УДК 681.5
DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-10-834-844

АЛГОРИТМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ КВАДРОКОПТЕРА В РЕЖИМЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОЗИЦИОНИРОВАНИЯ

С. А. Ким*, А. А. Пыркин, О. И. Борисов

Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия,
**skim@itmo.ru*

Аннотация. Получена полная модель движения квадрокоптера для задачи динамического позиционирования в точке. На основе этой модели предложены два алгоритма управления. Первый обобщает ранее полученные результаты на случай изменяющегося угла рыскания. Второй алгоритм управления решает поставленную задачу на основе упрощенной методики настройки регулятора.

Ключевые слова: *робастное управление, управление движением квадрокоптера, динамическое позиционирование, согласованное управление, геометрический подход*

Благодарности: работа поддержана грантом Президента Российской Федерации № МД-3574.2022.4 и Министерством науки и высшего образования РФ (паспорт госзадания № 2019-0898).

Ссылка для цитирования: *Ким С. А., Пыркин А. А., Борисов О. И.* Алгоритмы управления движением квадрокоптера в режиме динамического позиционирования // Изв. вузов. Приборостроение. 2023. Т. 66, № 10. С. 834—844. DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-10-834-844.

ALGORITHMS FOR CONTROLLING A QUADCOPTER MOVEMENT IN DYNAMIC POSITIONING MODE

S. A. Kim*, A. A. Pyrkin, O. I. Borisov

ITMO University, St. Petersburg, Russia
**skim@itmo.ru*

Abstract. A complete model of quadcopter motion is obtained for the problem of dynamic positioning at a point, on the basis of which two control algorithms are proposed. The first generalizes the previously obtained results to the case of a changing yaw angle. The second control algorithm solves the problem on the base of a simplified technique for tuning the controller.

Keywords: robust control, quadrotor motion control, dynamic positioning, coordinated control, geometric approach

Acknowledgment: The work was supported by a grant from the President of the Russian Federation No. MD-3574.2022.4 and the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (state assignment passport No. 2019-0898).

For citation: Kim S. A., Pyrkin A. A., Borisov O. I. Algorithms for controlling a quadcopter movement in dynamic positioning mode. *Journal of Instrument Engineering.* 2023. Vol. 66, N 10. P. 834—844 (in Russian). DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-10-834-844.

Введение. Ввиду нелинейной динамики, многосвязной структуры и наличия неопределенностей задача управления движением квадрокоптера является сложной и поэтому сохраняет актуальность. Классическим подходом является линеаризация модели с целью упрощения синтеза регулятора, однако такой подход является довольно грубым и вследствие модельных неточностей не всегда обеспечивает удовлетворительное качество переходных процессов. Известны решения, в которых рассматривается нелинейная модель движения, например [1, 2], однако и такие работы не лишены недостатков. В них используется неполная модель движения, которая не учитывает динамику угла рыскания. Кроме того, предложенные алгоритмы управления предполагают неочевидную методику настройки, при которой значения параметров регулятора должны быть выбраны из соблюдения условий, связанных с доказательством утверждений.

В настоящей работе учтены выявленные недостатки, в результате чего получена полная модель движения квадрокоптера для задачи динамического позиционирования в точке, на основе которой предложены два алгоритма управления: 1) обобщающий результат [1] на случай изменяющегося угла рыскания; 2) динамический алгоритм управления с упрощенной методикой настройки регулятора.

Модель движения квадрокоптера в нестационарной нормальной форме. Модель движения в пространстве имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} a_x & 0 & 0 \\ 0 & a_y & 0 \\ 0 & 0 & a_z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} + \frac{1}{m}\begin{bmatrix} \cos\phi\sin\theta\cos\psi + \sin\phi\sin\psi \\ \sin\phi\sin\theta\cos\psi - \cos\phi\sin\psi \\ \cos\theta\cos\psi \end{bmatrix}\left(\sum_{i=1}^{4} F_i\right) - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{\psi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} a_\psi & 0 & 0 \\ 0 & a_\theta & 0 \\ 0 & 0 & a_\phi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\ell}{J_\psi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\ell}{J_\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{C}{J_\phi} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix},$$

где x, y, z — декартовы координаты центра масс; ϕ, θ, ψ — углы рысканья, тангажа и крена; $g = 9{,}81$ м/с^2 — ускорение свободного падения; m — масса; F_i, $i = 1$—4 — подъемные силы роторов; ℓ — расстояние между центром тяжести и роторами; J_ψ, J_θ, J_ϕ — моменты инерции; C — коэффициент пропорциональности; параметры a с соответствующими индексами в каждом динамическом канале означают коэффициенты вязкого трения. Поскольку силы F_i достаточно малы в нормальном режиме работы квадрокоптера, характеризуемом низкими скоростями движения, далее будем пренебрегать этим компонентом уравнения динамики. Заметим, что наличие в рассмотрении дополнительного компонента только сделает запись выражений более громоздкой, не влияя при этом на основной результат.

Введем в рассмотрение вспомогательные переменные

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{C}{J_\phi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\ell}{J_\psi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\ell}{J_\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

и перепишем полную динамическую модель движения робота в пространстве в более компактном виде

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}, \tag{1}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi \sin\theta \cos\psi + \sin\phi \sin\psi \\ \sin\phi \sin\theta \cos\psi - \cos\phi \sin\psi \\ \cos\theta \cos\psi \end{bmatrix} (u_1 + g) - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix}, \tag{2}$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{\psi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \\ u_2 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Рассмотрим следующее утверждение.

Утверждение 1. Модель (1)—(3) может быть представлена в виде каскада систем в нормальной форме с нестационарными матричными коэффициентами в цепочке интеграторов

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2,$$

$$\dot{\xi}_2 = q_1(\xi) + b_1(\xi) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

$$\dot{\xi}_3 = \xi_4,$$

$$\dot{\xi}_4 = \beta(t) \xi_5,$$

$$\dot{\xi}_5 = \xi_6,$$

$$\dot{\xi}_6 = q_2(\xi) + b_{21}(\xi) u_2 + b_{22}(\xi) \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix},$$

где $\xi = \mathrm{col}(\xi_1, .., \xi_6)$ — вектор переменных состояния в новом базисе, переменные матрицы соответствующих размерностей q_1, b_1, q_2, b_{21}, b_{22}; $\beta(t)$ — положительный коэффициент, удовлетворяющий условию

$$0 < \beta_{\min} \le \beta(t) \le \beta_{\max}. \tag{4}$$

Запишем модель движения квадрокоптера в отклонениях от заданного положения ориентации и представим решение задачи стабилизации квадрокоптера в заданной точке пространства при отсутствии внешних возмущений. Регулируемыми переменными в этом случае будут линейные координаты в пространстве и угол рысканья:

$$Y = \mathrm{col}(z, \phi, x, y) = \mathrm{col}(\xi_1, \xi_3).$$

Заданное положение квадрокоптера в пространстве описывается вектором постоянных значений

$$Y^* = \mathrm{col}\left(z^*, \phi^*, x^*, y^*\right)$$

(„звездочкой“ обозначено заданное значение соответствующей переменной), а также нулевые значения крена и тангажа:

$$\psi^* = 0 \text{ и } \theta^* = 0 .$$

Введем в рассмотрение вектор ошибок стабилизации:

$$\tilde{\xi}_1 = \begin{bmatrix} \tilde{\xi}_{11} \\ \tilde{\xi}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z - z^* \\ \phi - \phi^* \end{bmatrix} = \xi_1 - \begin{bmatrix} z^* \\ \phi^* \end{bmatrix}, \quad \tilde{\xi}_2 = \xi_2 ,$$

$$\tilde{\xi}_3 = \begin{bmatrix} \tilde{\xi}_{31} \\ \tilde{\xi}_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - x^* \\ y - y^* \end{bmatrix} = \xi_3 - \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix}, \quad \tilde{\xi}_4 = \xi_4 ,$$

$$\tilde{\xi}_5 = \xi_5 , \quad \tilde{\xi}_6 = \xi_6$$

и, пользуясь утверждением 1, найдем динамическую модель движения квадрокоптера в отклонениях от заданного положения и ориентации:

$$\dot{\tilde{\xi}}_1 = \tilde{\xi}_2 ,$$

$$\dot{\tilde{\xi}}_2 = q_1\left(\psi, \theta\right) + b_1\left(\psi, \theta\right) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \tag{5}$$

$$\dot{\tilde{\xi}}_3 = \tilde{\xi}_4 ,$$

$$\dot{\tilde{\xi}}_4 = \beta\left(t\right) \tilde{\xi}_5 , \tag{6}$$

$$\dot{\tilde{\xi}}_5 = \tilde{\xi}_6 ,$$

$$\dot{\tilde{\xi}}_6 = q_2\left(\phi, \psi, \theta, \dot{\phi}, \dot{\psi}, \dot{\theta}\right) + b_{21}\left(\phi, \psi, \theta\right) u_2 + b_{22}\left(\phi, \psi, \theta\right) \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Целью синтеза закона управления является выбор регуляторов u_1, u_2, u_3, u_4 таких, чтобы нулевое положение равновесия $\tilde{\xi} = \mathrm{col}\left(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \tilde{\xi}_3, \tilde{\xi}_4, \tilde{\xi}_5, \tilde{\xi}_6\right) = 0$ было асимптотически устойчивым.

Алгоритм управления по состоянию в задаче стабилизации угла рыскания и высоты. Допустим, что вектор переменных (т.е. положение робота, ориентация, а также его линейные и угловые скорости) состояния $\tilde{\xi}$ доступен для измерения.

Закон управления $\left(u_1, u_2\right)$ можем выбрать на основе модели (5) методом линеаризации обратной связью:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = b_1\left(\psi, \theta\right)^{-1} \left[-q_1\left(\psi, \theta\right) - K_1 \tilde{\xi}_1 - K_2 \tilde{\xi}_2 \right],$$

где матрицы $K_1 = \mathrm{diag}\left(k_{11}, k_{12}\right) > 0$, $K_2 = \mathrm{diag}\left(k_{21}, k_{22}\right) > 0$ выбираются исходя из заданных показателей качества.

В этом случае для замкнутой системы имеем

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\xi}}_1 \\ \dot{\tilde{\xi}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ -K_1 & -K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\xi}_1 \\ \tilde{\xi}_2 \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} \tilde{\xi}_1 \\ \tilde{\xi}_2 \end{bmatrix},$$

где $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ обозначает единичную матрицу размерности 2. Назначая собственные желаемые числа матрицы F, можно однозначно выбрать параметры регуляторов K_1 и K_2. Перегруппировав переменные вектора состояния, можно получить более удобную для синтеза модель замкнутой системы:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\xi}}_{11} \\ \dot{\tilde{\xi}}_{21} \\ \dot{\tilde{\xi}}_{12} \\ \dot{\tilde{\xi}}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k_{11} & -k_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -k_{21} & -k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\xi}_{11} \\ \tilde{\xi}_{21} \\ \tilde{\xi}_{12} \\ \tilde{\xi}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\xi}_{11} \\ \tilde{\xi}_{21} \\ \tilde{\xi}_{12} \\ \tilde{\xi}_{22} \end{bmatrix}, \tag{8}$$

где благодаря блочно-диагональной структуре матрицы состояния показатели качества переходных процессов в контуре высоты z и угла рысканья ϕ могут быть настроены независимо друг от друга путем соответствующего выбора параметров матриц K_1 и K_2.

Заметим также, что благодаря известной структуре матриц q_1 и b_1 закон управления может быть переписан в виде

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\cos\theta\cos\psi} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} g\left(1-\cos\theta\cos\psi\right) \\ 0 \end{bmatrix} - K_1\tilde{\xi}_1 - K_2\tilde{\xi}_2 \right)$$

или более точно:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g\left(\dfrac{1}{\cos\theta\cos\psi} - 1\right) + \dfrac{1}{\cos\theta\cos\psi}\left(-k_{11}\tilde{\xi}_{11} - k_{21}\tilde{\xi}_{21}\right) \\ -k_{12}\tilde{\xi}_{12} - k_{22}\tilde{\xi}_{22} \end{bmatrix}.$$

Видно, что контур угла рысканья может быть стабилизирован независимым ПД-регулятором:

$$u_2 = -k_{12}\tilde{\xi}_{12} - k_{22}\tilde{\xi}_{22}. \tag{9}$$

В контуре высоты необходимо наложить ограничение на сигнал u_1, обеспечив условие (4). Пусть номинальный регулятор высоты имеет вид ПД-регулятора с ограничением по уровню:

$$u_1 = \mathrm{sat}_L\left(\frac{1}{\cos\theta\cos\psi}\left(g - k_{11}\tilde{\xi}_{11} - k_{21}\tilde{\xi}_{21}\right) - g\right),$$

где функция $\mathrm{sat}_L(\cdot)$ означает насыщение с уровнем L. При $L = \alpha g$ со вспомогательным параметром $\alpha < 1$ обеспечивается условие (4):

$$0 < 1-\alpha \le \beta(t) \le 1+\alpha.$$

В этом случае динамика замкнутого контура высоты будет иметь вид

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\xi}}_{11} \\ \dot{\tilde{\xi}}_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\xi}_{11} \\ \tilde{\xi}_{21} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cos\theta\cos\psi \;\; \mathrm{sat}_L\left(\frac{1}{\cos\theta\cos\psi}\left(g - k_{11}\tilde{\xi}_{11} - k_{21}\tilde{\xi}_{21}\right) - g\right),$$

откуда можно показать локальную устойчивость по входу:

$$\ddot{z} + k_{21}\dot{z} + k_{11}z = g\left(1-\cos\theta\cos\psi\right),$$

где входом является функция крена θ и тангажа ψ, равная нулю при равновесном состоянии $\theta=0$ и $\psi=0$.

Однако это свойство справедливо только для тех углов крена и тангажа, при которых аргумент функции насыщения в управлении совпадает с ее выходным значением:

$$\operatorname{sat}_L\left(\frac{1}{\cos\theta\cos\psi}\left(g-k_{11}\tilde{\xi}_{11}-k_{21}\tilde{\xi}_{21}\right)-g\right)=\frac{1}{\cos\theta\cos\psi}\left(g-k_{11}\tilde{\xi}_{11}-k_{21}\tilde{\xi}_{21}\right)-g .$$

Тогда можно найти ограничение на углы крена и тангажа, приняв $\tilde{\xi}_{11}=0$ и $\tilde{\xi}_{21}=0$ в положении равновесия

$$-\alpha g\le\frac{1}{\cos\theta\cos\psi}g-g\le\alpha g ,$$

откуда получим необходимое условие

$$\frac{1}{1-\alpha}\ge\cos\theta\cos\psi\ge\frac{1}{1+\alpha} .$$

Поскольку $\alpha<1$, то $\dfrac{1}{1-\alpha}>1$, и левым неравенством можно пренебречь. Таким образом, имеем условие

$$\cos\theta\cos\psi\ge\frac{1}{1+\alpha},$$

физический смысл которого заключается в том, что ограниченного управляющего воздействия достаточно, чтобы в положении равновесия вблизи заданной высоты сбалансировать силы, возникающие при отклонении крена и дифферента.

Алгоритм управления по состоянию в задаче стабилизации координат робота в горизонтальной плоскости. Выберем закон управления $\left(u_3,u_4\right)$ на основе модели (6), (7) методом линеаризации обратной связью:

$$\begin{bmatrix}u_3\\u_4\end{bmatrix}=b_{22}\left(\phi,\psi,\theta\right)^{-1}\Big[-q_2\left(\phi,\psi,\theta,\dot{\phi},\dot{\psi},\dot{\theta}\right)-b_{21}\left(\phi,\psi,\theta\right)u_2-$$
$$-K_3\tilde{\xi}_3-K_4\tilde{\xi}_4-K_5\tilde{\xi}_5-K_6\tilde{\xi}_6\Big],$$

где матрицы $K_3=\operatorname{diag}\left(k_{31},k_{32}\right)>0$, $K_4=\operatorname{diag}\left(k_{41},k_{42}\right)>0$, $K_5=\operatorname{diag}\left(k_{51},k_{52}\right)>0$, $K_6=\operatorname{diag}\left(k_{61},k_{62}\right)>0$ выбираются исходя из заданных показателей качества специальным образом (см. ниже), сигнал управления u_2 определен в выражении (9). Для замкнутого контура системы (6), (7) получим

$$\begin{bmatrix}\dot{\tilde{\xi}}_3\\\dot{\tilde{\xi}}_4\\\dot{\tilde{\xi}}_5\\\dot{\tilde{\xi}}_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&I_2&0&0\\0&0&\beta(t)I_2&0\\0&0&0&I_2\\-K_3&-K_4&-K_5&-K_6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{\xi}_3\\\tilde{\xi}_4\\\tilde{\xi}_5\\\tilde{\xi}_6\end{bmatrix}. \qquad (10)$$

Заметим, что матрица состояния в (10) является нестационарной, это значит, что вопрос выбора коэффициентов обратной связи нетривиален и требует отдельного рассмотрения.

Перепишем (10), перегруппировав вектор переменных состояния аналогично выражению (8):

$$\begin{bmatrix}\dot{\tilde{\xi}}_{31}\\ \dot{\tilde{\xi}}_{41}\\ \dot{\tilde{\xi}}_{51}\\ \dot{\tilde{\xi}}_{61}\\ \dot{\tilde{\xi}}_{32}\\ \dot{\tilde{\xi}}_{42}\\ \dot{\tilde{\xi}}_{52}\\ \dot{\tilde{\xi}}_{62}\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&\beta(t)&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\-k_{31}&-k_{41}&-k_{51}&-k_{61}&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&\beta(t)&0\\0&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&-k_{32}&-k_{42}&-k_{52}&-k_{62}\end{bmatrix}}_{F_{34}}\begin{bmatrix}\tilde{\xi}_{31}\\ \tilde{\xi}_{41}\\ \tilde{\xi}_{51}\\ \tilde{\xi}_{61}\\ \tilde{\xi}_{32}\\ \tilde{\xi}_{42}\\ \tilde{\xi}_{52}\\ \tilde{\xi}_{62}\end{bmatrix}. \tag{11}$$

Матрица состояния $F_{34}=\begin{bmatrix}F_3&0\\0&F_4\end{bmatrix}$ является блочно-диагональной:

$$F_3=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&\beta(t)&0\\0&0&0&1\\-k_{31}&-k_{41}&-k_{51}&-k_{61}\end{bmatrix},\quad F_4=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&\beta(t)&0\\0&0&0&1\\-k_{32}&-k_{42}&-k_{52}&-k_{62}\end{bmatrix},$$

и ее гурвицевость (асимптотическая устойчивость системы с такой матрицей состояния) определяется гурвицевостью матриц F_3 и F_4.

Поскольку, согласно выражению (4), параметр $\beta(t)$ ограничен и сверху, и снизу известными положительными числами, можно выбрать постоянные параметры k так, чтобы обеспечить асимптотическую устойчивость нулевого положения равновесия в системе (11) или (10). Подобное утверждение может быть найдено в статьях [1, 2], доказательство которого может быть получено на основе доказательства расширенной версии леммы Даяванца [3, 4]. Наиболее близкий результат вычисления матрицы K представлен в работе [5] с помощью метода бэкстеппинг. Далее покажем доказательство утверждения, определяющего способ выбора стабилизирующей обратной связи.

Утверждение 2. Рассмотрим вспомогательную систему вида

$$\dot{\chi}_1=\chi_2,$$
$$\dot{\chi}_2=\beta(t)\chi_3,$$
$$\dot{\chi}_3=\chi_4,$$
$$\dot{\chi}_4=u,$$

где $\chi=\mathrm{col}(\chi_1,\chi_2,\chi_3,\chi_4)\in R^4$, переменный коэффициент $\beta(t)$ удовлетворяет двойному неравенству (4). Существует вектор постоянных параметров $\kappa=\mathrm{col}(\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3,\kappa_4)$ такой, что закон управления

$$u=\kappa^{\mathrm{T}}\chi \tag{12}$$

обеспечивает асимптотическую устойчивость положения равновесия $\chi=0$ при любых начальных условиях $\chi(0)$.

Доказательство утверждения 2. Рассмотрим замену переменных, следуя методу бэкстеппинг:

$$y_1=\chi_1,$$

$$y_2 = \chi_2 + \alpha_1\chi_1,$$
$$y_3 = \chi_3 + \alpha_2 y_2,$$
$$y_4 = \chi_4 + \alpha_3 y_3.$$

Тогда в новом базисе $\left(y_1, y_2, y_3, y_4\right)$ система примет вид

$$\dot{y}_1 = -\alpha_1 y_1 + y_2,$$
$$\dot{y}_2 = -\alpha_1^2\, y_1 + \left(\alpha_1 - \alpha_2\beta\right) y_2 + \beta\, y_3,$$
$$\dot{y}_3 = -\alpha_1^2\alpha_2\, y_1 + \alpha_2\left(\alpha_1 - \alpha_2\beta\right) y_2 + \left(\alpha_2\beta - \alpha_3\right) y_3 + y_4,$$
$$\dot{y}_4 = -\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3\, y_1 + \alpha_2\alpha_3\left(\alpha_1 - \alpha_2\beta\right) y_2 + \alpha_3\left(\alpha_2\beta - \alpha_3\right) y_3 + \alpha_3 y_4 + u.$$

Выберем закон управления $u = -\alpha_4 y_4$, что соответствует формуле (12), где

$$\kappa_1 = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4,$$
$$\kappa_2 = -\alpha_2\alpha_3\alpha_4,$$
$$\kappa_3 = -\alpha_3\alpha_4,$$
$$\kappa_4 = -\alpha_4.$$

Тогда для замкнутой системы получим

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{bmatrix} = \Phi \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}, \tag{13}$$

с матрицей состояния Φ, имеющей вид

$$\Phi = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha_1^2 & \alpha_1 - \alpha_2\beta & \beta & 0 \\ -\alpha_1^2\alpha_2 & \alpha_2\left(\alpha_1 - \alpha_2\beta\right) & \alpha_2\beta - \alpha_3 & 1 \\ -\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 & \alpha_2\alpha_3\left(\alpha_1 - \alpha_2\beta\right) - \alpha_2\alpha_3\alpha_4 & \alpha_3\left(\alpha_2\beta - \alpha_3\right) - \alpha_3\alpha_4 & \alpha_3 - \alpha_4 \end{bmatrix}.$$

Коэффициенты, гарантирующие асимптотическую устойчивость нулевого положения равновесия системы (13), выбираются следующим образом.

Шаг 1. Выбираем произвольное положительное число α_1.

Шаг 2. Выбираем параметр α_2 из соображений устойчивости по входу подсистемы $\left(y_1, y_2\right)$. При нулевом входе y_3 подсистема имеет вид

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 1 \\ -\alpha_1^2 & \alpha_1 - \alpha_2\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Лемма 1. Существует положительное число α_2^* такое, что для всех $\alpha_2 > \alpha_2^*$ система (14) является асимптотически устойчивой.

Доказательство леммы 1 может быть получено с помощью функции Ляпунова вида $V_2 = y_1^2 + y_2^2$. Продифференцировав V_2, получим

$$\dot{V}_2 = -\alpha_1 V_2 + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 1 - \alpha_1^2 \\ 1 - \alpha_1^2 & 3\alpha_1 - 2\alpha_2\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Выберем параметр α_2 из условия отрицательной определенности матрицы $\begin{bmatrix} -\alpha_1 & 1-\alpha_1^2 \\ 1-\alpha_1^2 & 3\alpha_1 - 2\alpha_2\beta \end{bmatrix}$:

$$\alpha_2 > \frac{3\alpha_1^2 + \left(\alpha_1^2 - 1\right)^2}{2\alpha_1\beta} \geq \frac{3\alpha_1^2 + \left(\alpha_1^2 - 1\right)^2}{2\alpha_1\beta_{\max}} =: \alpha_2^*.$$

Шаг 3. Выбираем параметр $\alpha_3 > \alpha_3^*$ из соображений устойчивости по входу подсистемы $\left(y_1, y_2, y_3\right)$ с нулевым входом y_4, повторно вводя аргументы леммы 2 в функцию Ляпунова $V_3 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = V_2 + y_3^2$.

Шаг 4. Аналогично шагам 3 и 4 выбираем параметр $\alpha_4 > \alpha_4^*$.

Таким образом, утверждение 2 доказано. ■

На основе утверждения 2 могут быть выбраны коэффициенты K_3, K_4, K_5, K_6, обеспечивающие устойчивость системы вида (11) и, как следствие, асимптотическую устойчивость (10).

Замечание. Обратим внимание, что выбор коэффициентов обратной связи затруднен необходимостью учета неравенств, связанных с нестационарным коэффициентом $\beta(t)$. Более того, синтез робастного алгоритма управления по выходу требует построения наблюдателя состояния, настройка которого для обеспечения устойчивости замкнутой системы потребует еще больших усилий.

Динамический алгоритм управления по состоянию в задаче стабилизации координат робота пространстве

Шаг 1. Введем новые переменные

$$\zeta_1 = \begin{bmatrix} \tilde{\xi}_1 \\ \tilde{\xi}_3 \end{bmatrix}, \zeta_2 = \begin{bmatrix} \tilde{\xi}_2 \\ \tilde{\xi}_4 \end{bmatrix},$$

тогда полная модель движения квадрокоптера (5)—(7) принимает вид

$$\dot{\zeta}_1 = \zeta_2,$$

$$\dot{\zeta}_2 = \begin{bmatrix} q_1(\psi,\theta) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1(\psi,\theta) & 0 \\ 0 & \beta I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ \xi_5 \end{bmatrix},$$

$$\dot{\tilde{\xi}}_5 = \tilde{\xi}_6,$$

$$\dot{\tilde{\xi}}_6 = q_2\left(\phi,\psi,\theta,\dot{\phi},\dot{\psi},\dot{\theta}\right) + b_{21}(\phi,\psi,\theta)u_2 + b_{22}(\phi,\psi,\theta)\begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Шаг 2. Пусть вектор управляющих воздействий $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ будет выходом двух интеграторов с некоторым входом $v_{12} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$, который будет выбран далее:

$$\dot{u}_{12} = \rho_{12}, \quad \dot{\rho}_{12} = v_{12}.$$

Шаг 3. Модель движения квадрокоптера может быть представлена в нормальной форме.

Утверждение 3. Агрегированная модель движения квадрокоптера может быть представлена в нормальной форме:

$$\dot\zeta_1 = \zeta_2,$$
$$\dot\zeta_2 = \zeta_3,$$
$$\dot\zeta_3 = \zeta_4,$$
$$\dot\zeta_4 = q_4(\zeta,\phi) + b_4(\zeta,\phi)U,$$

где $\zeta = \mathrm{col}(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\zeta_4) \in R^{16}$ — вектор переменных состояния, $U = \mathrm{col}(v_1,v_2,u_3,u_4)$ — вектор управляющих воздействий, а функции $q_4(\zeta,\phi)$ и $b_4(\zeta,\phi)$ обладают следующими свойствами:

$$q_4(0,\phi) = 0,$$

матрица $b_4(\zeta,\phi)$ является невырожденной для всех значений аргументов, а также

$$b_4(0,\phi) = g\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \beta\begin{bmatrix} -\cos\phi & -\sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Доказательство утверждения 3 может быть получено путем последовательного вычисления производных переменной $\zeta_3 = \dot\zeta_2$ и $\zeta_4 = \dot\zeta_3$.

Итоговый закон управления будет иметь вид:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{J_\phi}{C} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{J_\psi}{\ell} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{J_\theta}{\ell} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 + g \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \ddot u_1 \\ \ddot u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = b_4(\zeta,\phi)^{-1}\left[-q_4(\zeta,\phi) - \gamma_1\zeta_1 - \gamma_2\zeta_2 - \gamma_3\zeta_3 - \gamma_4\zeta_4\right],$$

где выбор параметров γ_1, γ_2, γ_3, $\gamma_4 > 0$ существенно упрощается, поскольку определяется заданными показателями качества замкнутой системы, модель которой имеет вид

$$\begin{bmatrix} \dot\zeta_1 \\ \dot\zeta_2 \\ \dot\zeta_3 \\ \dot\zeta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_4 \\ -\gamma_1 I_4 & -\gamma_2 I_4 & -\gamma_3 I_4 & -\gamma_4 I_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \\ \zeta_4 \end{bmatrix}, \qquad (16)$$

откуда нетрудно показать, что параметры γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 могут быть выбраны как соответствующие коэффициенты типовых характеристических полиномов Баттерворта или Ньютона, или же вычислены методом модального управления.

Заключение. В настоящей работе решена задача динамического позиционирования квадрокоптера в точке с помощью двух алгоритмов. Первый основан на полной модели движения квадрокоптера, учитывающей динамику по всем линейным и угловым координатам, что позволяет обобщить результат [1] на случай изменяющегося угла рыскания. Второй — динамический алгоритм управления — характеризуется упрощенной методикой настройки регулятора. Упрощение связано с тем, что при синтезе робастного алгоритма управления, аналогичного [1, 2], структура наблюдателя состояния не содержит нестационарных коэффициентов усиления, что значительно облегчает выбор его параметров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Borisov O. I., Pyrkin A. A., Isidori A.* Application of enhanced extended observer in station-keeping of a quadrotor with unmeasurable pitch and roll angles // IFAC-PapersOnLine. 2019. Vol. 52, N 16. P. 837—842. DOI: 10.1016/j.ifacol.2019.12.067.

2. *Борисов О. И., Каканов М. А., Живицкий А. Ю., Пыркин А. А.* Робастное траекторное управление квадрокоптером по выходу на основе геометрического подхода // Изв. вузов. Приборостроение. 2021. Т. 64, № 12. С. 982—992.

3. *Gauthier J. P., Kupka I.* Deterministic observation theory and applications. Cambridge University Press, 2001.

4. *Isidori A., Pyrkin A., Borisov O.* An extension of a lemma of Dayawansa and its application in the design of extended observers for nonlinear systems // Automatica. 2019. Vol. 106. P. 178—183. DOI: 10.1016/j.automatica.2019.04.043.

5. *Borisov O., Isidori A., Kakanov M., Pyrkin A.* Robust tracking control of a robot arm actuated by permanent magnet synchronous motors // International Journal of Robust and Nonlinear Control. 2022. Vol. 32, N 18. P. 10358—10373. DOI: 10.1002/rnc.6366.

Сведения об авторах

Станислав Александрович Ким — Университет ИТМО; факультет систем управления и робототехники; инженер; E-mail: skim@itmo.ru

Антон Александрович Пыркин — д-р техн. наук, профессор; Университет ИТМО; факультет систем управления и робототехники; профессор; E-mail: pyrkin@itmo.ru

Олег Игоревич Борисов — канд. техн. наук; Университет ИТМО; факультет систем управления и робототехники; доцент; E-mail: borisov@itmo.ru

Поступила в редакцию 02.06.23; одобрена после рецензирования 16.06.23; принята к публикации 28.08.23.

REFERENCES

1. Borisov O.I., Pyrkin A.A., Isidori A. *IFAC-PapersOnLine*, 2019, no. 16(52), pp. 837–842, DOI: 10.1016/j.ifacol.2019.12.067
2. Borisov O.I., Kakanov M.A., Zhivitckii A.Yu., Pyrkin A.A. *Journal of Instrument Engineering*, 2021, no. 12(64), pp. 982–992. (in Russ.)
3. Gauthier J.P., Kupka I. *Deterministic observation theory and applications*, Cambridge University Press, 2001.
4. Isidori A., Pyrkin A., Borisov O. *Automatica*, 2019, vol. 106, pp. 178–183, DOI: 10.1016/j.automatica.2019.04.043.
5. Borisov O., Isidori A., Kakanov M., Pyrkin A. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2022, no. 18(32), pp. 10358–10373, DOI: 10.1002/rnc.6366.

Data on authors

Stanislav A. Kim — ITMO University, Faculty of Control Systems and Robotics; Engineer; E-mail: skim@itmo.ru

Anton A. Pyrkin — Dr. Sci., Professor; ITMO University, Faculty of Control Systems and Robotics; Professor; E-mail: pyrkin@itmo.ru

Oleg I. Borisov — PhD; ITMO University, Faculty of Control Systems and Robotics; Associate Professor; E-mail: borisov@itmo.ru

Received 02.06.23; approved after reviewing 16.06.2316.06.23; accepted for publication 28.08.23.