1},\ \rho_{1_1}(1)=\frac{p}{p+1},\ \rho_{1_2}(1)=\frac{q}{p+1},\ \rho^*_{1_1}(1)=\frac{p\rho}{p+1},\ \rho^*_{1_2}(1)=\frac{q\delta}{p+1}.$$

Из (23) и (24) легко следует

$$\rho^*_{1_1}(s)+\rho^*_{1_2}(s)=s[\rho_{1_1}(s)-\rho_0],$$

откуда

$$\rho^*_{1_1/k}+\rho^*_{1_2/k}\equiv\int_0^\infty[\rho(1_1x/k)+\rho(1_2x/k)]dx=\rho_{1_1/k-1},\ k\ge1.\qquad(26)$$

Стационарное распределение очереди по времени. Чтобы найти финальные вероятности физических состояний системы, разобьем фазовое пространство состояний на непересекающиеся подмножества $E=\bigcup_{k=0}^\infty E_k$, где индекс k указывает на количество заявок в системе:

$$E_0=\{0\};\ E_1=\{1_1,1_2,1_1/0,1_2/0\};\ E_k=\{1_1/k-1,1_2/k-1,1_1x/k-1,1_2x/k-1,\},\ k\ge2.$$

Финальные вероятности пребывания системы в указанных подмножествах состояний найдем с помощью предельных соотношений [7—9]

$$\pi_k = \lim_{t\to\infty} P\left\{S(t)\in E_k \ / S(0)=x\right\} = \int_{E_k} m(x)\rho(dx)\left[\int_E m(x)\rho(dx)\right]^{-1},\ k\ge 0\ , \tag{27}$$

где $m(x)$ — среднее время пребывания системы в состоянии $x\in E$, $\rho(\cdot)$ — стационарное распределение вложенной цепи Маркова.

Не составляет труда определить средние времена пребывания рассматриваемой системы в состояниях:

$$M\,\theta_{1_1} = M\,\theta_{1_1/k} = \int_0^\infty \overline{F}(x)e^{-\lambda x}dx = \frac{1-\tilde f(\lambda)}{\lambda},\ k\ge 0;\ M\,\theta_{1_2} = M\,\theta_{1_2/k} = \int_0^\infty \overline{\Phi}(x)e^{-\lambda x}dx = \frac{1-\tilde\varphi(\lambda)}{\lambda},\ k\ge 0;$$

$$M\,\theta_{1_1 x/k} = M\,\theta_{1_2 x/k} = \int_0^x \overline{G}(x)dx = \frac{1}{\lambda}G(x),\ \ k\ge 1;\ M\,\theta_0 = \frac{1}{\lambda}.$$

Прежде чем находить выражения для функционалов из (27), проинтегрируем обе части уравнений (1)—(3) по переменной x в пределах от 0 до ∞ и запишем их в следующем виде:

$$\rho^*_{1_1/1} = (\rho_{1_1}+\rho_{1_1/0})[1-\tilde f(\lambda)],\ \rho^*_{1_2/1} = (\rho_{1_2}+\rho_{1_2/0})[1-\tilde\varphi(\lambda)]; \tag{28}$$

$$\rho^*_{1_1/k} = \int_0^\infty G(x)\rho(1_1 x/k-1)dx + \rho_{1_1/k-1}[1-\tilde f(\lambda)],\ \ k\ge 2; \tag{29}$$

$$\rho^*_{1_2/k} = \int_0^\infty G(x)\rho(1_2 x/k-1)dx + \rho_{1_2/k-1}[1-\tilde\varphi(\lambda)],\ \ k\ge 2. \tag{30}$$

Используя выражения для средних времен и учитывая соотношения (28)—(30), (26) и (22), получаем

$$\int_{E_0} m(x)\rho(dx) = \frac{\rho_0}{\lambda};$$

$$\int_{E_1} m(x)\rho(dx) = \frac{1}{\lambda}\Big[(\rho_{1_1}+\rho_{1_1/0})[1-\tilde f(\lambda)] + (\rho_{1_2}+\rho_{1_2/0})[1-\tilde\varphi(\lambda)]\Big] = \frac{1}{\lambda}(\rho^*_{1_1/1}+\rho^*_{1_2/1}) = \frac{1}{\lambda}\rho_{1_1/0};$$

$$\int_{E_k} m(x)\rho(dx) = \frac{1}{\lambda}\Big[\rho_{1_1/k-1}\,[1-\tilde f(\lambda)] + \rho_{1_2/k-1}\,[1-\tilde\varphi(\lambda)]\Big] +$$

$$+\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty G(x)[\rho(1_1 x/k-1)+\rho(1_2 x/k-1)]dx = \frac{1}{\lambda}(\rho^*_{1_1/k}+\rho^*_{1_2/k}) = \frac{1}{\lambda}\rho_{1_1/k-1},\ k\ge 2;$$

$$\int_E m(x)\rho(dx) = \frac{\rho_0}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^\infty \rho_{1_1/k-1} = \frac{1}{\lambda}\left(\rho_{1_1} + \sum_{k=0}^\infty \rho_{1_1/k}\right) = \frac{1}{\lambda}\rho_{1_1}(1) = \frac{1}{\lambda}\frac{\rho_0}{1-(\rho+q\delta/p)}.$$

Таким образом, с учетом полученных выражений финальные вероятности состояний определяются как

$$\pi_0 = 1-(\rho+q\delta/p);\ \pi_k = \frac{\pi_0}{\rho_0}\rho_{1_1/k-1},\ \ k\ge 1, \tag{31}$$

где стационарные вероятности $\rho_{1_1/k-1}$ вычисляются по формулам (9), (10).

Если в системе качество обслуживания заявок не контролируется ($q=0$), то выражения (31) совпадают с известными формулами (см., например, [2]).

Теперь определим финальные вероятности пребывания в системе k заявок с учетом того, что заявка обслуживается на приборе первый раз или повторно. Для этого каждое из подмножеств состояний E_k, $k \ge 1$, разобьем на два непересекающихся подмножества: $E_k = E_k^{1_1} \cup E_k^{1_2}$, где

$$E_1^{1_1} = \{ 1_1, 1_1/0 \},\ E_1^{1_2} = \{ 1_2, 1_2/0 \},\ E_k^{1_1} = \{ 1_1/k-1,\ 1_1x/k-1 \},$$
$$E_k^{1_2} = \{ 1_2/k-1, 1_2x/k-1 \},\ k \ge 2.$$

Аналогично выводу (31) получаем

$$\pi_1^{1_1} = \frac{\pi_0}{\rho_0}(\rho_{1_1} + \rho_{1_1/0})(1 - \tilde{f}(\lambda)),\ \pi_k^{1_1} = \frac{\pi_0}{\rho_0}\left[\rho_{1_1} F_{k-1} + \sum_{i=0}^{k-1} \rho_{1_1/i} F_{k-1-i}\right],\ k \ge 2;$$
$$\pi_1^{1_2} = \frac{q}{p}\frac{\pi_0}{\rho_0}\rho_{1_1}(1 - \tilde{\varphi}(\lambda)),\ \pi_k^{1_2} = \frac{q}{p}\frac{\pi_0}{\rho_0}\left[\rho_{1_1}\Phi_{k-1} + \sum_{i=0}^{k-2}\rho_{1_1/i} F_{k-2-i}\right],\ k \ge 2. \tag{32}$$

Средние стационарные времена пребывания системы в состояниях. Средние стационарные времена $T(E_k)$ пребывания системы в состояниях E_k найдем с помощью соотношений [7—9]

$$T(E_k) = \int_{E_k} m(x)\rho(dx)\left[\int_{E \setminus E_k} \rho(dx) P(x, E_k)\right]^{-1},\quad k \ge 0, \tag{33}$$

где $P(x, E_k)$ — вероятности переходов из состояния x в подмножество состояний E_k.

В результате преобразований интегралов из (33) с учетом вероятностей переходов системы из одних состояний в другие и соотношений (4), (5), (28)—(30) и (26) получаем

$$\int_{E \setminus E_0} \rho(dx) P(x, E_0) = \int_{E_0} \rho(dx) P(x, E \setminus E_0) = \rho_0;$$

$$\int_{E \setminus E_1} \rho(dx) P(x, E_1) = \int_{E_1} \rho(dx) P(x, E \setminus E_1) = p\left[(\rho_{1_1} + \rho_{1_1/0})P(\beta > \alpha) + (\rho_{1_2} + \rho_{1_2/0})P(\beta > \gamma)\right] +$$
$$+ (\rho_{1_1} + \rho_{1_1/0})P(\beta < \alpha) + (\rho_{1_2} + \rho_{1_2/0})P(\beta < \gamma) = \rho_0 + \overset{*}{\rho}_{1_1/1} + \overset{*}{\rho}_{1_2/1} = \rho_{1_1} + \rho_{1_1/0};$$

$$\int_{E \setminus E_k} \rho(dx) P(x, E_k) = \int_{E_k} \rho(dx) P(x, E \setminus E_k) =$$
$$= p\left\{\int_0^\infty e^{-\lambda x}\left[\rho_{1_1/k-1} f(x) + \rho_{1_2/k-1}\varphi(x)\right]dx + \int_0^\infty e^{-\lambda x}[\rho(1_1x/k-1) + \rho(1_2x/k-1)]dx\right\} +$$
$$+ \rho_{1_1/k-1} P(\alpha > \beta) + \rho_{1_2/k-1} P(\gamma > \beta) + \int_0^\infty G(x)[\rho(1_1x/k-1) + \rho(1_2x/k-1)]dx =$$
$$= \rho_{1_1/k-2} + \overset{*}{\rho}_{1_1/k} + \overset{*}{\rho}_{1_2/k} = \rho_{1_1/k-2} + \rho_{1_1/k-1},\ k \ge 2.$$

Следовательно,

$$T(E_0) = 1/\lambda;\ T(E_1) = \frac{\rho_{1_1/0}}{\lambda(\rho_{1_1} + \rho_{1_1/0})} = \frac{1 - p\tilde{f}(\lambda) - q\tilde{\varphi}(\lambda)}{\lambda(1 - q\tilde{\varphi}(\lambda))};\ T(E_k) = \frac{\rho_{1_1/k-1}}{\lambda(\rho_{1_1/k-2} + \rho_{1_1/k-1})},\ k \ge 2. \tag{34}$$

Найдем стационарные вероятности состояний: прибор обслуживает заявку первый раз, прибор обслуживает заявку повторно. Для этого представим фазовое пространство в виде объединения трех непересекающихся подпространств: $E = E_0 \cup E_{1_1} \cup E_{1_2}$, где $E_0 = \{0\}$ —

прибор свободен; $E_{1_1}=\{1_1;\, 1_1/k,\ k\ge 0;\, 1_1x/k,\ k\ge 1\}$ — прибор обслуживает заявку первый раз; $E_{1_2}=\{1_2;\, 1_2/k,\ k\ge 0;\, 1_2x/k,\ k\ge 1\}$ — прибор обслуживает заявку повторно.

Финальные вероятности π_{1_1} и π_{1_2} пребывания системы соответственно в подмножествах состояний E_{1_1} и E_{1_2} определяются с помощью (27). Учитывая вид стационарного распределения вложенной цепи Маркова, средние времена пребывания системы в состояниях, соотношения (28), (29) и (25), получаем

$$\int\limits_{E_{1_1}} m(x)\rho(dx)=\left(\rho_{1_1}+\sum_{j=0}^{\infty}\rho_{1_1/j}\right)\int\limits_0^{\infty}\overline{G}(x)\overline{F}(x)dx+\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_0^{\infty}\rho(1_1x/k)\int\limits_0^{x}\overline{G}(x)dx=$$

$$=\frac{1}{\lambda}\left\{(\rho_{1_1}+\rho_{1_1/0})[1-\tilde f(\lambda)]+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\int\limits_0^{\infty}G(x)\rho(1_1x/k)dx+\rho_{1_1/k}[1-\tilde f(\lambda)]\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\rho^*_{1_1/k}=\frac{1}{\lambda}\rho^*_{1_1}(1)=\frac{1}{\lambda}\frac{\rho_0\rho}{1-(\rho+q\delta/p)}=\frac{1}{\lambda}\frac{p\rho}{p+1}=\frac{p}{p+1}M\alpha .$$

С помощью аналогичных рассуждений $\int\limits_{E_{1_1}} m(x)\rho(dx)=\frac{q}{p+1}M\gamma$. Следовательно,

$$\pi_0=1-(\rho+q\delta/p),\ \pi_{1_1}=\rho,\ \pi_{1_2}=q\delta/p .$$

С помощью (33) найдем средние стационарные времена пребывания системы в подмножествах состояний E_{1_1} и E_{1_2}. Для этого вычислим значение интеграла

$$\int\limits_{E\setminus E_{1_1}}\rho(dx)P(x,E_{1_1})=\int\limits_{E_{1_1}}\rho(dx)P(x,E_0)+\int\limits_{E_{1_1}}\rho(dx)P(x,E_{1_2})=$$

$$=(\rho_{1_1}+\rho_{1_1/0})\,p\tilde f(\lambda)+(\rho_{1_1}+\rho_{1_1/0})\,q\tilde f(\lambda)+q\sum_{k=1}^{\infty}\left[\int\limits_0^{\infty}\overline{G}(x)\rho(1_1x/k)dx+\rho_{1_1/k}\tilde f(\lambda)\right].$$

В результате почленного сложения равенств (28)—(30) и несложных преобразований получим

$$(\rho_{1_1}+\rho_{1_1/0})\,\tilde f(\lambda)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\int\limits_0^{\infty}\overline{G}(x)\rho(1_1x/k)dx+\rho_{1_1/k}\tilde f(\lambda)\right]=\rho_{1_1}(1).$$

Следовательно,

$$\int\limits_{E\setminus E_{1_1}}\rho(dx)P(x,E_{1_1})=(\rho_{1_1}+\rho_{1_1/0})\,p\,\tilde f(\lambda)+q\rho_{1_1}(1)=\rho_0\left[1-q\tilde\varphi(\lambda)\right]+\frac{q\rho_0}{1-(\rho+q\delta/p)}=$$

$$=\frac{p}{p+1}\left[q+\pi_0\left[1-q\tilde\varphi(\lambda)\right]\right].$$

Аналогично

$$\int\limits_{E\setminus E_{1_2}}\rho(dx)P(x,E_{1_2})=\int\limits_{E_{1_1}}\rho(dx)P(x,E_{1_2})=\frac{q\rho_0}{\pi_0}.$$

Таким образом,

$$T(E_{1_1})=\frac{M\alpha}{q+\pi_0\left[1-q\tilde\varphi(\lambda)\right]},\ T(E_{1_2})=\frac{1}{p}M\gamma . \tag{35}$$

Средняя длительность периода занятости прибора. Описывающий функционирование системы обслуживания полумарковский процесс $S(t)$ является регенерирующим. Каждый цикл регенерации состоит из периода занятости и свободного периода. В качестве точек регенерации выберем моменты попадания системы в состояние 1_1. Тогда фазовое пространство состояний системы разбивается на два подмножества: $E = E_+ \cup E_0$, где $E_0 = \{0\}$, $E_+ = E \setminus E_0$. Среднее стационарное время $T(E_+)$ пребывания системы в состояниях подмножества E_+, которое соответствует занятости прибора, найдем с помощью (33). Учитывая, что

$$\int_{E_+} m(x)\rho(dx) = \int_E m(x)\rho(dx) - \int_{E_0} m(x)\rho(dx) = \frac{\rho_0}{\lambda}\frac{1-\pi_0}{\pi_0}, \quad \int_{E\setminus E_+} \rho(dx)P(x, E_+) = \rho_0,$$

получаем

$$T(E_+) = \frac{1-\pi_0}{\lambda\pi_0}.$$

Среднее число заявок в системе и очереди в стационарном режиме. Среднее число $\overline{N}_\text{с}$ заявок в системе в стационарном режиме

$$\overline{N}_\text{с} = \sum_{k=1}^{\infty} k\pi_k = \frac{\pi_0}{\rho_0}\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\rho_{1_1/j} = \frac{\pi_0}{\rho_0}\rho'_{1_1}(1),$$

где

$$\rho'_{1_1}(1) = \lim_{s\to 1}\rho'_{1_1}(s) = \rho_0 p \lim_{s\to 1}\frac{d}{ds}\left(\frac{(1-s)\tilde{f}[(1-s)\lambda]}{p\tilde{f}[(1-s)\lambda] + qs\tilde{\varphi}[(1-s)\lambda] - s}\right).$$

В результате вычисления предела с помощью правила Лопиталя находим

$$\rho'_{1_1}(1) = \frac{\rho_0}{\pi_0^2}\left[\frac{\lambda^2}{2}\left(\alpha^{(2)} + \frac{q}{p}\gamma^{(2)}\right) + (1-\rho)(1-\pi_0)\right],$$

где $\alpha^{(2)} = \tilde{f}''(0) = \int_0^{\infty} t^2 f(t)dt$, $\gamma^{(2)} = \tilde{\varphi}''(0) = \int_0^{\infty} t^2 \varphi(t)dt$ — центральные моменты второго порядка времен обслуживания заявок первый раз и повторно соответственно.

Таким образом, окончательно получаем

$$\overline{N}_\text{с} = \frac{1}{\pi_0}\left[\frac{\lambda^2}{2}\left(\alpha^{(2)} + \frac{q}{p}\gamma^{(2)}\right) + (1-\rho)(1-\pi_0)\right]. \quad (36)$$

Теперь определим среднее число $\overline{N}_\text{оч}$ заявок в очереди в стационарном режиме:

$$\overline{N}_\text{оч} = \sum_{k=2}^{\infty}(k-1)\pi_k = \frac{\pi_0}{\rho_0}\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\rho_{1_1/j} - \frac{\pi_0}{\rho_0}\sum_{j=0}^{\infty}\rho_{1_1/j} = \overline{N}_\text{с} - \frac{\pi_0}{\rho_0}\left[\rho_{1_1}(1) - \rho_0\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi_0}\left[\frac{\lambda^2}{2}\left(\alpha^{(2)} + \frac{q}{p}\gamma^{(2)}\right) + \frac{q}{p}\delta(1-\pi_0)\right]. \quad (37)$$

Среднее стационарное время пребывания в очереди. В момент принятия заявки в очередь время ожидания начала ее обслуживания складывается из полного времени ζ дообслуживания заявки, находящейся в этот момент на приборе (с учетом возможных ее повторных обслуживаний), и времен обслуживания уже находящихся в очереди заявок. Среднее полное время дообслуживания ζ найдем по формуле полного математического ожидания

$M\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k M\,\zeta_k$, где $M\,\zeta_k$ — математическое ожидание полного времени дообслуживания заявки на приборе с момента, когда поступившая в систему заявка заняла k-е место в очереди.

Сначала найдем средние полные времена $\zeta_{1_1 x/k}$ и $\zeta_{1_2 x/k}$ дообслуживания заявки на приборе в моменты попадания системы в состояния $1_1 x/k$ и $1_2 x/k$ соответственно. Эти времена складываются из времени x до ближайшего момента проведения контроля качества обслуживания и суммы случайного числа ξ повторных обслуживаний: $\zeta_{1_1 x/k} = \zeta_{1_2 x/k} = x + \sum_{i=0}^{\xi} \gamma_i$. Поскольку $P(\xi = n) = q^n p,\ n \ge 0$, $M\xi = \dfrac{q}{p}$ и $M\gamma_n = M\gamma$, то на основании тождества Вальда [15] находим $M\zeta_{1_1 x/k} = M\zeta_{1_2 x/k} = x + \dfrac{q}{p} M\gamma$. Математические ожидания $M\zeta_{1_1 x/k}$ и $M\zeta_{1_2 x/k}$ зависят от начальных состояний $1_1 x/k$ и $1_2 x/k$, содержащих непрерывный компонент x. Для того чтобы найти среднее значение $M\,\zeta_k$, не зависящее от x, проведем операцию усреднения. Для этого представим фазовое пространство состояний процесса в виде объединения двух непересекающихся подмножеств:

$$E = E_{\ge k}^{+} \cup E_{\ge k}^{-},\ E_{\ge k}^{+} = \left\{\, 1_1 x/j, 1_2 x/j, 1_2/j,\ \ j \ge k \right\},\ E_{\ge k}^{-} = E \setminus E_{\ge k}^{+},\ k \ge 1 .$$

Заметим, что полное время $\zeta_{1_1 x/k}$ ($\zeta_{1_2 x/k}$) дообслуживания заявки на приборе есть время с момента попадания системы в состояние $1_1 x/k$ ($1_2 x/k$) до момента первого выхода из подмножества $E_{\ge k}^{+}$.

Операцию усреднения проведем по формуле [16]

$$M\zeta_k = \frac{\int\limits_{E_{\ge k}^{-}} \rho(dy) \int\limits_{E_{\ge k}^{+}} M\zeta_x P(y, dx)}{\int\limits_{E_{\ge k}^{-}} \rho(dx) P(x, E_{\ge k}^{+})}, \qquad (38)$$

где $M\zeta_x$ — среднее время пребывания системы в состоянии $E_{\ge k}^{+}$ с начальным состоянием x.

Сначала найдем значения интегралов в знаменателе дроби (38) (учитывая (28)—(30) и (26)):

$$\int\limits_{E_{\ge 1}^{-}} \rho(dx) P(x, E_{\ge 1}^{+}) = (\rho_{1_1} + \rho_{1_1/0}) P(\alpha > \beta) + (\rho_{1_2} + \rho_{1_2/0}) P(\gamma > \beta) =$$

$$= (\rho_{1_1} + \rho_{1_1/0})[1 - \tilde{f}(\lambda)] + (\rho_{1_2} + \rho_{1_2/0})[1 - \tilde{\varphi}(\lambda)] = \rho^{*}_{1_1/1} + \rho^{*}_{1_2/1} = \rho_{1_1/0},$$

$$\int\limits_{E_{\ge k}^{-}} \rho(dx) P(x, E_{\ge k}^{+}) = \rho_{1_1/k-1}[1 - \tilde{f}(\lambda)] + \rho_{1_2/k-1}[1 - \tilde{\varphi}(\lambda)] +$$

$$+ \int\limits_{0}^{\infty} \big[\rho(1_1 x/k-1) + \rho(1_2 x/k-1)\big] G(x) dx = \rho^{*}_{1_1/k} + \rho^{*}_{1_2/k} = \rho_{1_1/k-1},\ k \ge 2 .$$

Принимая во внимание (31), получаем

$$M\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k M\,\zeta_k = \frac{\pi_0}{\rho_0} \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_{\ge k}^{-}} \rho(dy) \int\limits_{E_{\ge k}^{+}} M\,\zeta_x P(y, dx) =$$

$$=\frac{\pi_0}{\rho_0}\left(\rho_{1_1}+\sum_{j=0}^{\infty}\rho_{1_1/j}\right)\int_0^{\infty}\left(x+\frac{q}{p}M\gamma\right)dx\int_0^{\infty}g(t)f(t+x)dt+$$

$$+\frac{\pi_0}{\rho_0}\left(\rho_{1_2}+\sum_{j=0}^{\infty}\rho_{1_2/j}\right)\int_0^{\infty}\left(x+\frac{q}{p}M\gamma\right)dx\int_0^{\infty}g(t)\varphi(t+x)dt+$$

$$+\frac{\pi_0}{\rho_0}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\left[\rho(1_1y/k)+\rho(1_2y/k)\right]dy\int_0^{y}g(y-x)\left(x+\frac{q}{p}M\gamma\right)dx\,.$$

Поскольку

$$\int_0^{y}xg(y-x)dx=y-\int_0^{y}\overline{G}(t)dt=y-\frac{1}{\lambda}G(y)\,;$$

$$\int_0^{\infty}xdx\int_0^{\infty}g(t)f(t+x)dt=M\alpha-\frac{1-\tilde{f}(\lambda)}{\lambda};\ \int_0^{\infty}xdx\int_0^{\infty}g(t)\varphi(t+x)dt=M\gamma-\frac{1-\tilde{\varphi}(\lambda)}{\lambda};$$

$$\rho_{1_1}(1)\left[1-\tilde{f}(\lambda)\right]+\rho_{1_2}(1)\left[1-\tilde{\varphi}(\lambda)\right]+\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\infty}G(y)\left[\rho(1_1y/k)+\rho(1_2y/k)\right]dy=\rho_{1_1}(1)-\rho_0=\rho_0\frac{1-\pi_0}{\pi_0}\,,$$

то

$$\frac{\rho_0}{\pi_0}M\zeta=\rho_{1_1}(1)\left[M\alpha-\frac{1-\tilde{f}(\lambda)}{\lambda}\right]+\rho_{1_2}(1)\left[M\gamma-\frac{1-\tilde{\varphi}(\lambda)}{\lambda}\right]+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\infty}y\left[\rho(1_1y/k)+\rho(1_2y/k)\right]dy-\frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\infty}G(y)\left[\rho(1_1y/k)+\rho(1_2y/k)\right]dy+$$

$$+\frac{q}{p}M\gamma\left[\rho_{1_1}(1)\left[1-\tilde{f}(\lambda)\right]+\rho_{1_2}(1)\left[1-\tilde{\varphi}(\lambda)\right]+\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\infty}G(y)\left[\rho(1_1y/k)+\rho(1_2y/k)\right]dy\right]=$$

$$=\rho_{1_1}(1)M\alpha+\rho_{1_2}(1)M\gamma-\frac{1}{\lambda}[\rho_{1_1}(1)-\rho_0]+\frac{q}{p}M\gamma[\rho_{1_1}(1)-\rho_0]+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\infty}y\left[\rho(1_1y/k)+\rho(1_2y/k)\right]dy=\frac{q}{p}\rho_0\frac{1-\pi_0}{\pi_0}M\gamma+\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\infty}y\left[\rho(1_1y/k)+\rho(1_2y/k)\right]dy\,.$$

Осталось найти сумму ряда в правой части последнего равенства. Для этого проинтегрируем функции в обеих частях равенств (13), (18) и (19) в пределах от x до ∞:

$$\int_x^{\infty}\rho_{1_1}(s,t)dt=\sum_{k=1}^{\infty}s^{k+1}\int_x^{\infty}\rho(1_1t/k)dt=\lambda s[(s-1)\rho_0+\rho_{1_1}(s)]\int_0^{\infty}\overline{F}(t+x)e^{-\lambda(1-s)t}dt\,,$$

$$\int_x^{\infty}\rho_{1_2}(s,t)dt=\sum_{k=1}^{\infty}s^{k+1}\int_x^{\infty}\rho(1_2t/k)dt=\lambda s[(s-1)\rho_{1_2}+\rho_{1_2}(s)]\int_0^{\infty}\overline{\Phi}(t+x)e^{-\lambda(1-s)t}dt\,.$$

Проинтегрировав еще раз обе части последних равенств по переменной x в пределах от 0 до ∞, получим

$$\overline{\rho}_{1_1}^{*}(s)\equiv\int_0^{\infty}dx\int_x^{\infty}\rho_{1_1}(s,t)dt=\sum_{k=1}^{\infty}s^{k+1}\int_0^{\infty}dx\int_x^{\infty}\rho(1_1t/k)dt=\sum_{k=1}^{\infty}s^{k+1}\int_0^{\infty}x\rho(1_1x/k)dx=$$

$$=\frac{s}{\lambda(1-s)^2}[(s-1)\rho_0+\rho_{1_1}(s)]\{\lambda M\alpha(1-s)-[1-\tilde{f}[(1-s)\lambda]]\}\,,$$

$$\bar{\rho}^{*}_{1_2}(s) \equiv \int\limits_0^\infty dx \int\limits_x^\infty \rho_{1_2}(s,t)dt = \sum_{k=1}^\infty s^{k+1} \int\limits_0^\infty dx \int\limits_x^\infty \rho(1_2 t/k)dt = \sum_{k=1}^\infty s^{k+1} \int\limits_0^\infty x\rho(1_2 x/k)dx =$$

$$= \frac{s}{\lambda(1-s)^2}[(s-1)\rho_{1_2} + \rho_{1_2}(s)]\{\lambda M\gamma(1-s) - [1-\tilde{\varphi}[(1-s)\lambda]]\}.$$

Вычисление пределов функций $\bar{\rho}^{*}_{1_1}(s)$ и $\bar{\rho}^{*}_{1_2}(s)$ при $s \to 1$ с помощью правила Лопиталя приводит к соотношениям

$$\bar{\rho}^{*}_{1_1}(1) \equiv \sum_{k=1}^\infty \int\limits_0^\infty x\rho(1_1 x/k)dx = \frac{\rho_0\lambda\alpha^{(2)}}{2\pi_0},\ \bar{\rho}^{*}_{1_2}(1) \equiv \sum_{k=1}^\infty \int\limits_0^\infty x\rho(1_2 x/k)dx = \frac{q}{p}\frac{\rho_0\lambda\gamma^{(2)}}{2\pi_0},$$

$$\sum_{k=1}^\infty \int\limits_0^\infty x[\rho(1_1 x/k) + \rho(1_2 x/k)]dx = \frac{\lambda\rho_0}{2\pi_0}\left(\alpha^{(2)} + \frac{q}{p}\gamma^{(2)}\right).$$

Следовательно, среднее полное время дообслуживания заявки на приборе

$$M\zeta = \frac{\lambda}{2}\left(\alpha^{(2)} + \frac{q}{p}\gamma^{(2)}\right) + \frac{q}{p}(1-\pi_0)M\gamma. \qquad (39)$$

Время пребывания в заявки очереди складывается из полного времени дообслуживания заявки на приборе и полного времени обслуживания всех стоящих перед ней в очереди заявок. Поэтому

$$\bar{T}_{\text{оч}} = M\zeta + \left(M\alpha + \frac{q}{p}M\gamma\right)\sum_{k=2}^\infty (k-1)\pi_k = M\zeta + \left(M\alpha + \frac{q}{p}M\gamma\right)\bar{N}_{\text{оч}} =$$

$$= \frac{\lambda}{2}\left(\alpha^{(2)} + \frac{q}{p}\gamma^{(2)}\right) + \frac{q}{p}(1-\pi_0)M\gamma + \frac{1-\pi_0}{\lambda\pi_0}\left[\frac{\lambda^2}{2}\left(\alpha^{(2)} + \frac{q}{p}\gamma^{(2)}\right) + \frac{q}{p}\delta(1-\pi_0)\right].$$

Таким образом,

$$\bar{T}_{\text{оч}} = \frac{1}{\pi_0}\left[\frac{\lambda}{2}\left(\alpha^{(2)} + \frac{q}{p}\gamma^{(2)}\right) + \frac{q}{p}(1-\pi_0)M\gamma\right]. \qquad (40)$$

Очевидно, что среднее время пребывания заявки в системе

$$\bar{T}_{\text{с}} = M\zeta + \left(M\alpha + \frac{q}{p}M\gamma\right)\left(\pi_0 + \sum_{k=1}^\infty k\pi_k\right) = \bar{T}_{\text{оч}} + \left(M\alpha + \frac{q}{p}M\gamma\right)\sum_{k=0}^\infty \pi_k.$$

Окончательно получаем

$$\bar{T}_{\text{с}} = \frac{\lambda}{2\pi_0}\left(\alpha^{(2)} + \frac{q}{p}\gamma^{(2)}\right) + \frac{(1-\pi_0)(1-\rho)}{\lambda\pi_0}. \qquad (41)$$

Заметим, что при наличии в системе процедуры контроля качества обслуживания средние стационарные времена пребывания заявки в очереди и системе могут быть найдены по формуле Литтла (см., например, [1]), так же как и в случае отсутствия контроля.

Полученные выражения для определения стационарных характеристик системы являются функциями аргумента p. Это позволяет оценить зависимость показателей системы от вероятности p качественного обслуживания заявки. Например, эластичность $L(p) = \frac{p}{\bar{T}_{\text{с}}(p)}\frac{d}{dp}\left(\bar{T}_{\text{с}}(p)\right)$ времени пребывания заявки в системе в зависимости от p позволяет оценить в процентах изменение времени пребывания заявки в системе при изменении вероятности качественного обслуживания заявки на 1 %.

Графики зависимостей среднего стационарного времени $\overline{T}_c(p)$ пребывания заявки в очереди и эластичности $L(p)$ этой функции от вероятности p успешного обслуживания представлены на рис. 1 и 2 соответственно.

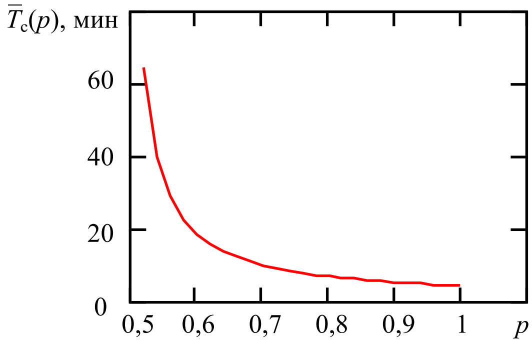

Рис. 1

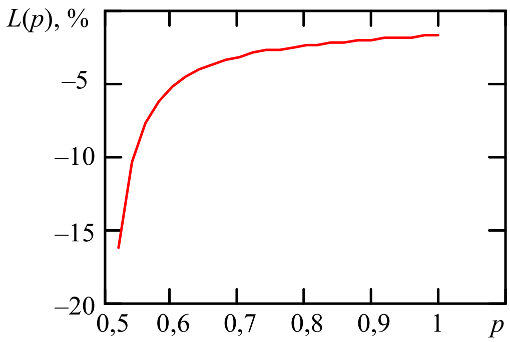

Рис. 2

Пример. В систему обслуживания поступает простейший поток заявок с интенсивностью $\lambda = 0,2$ мин$^{-1}$. Время первого и повторного обслуживания заявок распределено по закону Вейбулла — Гнеденко с функциями распределения $F(t) = 1 - \exp\left(-(t/3)^2\right)$ и $\Phi(t) = 1 - \exp\left(-(t/2,5)^3\right)$ соответственно. Среднее время первого обслуживания заявок $M\alpha = 2,659$ мин, среднее время повторного обслуживания — $M\gamma = 2,232$ мин. Стационарные характеристики системы, вычисленные по формулам (31), (32), (34)—(37), (39)—(41), приведены в табл. 1—3.

Таблица 1

p	$\rho + q\delta/p$	π_0	π_1	π_2	π_3	π_4	$T(E_1)$, мин	$T(E_2)$, мин	$T(E_3)$, мин	$T(E_4)$, мин
1	0,532	0,468	0,300	0,138	0,057	0,022	1,953	1,577	1,455	1,412
0,9	0,581	0,419	0,295	0,153	0,072	0,033	2,068	1,710	1,602	1,568
0,8	0,653	0,357	0,280	0,167	0,092	0,049	2,199	1,865	1,773	1,746
0,5	0,978	0,022	0,027	0,027	0,026	0,026	2,746	2,514	2,472	2,465

Таблица 2

p	$\pi_1^{1_1}$	$\pi_1^{1_2}$	$\pi_2^{1_1}$	$\pi_2^{1_2}$	$\pi_3^{1_1}$	$\pi_3^{1_2}$	$\pi_4^{1_1}$	$\pi_4^{1_2}$
0,9	0,279	0,016	0,138	0,015	0,063	0,009	0,028	0,050
0,8	0,249	0,031	0,135	0,032	0,071	0,021	0,037	0,012
0,5	0,019	0,08	0,016	0,011	0,014	0,012	0,014	0,012

Таблица 3

p	$T(E_{1_1})$, мин	$T(E_{1_2})$, мин	$T(E_+)$, мин	$\overline{N}_c$	$\overline{N}_{оч}$	$M\zeta$, мин	$\overline{T}_c$, мин	$\overline{T}_{оч}$, мин	$L(p)$,%
1	5,648	2,232	5,678	0,916	0,384	0,900	4,581	1,922	—
0,9	5,409	2,480	6,943	1,110	0,529	1,107	5,551	2,644	–1,955
0,8	5,209	2,791	9,020	1,429	0,785	1,400	7,143	3,926	–2,355
0,5	5,165	4,465	224,631	34,486	33,508	3,648	172,432	167,541	–41,86

Приведенные в таблицах расчетные данные позволяют оценить изменения значений стационарных характеристик системы в зависимости от вероятности p качественного обслуживания заявок. Например, из значений эластичности $L(p)$ времени $\overline{T}_c(p)$ пребывания заявки в системе, вычисленных в при $p = 0,9$ и $p = 0,5$ (см. табл. 3), следует, что увеличение вероятности успешного обслуживания заявок на 1 % в первом случае приведет к уменьшению среднего времени пребывания заявки в системе на 1,955 %, а во втором случае — на 41,86 %.

Заключение. Построен полумарковский процесс функционирования одноканальной системы обслуживания с простейшим входящим потоком и бесконечной очередью, в которой в случае неудовлетворительного качества обслуживания заявок проводятся их повторные обслуживания. Получены расчетные формулы для вычисления стационарных характеристик системы, позволяющие оценить влияние вероятности качественного обслуживания заявок на показатели системы. Приведенные результаты могут быть использованы для более корректного описания процесса функционирования современных технических и информационных систем, таких как производственные конвейеры, телекоммуникационные и ресурсоснабжающие сети, базы данных, управляющие контроллеры и др.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н.* Введение в теорию массового обслуживания. М.: Наука, 1987. 336 с.
2. *Бочаров П. П., Печинкин А. В.* Теория массового обслуживания. М.: Изд-во РУДН, 1995. 529 с.
3. *Климов Г. П.* Стохастические системы обслуживания. М.: Наука, 1966. 244 с.
4. *Коваленко И. Н.* Теория массового обслуживания // Итоги науки. Сер. Теор. вероятн. Мат. стат. Теор. кибернет. 1970, ВИНИТИ, М., 1971. С. 5—109.
5. *Бутко Т. К.* Процесс марковского восстановления системы $G/M/1/\infty$ // Применение аналитических методов в теории вероятностей: Сб. науч. тр. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1983. С. 17—27.
6. *Chen Y., Whitt W.* Algorithms for the upper bound mean waiting time in the GI/GI/1 queue // Queueing Systems. 2020. Vol. 94. P. 327—356. DOI: 10.1007/s11134-020-09649-9.
7. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем. Киев: Наук. думка, 1982. 236 с.
8. *Королюк В. С.* Стохастические модели систем. Киев: Наук. думка, 1989. 208 с.
9. *Корлат А. Н., Кузнецов В. Н., Новиков М. И., Турбин А. Ф.* Полумарковские модели восстанавливаемых систем и систем массового обслуживания. Кишинев: Штиинца, 1991. 276 с.
10. *Песчанский А. И., Коваленко А. И.* Стационарные характеристики однолинейной системы с потерями и контролем качества обслуживания // Системные технологии: Межвуз. сб. науч. тр. Днепропетровск, 2011. Вып. 4(75). С.129—139.
11. *Песчанский А. И.* Полумарковская модель однолинейной системы обслуживания с потерями и диагностикой качества обслуживания в момент поступления следующей заявки // Вестн. СевГТУ: Автоматизация процессов и управление: Сб. науч. тр. 2012. Вып. 125. С. 55—62.
12. *Peschansky A. I.* Stationary Characteristics of the Single-Server Queue System with Losses and Immediate Service Quality Control // Appl. Mathematics. 2011. Vol. 2, N 4. P. 403—409. DOI: 10.4236/am.2011.24049.
13. *Песчанский А. И.* Полумарковская модель однолинейной системы с потерями и мгновенным контролем качества обслуживания // Вестн. СевНТУ: Сер. Информатика, электроника, связь: Сб. науч. тр. 2011. Вып.114. С. 47—52.
14. *Kendall D.* Stochastic Processes Occurring in the Theory of Queues and their Analysis by the Method of the Imbedded Markov Chain // Ann. Math. Statistics. 1953. Vol. 24, N 3. P. 338—354.
15. *Beichelt F., Franken P.* Zuverlässigkeit und Instanphaltung, Mathematische Methoden. Berlin: VEB Verlag Technik, 1983. 392 p.
16. *Райншке К., Ушаков И. А.* Оценка надежности систем с использованием графов. М.: Радио и связь, 1988. 208 с.

Сведения об авторе

Алексей Иванович Песчанский — д-р техн. наук, профессор; Севастопольский государственный университет, кафедра высшей математики;
E-mail: peschansky_sntu@mail.ru

Поступила в редакцию 15.05.2023; одобрена после рецензирования 14.06.2023; принята к публикации 31.07.2023.

REFERENCES

1. Gnedenko B.V., Kovalenko I.N. *Vvedeniye v teoriyu massovogo obsluzhivaniya* (Introduction to Queuing Theory), Moscow, 1987, 336 p. (in Russ.)
2. Bocharov P.P., Pechinkin A.V. *Teoriya massovogo obsluzhivaniya* (Queuing Theory), Moscow, 1995, 529 p. (in Russ.)
3. Klimov G.P. *Stokhasticheskiye sistemy obsluzhivaniya* (Stochastic Queuing Systems), Moscow, 1966, 244 p. (in Russ.)
4. Kovalenko I.N. *Teoriya massovogo obsluzhivaniya. Itogi nauki. Seriya Teoriya veroyatnostey. Matematicheskaya statistika. Teoreticheskaya kibernetika* (Theory of Queuing. The Results of Science. Series Theory of Probability. Math statistics. Theoretical cybernetics), Moscow, 1971, pp. 5–109. (in Russ.)
5. Butko T.K. *Primeneniye analiticheskikh metodov v teorii veroyatnostey* (Application of Analytical Methods in Probability Theory), Kyiv, 1983, pp. 17–27. (in Russ.)
6. Chen Y., Whitt W. *Queueing Systems*, 2020, vol. 94, pp. 327–356, DOI: 10.1007/s11134-020-09649-9.
7. Korolyuk V.S., Turbin A.F. *Protsessy markovskogo vosstanovleniya v zadachakh nadezhnosti sistem* (Markov Reconstruction Processes in System Reliability Problems), Kyiv, 1982, 236 p. (in Russ.)
8. Korolyuk V.S. *Stokhasticheskiye modeli sistem* (Stochastic Systems Models), Kyiv, 1989, 208 p. (in Russ.)
9. Korlat A.N., Kuznetsov V.N., Novikov M.I., Turbin A.F. *Polumarkovskiye modeli vosstanavlivayemykh sistem i sistem massovogo obsluzhivaniya* (Semi-Markovian Models of Recoverable Systems and Queuing Systems), Kishinev, 1991, 276 p. (in Russ.)
10. Peschansky A.I., Kovalenko A.I. *Sistemnyye tekhnologii* (System Technologies), Dnepropetrovsk, 2011, no. 4(75), pp. 129–139. (in Russ.)
11. Peschansky A.I. *Vestnik Sevastopol'skogo Gosudarstvennogo Tekhnologicheskogo Universiteta: Avtomatizatsiya protsessov i upravleniye* (Bulletin of the Sevastopol State Technological University: Process Automation and Control), 2012, no. 125, pp. 55–62. (in Russ.)
12. Peschansky A.I. *Applied Mathematics*, 2011, no. 4(2), pp. 403–409, DOI: 10.4236/am.2011.24049.
13. Peschansky A.I. *Vestnik Sevastopol'skogo Natsional'nogo Tekhnicheskogo Universiteta: seriya Informatika, elektronika, svyaz'* (Bulletin of the Sevastopol National Technical University. Series Informatics, Electronics, Communications), 2011, no. 114, pp. 47–52. (in Russ.)
14. Kendall D. *Ann. Math. Statistics,* 1953, no. 3(24), pp. 338–354.
15. Beichelt F., Franken P. *Zuverlässigkeit und Instanphaltung, Mathematische Methoden*, Berlin, VEB Verlag Technik, 1983, 392 p.
16. Raynshke K., Ushakov I.A. *Otsenka nadezhnosti sistem s ispol'zovaniyem grafov* (System Reliability Assessment Using Graphs), Moscow, 1988, 208 p. (in Russ.)

Data on author

Alexey I. Peschansky — Dr. Sci., Professor; Sevastopol State University, Department of Higher Mathematics; E-mail: peschansky_sntu@mail.ru

Received 15.05.2023; approved after reviewing 14.06.2023; accepted for publication 31.07.2023.