

**АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД
К ВЫБОРОЧНОМУ ПОИСКУ ФУНКЦИЙ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ
В МАРКОВСКИХ ЦЕПЯХ**

А. В. ЗЕМСКОВ

*Государственный университет морского и речного флота им. адмирала С. О. Макарова,
Санкт-Петербург, Россия,
aleksei.zemskov@yandex.ru*

Аннотация. Предлагается аналитический подход к исследованию счетных однородных марковских цепей. Приводится алгоритм выборочного поиска операторов „вход—выход“ в z -форме. Описываются простые аналитические процедуры получения функций вероятностей при вещественных и комплексно-сопряженных собственных значениях матрицы переходных вероятностей. Даются оценки для границ наступления установившегося режима в тактовом времени. Приводятся дополнительные результаты для установившегося режима с помощью алгоритма развертывания характеристических определителей. Основные выкладки иллюстрируются состоянием характеристик марковских цепей с учетом влияния переходной динамики при изменении вероятностей состояний на интервале функционирования в тактовом времени. Также рассматриваются аспекты надежности вычислений при оценке значений вероятностей с помощью предлагаемого подхода.

Ключевые слова: марковская цепь, оператор „вход—выход“ в z -форме, собственные значения, собственные векторы, функция вероятности состояния

Ссылка для цитирования: Земсков А. В. Аналитический подход к выборочному поиску функций вероятностей состояний в марковских цепях // Изв. вузов. Приборостроение. 2023. Т. 66, № 12. С. 1035—1049. DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-12-1035-1049.

**ANALYTICAL APPROACH TO SELECTIVE SEARCH
FOR STATE PROBABILITY FUNCTIONS IN MARKOV CHAINS**

A. V. Zemskov

*Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping,
St. Petersburg, Russia
aleksei.zemskov@yandex.ru*

Abstract. An analytical approach to studying countable homogeneous Markov chains is proposed. An algorithm for selective search of input-output operators in z -form is presented. Simple analytical procedures for obtaining probability functions for real and complex conjugate eigenvalues of the transition probability matrix are described. Estimates are given for the boundaries of the onset of a steady state in clock time. Additional results are presented for the steady state using an algorithm for expanding the characteristic determinants. The main calculations are illustrated by assessing the characteristics of Markov chains taking into account the influence of transient dynamics when changing the probabilities of states over the operating interval in clock time. Aspects of calculation reliability when estimating probability values using the proposed approach are also considered.

Keywords: Markov chain, input-output operator in z -form, eigenvalues, eigenvectors, state probability function

For citation: Zemskov A. V. Analytical approach to selective search for state probability functions in Markov chains. *Journal of Instrument Engineering*. 2023. Vol. 66, N 12. P. 1035—1049 (in Russian). DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-12-1035-1049.

Введение. Марковские цепи (МЦ) находят широкое применение при исследовании различных стохастических систем [1—4]. Современные программно-аппаратные возможности векторно-матричных вычислений в большинстве случаев принципиально позволяют получать

характеристики МЦ, базирующиеся на оценках вероятностей состояний. При этом, как правило, проблемы накопления погрешностей и контроля правильности конечного результата не считаются критичными. Достаточно часто исследования сводятся к получению вероятностей в установившемся (стационарном) режиме, по определению не совпадающих со средними их значениями на любом заданном интервале функционирования цепи в тактовом времени. При этом очевидно, что отклонение может быть тем заметнее, чем позже наступает установившийся режим.

Аналізу переходной динамики функционирования марковских процессов с непрерывным временем посвящены работы [5—10], из которых к настоящей статье наиболее близки источники [9, 10]. Однако исследования именно МЦ с дискретным временем в указанных публикациях отсутствуют как таковые.

Постановка задачи. В качестве МЦ в статье рассматривается счетная однородная цепь из n состояний с математическим описанием в виде матрицы переходных вероятностей (МПВ) и вектора начального распределения вероятностей (ВНРВ):

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{n \times n},$$

$$\mathbf{P}(0) = [P_1(0) \quad P_2(0) \quad \dots \quad P_n(0)]^T \in \mathfrak{R}^n, \quad (1)$$

Γ — символ транспонирования.

Допускается достаточно общий вариант, когда спектр матрицы \mathbf{P} составляют не кратные вещественные и комплексно-сопряженные собственные значения. Очевидно, что некоторые элементы МПВ и ВНРВ могут быть нулевыми. Функционирование МЦ по смыслу включает реакцию на отсутствующие компоненты ВНРВ.

Динамика такой цепи с тактовым временем k описывается векторно-матричным рекуррентным уравнением [1—4]:

$$\mathbf{P}(k+1) = \mathbf{P}^T \mathbf{P}(k), \quad (2)$$

где $\mathbf{P}(k)$ и $\mathbf{P}(k+1)$ — векторы вероятностей состояний на шагах k и $k+1$ (в моменты тактового времени k и $k+1$).

Уравнение (2) позволяет представить рекуррентное определение вектора вероятностей, в том числе в преобразованной форме

$$\mathbf{P}(k) = (\mathbf{P}^T)^k \mathbf{P}(0). \quad (3)$$

Также известны алгоритмы определения стационарных значений компонентов вектора вероятностей (установившегося решения) при использовании аппарата собственных значений и собственных векторов матриц [1, 4]:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{P}^T)^k = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{V} \mathbf{Z}^k \mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V} \mathbf{Z}_1 \mathbf{V}^{-1}, \quad (4)$$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & z_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z_n \end{bmatrix}, \mathbf{Z}^k = \begin{bmatrix} 1^k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_2^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & z_3^k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z_n^k \end{bmatrix}, \mathbf{Z}_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{Z}^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$\mathbf{P}(k \rightarrow \infty) = [P_0(\infty) \quad P_1(\infty) \quad \dots \quad P_n(\infty)]^T = \mathbf{V} \mathbf{Z}_1 \mathbf{V}^{-1} \mathbf{P}(0), \quad (6)$$

где $\lim_{k \rightarrow \infty} (\dots)$ — обозначение предела при стремлении количества тактов к бесконечности;

\mathbf{V} — матрица собственных векторов \mathbf{P}^T ; \mathbf{Z} — диагональная матрица собственных значений матрицы \mathbf{P}^T ; $1, z_2, z_3, \dots, z_n$ — собственные значения матрицы $\mathbf{P}^T (\mathbf{P})$; $\mathbf{P}(k \rightarrow \infty)$ — вектор установившихся (стационарных) значений вероятностей состояний.

Здесь матрица решения для установившегося режима $\mathbf{VZ}_1\mathbf{V}^{-1}$ состоит из столбцов вектора $\mathbf{P}(k \rightarrow \infty)$.

Выполнение указанных процедур обеспечивает пользователя многочисленными числовыми данными и позволяет (при соответствующей квалификации последнего) исследовать в первую очередь стационарные режимы. При увеличении порядка матрицы \mathbf{P} (т.е. числа состояний МЦ), количества тактов функционирования k , а также при необходимости учета влияния переходных режимов интерпретация результатов становится все более затруднительной и не наглядной.

Наличие аналитических выражений для функций вероятностей в силу компактности и наглядности значительно упрощает процедуры анализа и синтеза МЦ. Важно, что при этом, в отличие от рекуррентных схем, погрешности не накапливаются от шага к шагу. Теоретически процедуры получения аналитических выражений решетчатых функций строятся на основе z -преобразования (прямого и обратного) [11, С. 67—85; 12, С. 15—50].

При опоре на аппарат переменных „вход—выход“ уравнение (2) в результате z -преобразования при ненулевых начальных условиях в виде ВНРВ (1) и несложных трансформаций принимает следующую форму [11, С. 128—137]:

$$\mathbf{P}(z) = (z\mathbf{E}_n - \mathbf{P}^T)^{-1}z\mathbf{P}(0) = \Phi_0(z)\mathbf{P}(0) = \Phi(z)z\mathbf{P}(0). \quad (7)$$

Здесь $\mathbf{P}(z)$ — z -изображение вектора текущего распределения вероятностей (ВТРВ); \mathbf{E}_n — единичная $(n \times n)$ -матрица; $\Phi_0(z) = (z\mathbf{E}_n - \mathbf{P}^T)^{-1}z = \Phi(z)z$ — $(n \times n)$ -матрица z -передаточных функций от ВНРВ к ВТРВ; $\mathbf{P}(0)$ — ВНРВ, по терминологии аппарата переменных „вход—выход“, формально являющийся вектором ненулевых начальных условий.

Получение обратной характеристической матрицы-резольвенты $\Phi(z) = (z\mathbf{E}_n - \mathbf{P}^T)^{-1}$ справедливо считается трудной вычислительной задачей. Основным подходом к ее решению является метод Д. К. Фаддеева [13], алгоритмическая схема которого предполагает связанный поиск всех элементов без исключения, что далеко не всегда необходимо на практике. Кроме того, в [14, С. 297—298] критикуется чувствительность данного подхода к порядку исходной матрицы, приводящая к „геометрическому“ нарастанию погрешностей вычислений при перемножении промежуточных числовых матриц большого размера.

Переход от компонентов вектора $\mathbf{P}(z)$ к их оригиналам в тактовом времени осуществляется с помощью процедуры обратного z -преобразования [11, 12]. При этом основную трудность вызывает получение составляющих, соответствующих комплексно-сопряженным парам собственных значений матрицы \mathbf{P} (\mathbf{P}^T). Например, аналитические соотношения, описанные в книге [12, С. 39—40], имеют весьма малое практическое значение в связи с их чрезвычайной сложностью и необходимостью знания не только полюсов (собственных значений матрицы \mathbf{P} (\mathbf{P}^T)), но и нулей z -передаточных функций (т.е. корней числителей).

В этой связи актуальна разработка аналитического подхода, который позволял бы при необходимости выборочно получать выражения для функций вероятностей состояний в МЦ наглядно и точно, в „замкнутой“ аналитической форме и находить средние значения вероятностей на заданном интервале функционирования в тактовом времени. Вспомогательными задачами выступают обоснование процедур получения оценок для границ наступления установившегося режима, а также поиска решения для установившегося режима с помощью

алгоритма развертывания характеристических определителей. Достижение указанных целей с использованием аппарата переменных „вход—выход“ составляет основное содержание настоящей статьи.

Выборочный поиск операторов „вход—выход“. При исследовании МЦ часто встречается ситуация, когда пользователя интересует единственный оператор „вход—выход“, а именно единственная передаточная функция $\Phi_{ij}(z)$ от j -го компонента ВНРВ к i -му компоненту ВТРВ (например, когда в ВНРВ один компонент равен 1, а исследуется функция вероятности только одного из состояний). Данная задача решается методом Крамера при наличии программ развертывания частных функциональных определителей, структуры которых не являются „характеристическими“. При наличии стандартных средств развертывания характеристических определителей для выборочного поиска скалярных элементов матрицы $\Phi(z)$ предлагается использовать алгоритм [15, 16]:

$$\Phi_{ij}(z) = \frac{P_i(z)}{P_j(0)} = \frac{z \det(z\mathbf{E}_{n-1} - \mathbf{P}_{ii}^T) - \det(z\mathbf{E}_n - \mathbf{D}_{ij})}{\det(z\mathbf{E}_n - \mathbf{P}^T)}, \quad (8)$$

где $P_i(z)$ — i -й компонент ВТРВ в z -форме; $P_j(0)$ — j -й компонент ВНРВ; $\det(\dots)$ — обозначения характеристических определителей числовых матриц; \mathbf{E}_{n-1} — единичная $((n-1) \times (n-1))$ -матрица; \mathbf{P}_{ii}^T — матрица \mathbf{P}^T , уплотненная в результате удаления i -й строки и i -го столбца; \mathbf{D}_{ij} — матрица \mathbf{P}^T , в которой i -й столбец коэффициентов заменен на j -й столбец матрицы \mathbf{E}_n .

Применение формулы (8) позволяет не только найти необходимое количество операторов „вход—выход“ от единственного до всех n , но и сохранить точность вычислений для систем высокого порядка при поиске полиномов через спектры соответствующих матриц с помощью, например, QR-алгоритма В. Н. Кублановской, J. G. F. Francis [17]. При выполнении условия $i = j$ формула (8) упрощается до следующего варианта:

$$\begin{aligned} \Phi_{ii}(z) &= \frac{P_i(z)}{P_i(0)} = \frac{z \det(z\mathbf{E}_{n-1} - \mathbf{P}_{ii}^T) - \det(z\mathbf{E}_n - \mathbf{D}_{ii})}{\det(z\mathbf{E}_n - \mathbf{P}^T)} = \left| \det(z\mathbf{E}_n - \mathbf{D}_{ii}) = (z-1) \det(z\mathbf{E}_{n-1} - \mathbf{P}_{ii}^T) \right| = \\ &= \frac{z \det(z\mathbf{E}_{n-1} - \mathbf{P}_{ii}^T) - (z-1) \det(z\mathbf{E}_{n-1} - \mathbf{P}_{ii}^T)}{\det(z\mathbf{E}_n - \mathbf{P}^T)} = \frac{\det(z\mathbf{E}_{n-1} - \mathbf{P}_{ii}^T)}{\det(z\mathbf{E}_n - \mathbf{P}^T)}. \end{aligned} \quad (9)$$

При произвольных значениях компонентов ВНРВ знание элементов матрицы $\Phi(z)$ всегда позволяет найти требуемую линейную комбинацию для искомой составляющей вектора $\mathbf{P}(z)$ по формуле

$$P_i(z) = \sum_{j=1}^n \Phi_{ij}(z) P_j(0) = \Phi_i(z) = \frac{B_i(z)}{A(z)}. \quad (10)$$

В свою очередь, z -оператор (10) позволяет перейти к процедуре получения аналитического выражения для решетчатой функции вероятности [11, С. 74—78]:

$$P_i(k) = Z^{-1} \left[\frac{B_i(z)}{A(z)} \right] = Z^{-1} [\Phi_i(z)] = \frac{1}{2\pi j} \oint_r \Phi_i(z) z^{k-1} dz. \quad (11)$$

В выражении (11): $Z^{-1}[\dots]$ — символ обратного z -преобразования. В соотношениях (9)—(11) в качестве влияющего входа (входов) условно принимаются компоненты ВНРВ ступенчатого вида $P_j(k) = P_j(0) \cdot 1(k)$.

Получение функций вероятностей состояний. В спектре собственных значений матрицы \mathbf{P}^T всегда имеется одно, равное единице. При исследовании счетных однородных МЦ с конечным числом состояний все остальные ее собственные значения находятся внутри единичной окружности комплексной плоскости. Наиболее общим вариантом при этом является наличие некрatных вещественных и комплексно-сопряженных корней. Не искажая общности результатов, можно остановиться на исследовании единственного динамического образа однородной МЦ при наличии передаточной функции (8) и указанного выше корневого портрета. Таким образом, основной исследуемый оператор представляется в виде

$$\Phi_{ij}(z) = \frac{B_{ij}(z)}{(z-1)(z-z_2)(z-z_3)\dots(z-z_n)}, \tag{12}$$

где $1, z_2, z_3, \dots, z_n$ — собственные значения матрицы \mathbf{P} (\mathbf{P}^T) (некрatные корни единого для всех передаточных функций знаменателя).

Контурное интегрирование из соотношения (11) на практике сводится к использованию так называемых вычетов [11, С. 74—78; 12, С. 36—38]. В частности, компонент $C_{m,ij}(k)$, обусловленный любым вещественным корнем z_m (m — номер корня) в знаменателе (12), находится достаточно просто с помощью соотношения

$$C_{m,ij}(k) = \operatorname{res} \Phi_{ij}(z) \Big|_{z=z_m} = \lim_{z \rightarrow z_m} (z-z_m) \Phi_{ij}(z) z^{k-1} = c_{m,ij} (z_m)^k. \tag{13}$$

Здесь $\operatorname{res}(\dots)$ — обозначение вычета; $c_{m,ij}$ — числовая константа.

При наличии среди корней в знаменателе (12) комплексно-сопряженных пар задача, как отмечено выше, усложняется. Получать часть функции вероятности в виде соответствующей синусоиды предлагается с помощью простых аналитических процедур на примере обобщенной в плане обозначения индексации (2,3) комплексно-сопряженной пары корней $z_{2,3} = \lambda \pm j\omega$ (здесь λ — вещественная часть, ω — мнимая часть). Ей сопоставляется компонент

$$\tilde{P}_{2,3,ij}(k) = -d_{ij} d^k \sin(\varphi_0 k + \varphi_{ij}), \tag{14}$$

где

$$\left\{ \begin{aligned} & d = \sqrt{\lambda^2 + \omega^2}, \varphi = \operatorname{arctg} \left(\left| \frac{\omega}{\lambda-1} \right| \right), \varphi_0 = \begin{cases} \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega}{\lambda} \right), \lambda \geq 0; \\ \pi - \operatorname{arctg} \left(\left| \frac{\omega}{\lambda} \right| \right), \lambda < 0; \end{cases} & \Phi_{ij}^y(z) = \Phi_{ij}(z)(z-z_2)(z-z_3)(z-1), \\ & \Phi_{ij}^y(\lambda + j\omega) = \Phi_{ij}^y(z) \Big|_{z=\lambda + j\omega}; d_{ij} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{|\Phi_{ij}^y(\lambda + j\omega)|}{\sqrt{(1-\lambda)^2 + \omega^2}}, \Delta\varphi_{ij} = \arg [\Phi_{ij}^y(\lambda + j\omega)], \varphi_{ij} = \varphi + \Delta\varphi_{ij}. \end{aligned} \right. \tag{15}$$

Поскольку индексация m и (2,3) произвольная, то зависимости (13)—(15) позволяют найти все составляющие искомой функции вероятности $P_{ij}(k)$, определяемые некрatными вещественными и комплексно-сопряженными собственными значениями МПВ. Очевидно, что вычет $C_{1,ij}(k) = c_{1,ij}(z_1)^k = c_{1,ij}(1)^k = c_{1,ij}$ в корне $z = z_1 = 1$ обуславливает наличие постоянного компонента, соответствующего установившемуся значению вероятности $P_{ij}(k \rightarrow \infty)$, а значение функции вероятности в момент тактового времени $k = 0$ совпадает с величиной компонента $P_{ij}(0)$.

Получение оценок для границ наступления установившегося режима. У эргодических МЦ, к которым относятся и счетные однородные, имеет место асимптотическое затухание компонентов функций вероятностей и, как следствие, самих функций в целом к установившимся значениям. В большинстве задач управления асимптотически затухающие функции считаются практически установившимися при вхождении соответствующих координат в „коридор“ в $\pm 5\%$ от установившегося значения [11, 12, 14].

Тогда для составляющей функции вероятности, соответствующей оператору (12) и обусловленной любым вещественным корнем z_m , процесс установления (затухания) описывается следующей системой уравнений (для упрощения записей индексация (i, j) не указывается):

$$\begin{cases} c_1 + c_m |z_m|^k = 1,05c_1 \quad \forall c_1 + c_m > 1,05c_1; \\ c_1 + c_m |z_m|^k = 0,95c_1 \quad \forall c_1 + c_m < 0,95c_1. \end{cases} \quad (16)$$

Первое уравнение в системе (16) соответствует приближению процесса к установившемуся состоянию „сверху“, а второе — „снизу“. Из первого уравнения можно получить

$$c_1 + c_m |z_m|^k = 1,05c_1 \Rightarrow c_m |z_m|^k = 0,05c_1 \Rightarrow \ln c_m + k \ln |z_m| = \ln 0,05 + \ln c_1 \Rightarrow k = \frac{\ln 0,05 + \ln c_1 - \ln c_m}{\ln |z_m|}.$$

Аналогично действуя для второго уравнения, можно записать решения в следующем виде:

$$\begin{cases} k_+ = \frac{\ln 0,05 + \ln c_1 - \ln c_m}{\ln |z_m|} \approx \frac{-3 + \ln c_1 - \ln c_m}{\ln |z_m|} \quad \forall c_1 + c_m > 1,05c_1; \\ k_- = \frac{\ln 0,05 + \ln c_1 - \ln(-c_m)}{\ln |z_m|} \approx \frac{-3 + \ln c_1 - \ln(-c_m)}{\ln |z_m|} \quad \forall c_1 + c_m < 0,95c_1. \end{cases} \quad (17)$$

Здесь k_+ (k_-) — тактовое время затухания составляющей функции вероятности, обусловленной корнем z_m , асимптотически „сверху“ („снизу“); c_1 — установившееся значение функции вероятности (вычет в корне $z = z_1 = 1$); c_m — числовая константа, определяемая вычетом в корне z_m .

Для составляющей функции вероятности, соответствующей оператору (12) и обусловленной любой комплексно-сопряженной парой корней $z_{2,3} = \lambda \pm j\omega$, процесс установления описывается уравнением

$$c_1 + d_{ij} d^k = 1,05c_1, \quad \forall c_1 + d_{ij} > 1,05c_1. \quad (18)$$

Уравнение (18) соответствует асимптотическому приближению процесса к установившемуся состоянию как „сверху“, так и „снизу“, поскольку из компонента (14) исключается синусоидальный множитель. Далее можно получить

$$c_1 + d_{ij} d^k = 1,05c_1 \Rightarrow d_{ij} d^k = 0,05c_1 \Rightarrow \ln d_{ij} + k \ln d = \ln 0,05 + \ln c_1 \Rightarrow k = \frac{\ln 0,05 + \ln c_1 - \ln d_{ij}}{\ln d}.$$

Для решения в итоге справедлива формула

$$\tilde{k} = \frac{\ln 0,05 + \ln c_1 - \ln d_{ij}}{\ln d} \approx \frac{-3 + \ln c_1 - \ln d_{ij}}{\ln d} \quad \forall c_1 + d_{ij} > 1,05c_1, \quad (19)$$

где \tilde{k} — время затухания составляющей функции вероятности, обусловленной комплексно-сопряженной парой корней $z_{2,3} = \lambda \pm j\omega$; характеристики c_1 , d , d_{ij} определены ранее.

В зависимости от параметров математической модели МЦ по тем или иным компонентам функций вероятностей и функциям в целом могут наблюдаться разнообразные варианты

динамики функционирования в тактовом времени. При этом наиболее интересны следующие случаи:

1) условия применения соотношений (16)—(19) не соблюдаются. Следовательно, установившийся режим имеет место с момента начала функционирования МЦ;

2) наиболее удаленным от начала координат комплексной плоскости является вещественный корень, и в функции вероятности ему соответствует наибольшая по абсолютной величине константа c_m . При этом корень считается доминирующим, и оценка границы наступления установившегося режима по формулам (17) будет вполне точной;

3) наиболее удаленной от начала координат комплексной плоскости является комплексно-сопряженная пара корней, а в функции вероятности ей соответствует наибольшее число d_{ij} . Тогда пара считается доминирующей, а оценка границы наступления установившегося режима по формуле (19) будет вполне точной.

Очевидно, что при получении по приведенным формулам дробных значений соответствующих оценок в качестве последних следует брать ближайшие большие целые числа.

Дополнительный результат поиска установившегося решения на бесконечном интервале. Матрица \mathbf{V} может быть надежно построена в системах высокого порядка с помощью одного из столбцов присоединенной характеристической матрицы с использованием стандартной программы развертывания характеристического определителя [18]:

$$\text{adj}(z\mathbf{E}_n - \mathbf{P}^T) = [\mathbf{A}_1(z) \quad \mathbf{A}_2(z) \quad \dots \quad \mathbf{A}_n(z)],$$

$$\mathbf{A}_1(z) = \begin{bmatrix} \det(z\mathbf{E}_{n-1} - \mathbf{P}_{11}^T) \\ z \det(z\mathbf{E}_{n-1} - \mathbf{P}_{22}^T) - \det(z\mathbf{E}_n - \mathbf{D}_{21}) \\ \dots \\ z \det(z\mathbf{E}_{n-1} - \mathbf{P}_{nn}^T) - \det(z\mathbf{E}_n - \mathbf{D}_{n1}) \end{bmatrix}, \quad (20)$$

$$\mathbf{A}_2(z) = \begin{bmatrix} z \det(z\mathbf{E}_{n-1} - \mathbf{P}_{11}^T) - \det(z\mathbf{E}_n - \mathbf{D}_{12}) \\ \det(z\mathbf{E}_{n-1} - \mathbf{P}_{22}^T) \\ \dots \\ z \det(z\mathbf{E}_{n-1} - \mathbf{P}_{nn}^T) - \det(z\mathbf{E}_n - \mathbf{D}_{n2}) \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{A}_n(z) = \begin{bmatrix} z \det(z\mathbf{E}_{n-1} - \mathbf{P}_{11}^T) - \det(z\mathbf{E}_n - \mathbf{D}_{1n}) \\ z \det(z\mathbf{E}_{n-1} - \mathbf{P}_{22}^T) - \det(z\mathbf{E}_n - \mathbf{D}_{2n}) \\ \dots \\ \det(z\mathbf{E}_{n-1} - \mathbf{P}_{nn}^T) \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Здесь $\text{adj}(\dots)$ — обозначение присоединенной характеристической матрицы; структуры матриц $\mathbf{P}_{ii}^T \quad \forall i = \overline{1, n}$ и $\mathbf{D}_{ij} \quad \forall i = \overline{1, n}, \quad \forall j = \overline{1, n}, \quad i \neq j$ пояснены ранее.

Для формирования всей матрицы \mathbf{V} берется любой из столбцов присоединенной матрицы $\text{adj}(z\mathbf{E}_n - \mathbf{P}^T)$. Например, для первого столбца:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^{(1)} & \mathbf{v}_1^{(2)} & \dots & \mathbf{v}_1^{(n)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1^{(1)} = \mathbf{A}_1(z) \Big|_{z=1}, \quad \mathbf{v}_1^{(2)} = \mathbf{A}_1(z) \Big|_{z=z_2}, \quad \dots, \quad \mathbf{v}_1^{(n)} = \mathbf{A}_1(z) \Big|_{z=z_n}. \quad (22)$$

Далее определяется матрица преобразования $\mathbf{VZ}_1\mathbf{V}^{-1}$.

Пример 1. Исследование МЦ „циклического“ типа. Рассматривается однородная МЦ, описывающая поведение технической системы с графом, изображенным на рис. 1.

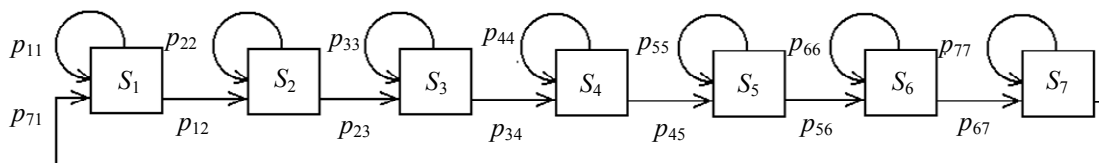


Рис. 1

Данная система описывается математической моделью в виде МПВ и ВНРВ следующей структуры:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0,9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0,9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0,9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0,9 \\ 0,9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Необходимо найти функцию вероятности $P_1(k)$ при заданных условиях, получить оценку для границы существования установившегося режима, сравнить средние и стационарные значения вероятности на различных интервалах функционирования МЦ.

Матрица \mathbf{P} (\mathbf{P}^T) имеет следующие собственные значения:

$$\begin{aligned} z_1 &= 1, \\ z_{2,3} &= \lambda_1 \pm j\omega_1 = 0,661 \pm j0,704, \\ z_{4,5} &= \lambda_2 \pm j\omega_2 = -0,1 \pm j0,877, \\ z_{6,7} &= \lambda_3 \pm j\omega_3 = -0,711 \pm j0,39. \end{aligned}$$

Задача исследования сводится к анализу единственного оператора

$$\Phi_{11}(z) = \frac{P_1(z)}{P_1(0)} = \frac{\det(z\mathbf{E}_6 - \mathbf{P}_{11}^T)}{\det(z\mathbf{E}_7 - \mathbf{P}^T)} = \frac{B_{11}(z)}{A(z)},$$

поскольку

$$P_1(k) = Z^{-1}[\Phi_{11}(z)P_1(0)] = |P_1(0) = 1| = Z^{-1}[\Phi_{11}(z)].$$

Далее находятся необходимые характеристики (размерности фазовых величин — радианы):

$$B_{11}(z) = \det(z\mathbf{E}_6 - \mathbf{P}_{11}^T) = z^6 - 0,6z^5 + 0,15z^4 - 0,02z^3 + 0,0015z^2 - 0,00006z + 0,000001,$$

$$A(z) = \det(z\mathbf{E}_7 - \mathbf{P}^T) = (z-1)(z^2 - 1,322z + 0,932)(z^2 + 0,2z + 0,78)(z^2 + 1,422z + 0,658),$$

$$C_1(k) = \left[\frac{B_{11}(z)}{A(z)} \cdot (z-1) \right]_{z=z_1=1} z_1^k = c_1 \cdot z_1^k = 0,143 \cdot 1^k = 0,143.$$

Для пары корней $z_{2,3} = \lambda_1 \pm j\omega_1 = 0,661 \pm j0,704$:

$$d_{(2,3)} = \sqrt{\lambda_1^2 + \omega_1^2} = 0,966, \quad \varphi_{(2,3)} = \arctg\left(\left|\frac{\omega_1}{\lambda_1 - 1}\right|\right) = 1,122, \quad \varphi_{0(2,3)} = \arctg\left(\frac{\omega_1}{\lambda_1}\right) = 0,817,$$

$$\Phi_{11(2,3)}^y(z) = \Phi_{11}(z)(z-z_2)(z-z_3)(z-1) = \frac{B_{11}(z)}{(z^2 + 0,2z + 0,78)(z^2 + 1,422z + 0,658)},$$

$$\Phi_{11(2,3)}^y(\lambda_1 + j\omega_1) = \Phi_{11(2,3)}^y(z) \Big|_{z=\lambda_1 + j\omega_1} = -0,141 - j0,068,$$

$$d_{11(2,3)} = \frac{1}{\omega_1} \cdot \frac{|-0,141 - j0,068|}{\sqrt{(1-\lambda_1)^2 + \omega_1^2}} = 0,286, \quad \Delta\varphi_{11(2,3)} = \arg(-0,141 - j0,068) = -2,693,$$

$$\varphi_{11(2,3)} = \varphi_{(2,3)} + \Delta\varphi_{11(2,3)} = -1,571,$$

$$\tilde{P}_{2,3}(k) = -d_{11(2,3)} d_{(2,3)}^k \sin(\varphi_{0(2,3)}k + \varphi_{11(2,3)}) = -0,286 \cdot 0,966^k \sin(0,817k - 1,571).$$

Для пары корней $z_{4,5} = \lambda_2 \pm j\omega_2 = -0,1 \pm j0,877$:

$$d_{(4,5)} = \sqrt{\lambda_2^2 + \omega_2^2} = 0,883, \quad \varphi_{(4,5)} = \arctg\left(\left|\frac{\omega_2}{\lambda_2 - 1}\right|\right) = 0,673, \quad \varphi_{0(4,5)} = \pi - \arctg\left(\left|\frac{\omega_2}{\lambda_2}\right|\right) = 1,685,$$

$$\Phi_{11(4,5)}^y(z) = \Phi_{11}(z)(z - z_4)(z - z_5)(z - 1) = \frac{B_{11}(z)}{(z^2 - 1,322z + 0,932)(z^2 + 1,422z + 0,658)},$$

$$\Phi_{11(4,5)}^y(\lambda_2 + j\omega_2) = \Phi_{11(4,5)}^y(z) \Big|_{z = \lambda_2 + j\omega_2} = -0,22 - j0,276,$$

$$d_{11(4,5)} = \frac{1}{\omega_2} \cdot \frac{|-0,22 - j0,276|}{\sqrt{(1-\lambda_2)^2 + \omega_2^2}} = 0,286, \quad \Delta\varphi_{11(4,5)} = \arg(-0,22 - j0,276) = -2,244,$$

$$\varphi_{11(4,5)} = \varphi_{(4,5)} + \Delta\varphi_{11(4,5)} = -1,571,$$

$$\tilde{P}_{4,5}(k) = -d_{11(4,5)} d_{(4,5)}^k \sin(\varphi_{0(4,5)}k + \varphi_{11(4,5)}) = -0,286 \cdot 0,883^k \sin(1,685k - 1,571).$$

Для пары корней $z_{6,7} = \lambda_3 \pm j\omega_3 = -0,711 \pm j0,39$:

$$d_{(6,7)} = \sqrt{\lambda_3^2 + \omega_3^2} = 0,811, \quad \varphi_{(6,7)} = \arctg\left(\left|\frac{\omega_3}{\lambda_3 - 1}\right|\right) = 0,224, \quad \varphi_{0(6,7)} = \pi - \arctg\left(\left|\frac{\omega_3}{\lambda_3}\right|\right) = 2,639,$$

$$\Phi_{11(6,7)}^y(z) = \Phi_{11}(z)(z - z_6)(z - z_7)(z - 1) = \frac{B_{11}(z)}{(z^2 - 1,322z + 0,932)(z^2 + 0,2z + 0,78)},$$

$$\Phi_{11(6,7)}^y(\lambda_3 + j\omega_3) = \Phi_{11(6,7)}^y(z) \Big|_{z = \lambda_3 + j\omega_3} = -0,044 - j0,191,$$

$$d_{11(6,7)} = \frac{1}{\omega_3} \cdot \frac{|-0,044 - j0,191|}{\sqrt{(1-\lambda_3)^2 + \omega_3^2}} = 0,286, \quad \Delta\varphi_{11(6,7)} = \arg(-0,044 - j0,191) = -1,795,$$

$$\varphi_{11(6,7)} = \varphi_{(6,7)} + \Delta\varphi_{11(6,7)} = -1,571,$$

$$\tilde{P}_{6,7}(k) = -d_{11(6,7)} d_{(6,7)}^k \sin(\varphi_{0(6,7)}k + \varphi_{11(6,7)}) = -0,286 \cdot 0,811^k \sin(2,639k - 1,571).$$

Таким образом, искомая функция вероятности имеет вид

$$P_1(k) = 0,143 - 0,286 \cdot 0,966^k \sin(0,817k - 1,571) - 0,286 \cdot 0,883^k \sin(1,685k - 1,571) - 0,286 \cdot 0,811^k \sin(2,639k - 1,571).$$

Тактовое время затухания по составляющей, обусловленной доминирующей парой $z_{2,3} = \lambda_1 \pm j\omega_1 = 0,661 \pm j0,704$, с округлением до ближайшего большего целого

$$\begin{aligned} \tilde{k}_{(2,3)} &= \left[\ln 0,05 + \ln c_1 - \ln d_{11(2,3)} \right] / \ln d_{(2,3)} = \\ &= (\ln 0,05 + \ln 0,143 - \ln 0,286) / \ln 0,966 = 105,14 \rightarrow 106 \end{aligned}$$

объективно отражает развитие МЦ во времени (рис. 2).

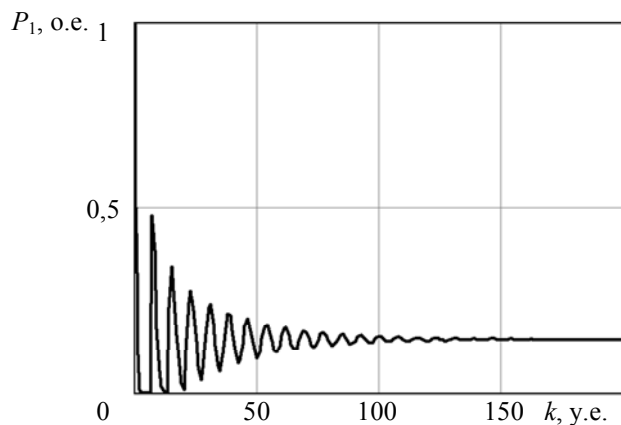


Рис. 2

Простой анализ представленной огибающей функции $P_1(k)$ показывает, что в зависимости от интервала функционирования МЦ использование установившегося значения вероятности $P_1(\infty) = 0,143$ может привести к существенным погрешностям при оценке тех или иных характеристик (показателей пропускной способности, коэффициента технической и/или оперативной готовности и т.д.). При этом очевидно: чем меньше интервал, тем больше ошибка.

В частности, при $k = 0 — 10$ среднее значение вероятности $\bar{P}_1(0 — 10) = \left[\sum_{k=0}^{10} P_1(k) \right] / 11 = 0,2$ оказывается почти на 40,1 % больше стационарного, а при $k = 0 — 100$ оно больше, но только на 6,2 % ($\bar{P}_1(0 — 100) = \left[\sum_{k=0}^{100} P_1(k) \right] / 101 = 0,148$).

Для найденных собственных значений $z_1 = 1$, $z_2 = \lambda_1 + j\omega_1 = 0,661 + j0,704$, $z_3 = \lambda_1 - j\omega_1 = 0,661 - j0,704$, $z_4 = \lambda_2 + j\omega_2 = -0,1 + j0,877$, $z_5 = \lambda_2 - j\omega_2 = -0,1 - j0,877$, $z_6 = \lambda_3 + j\omega_3 = -0,711 + j0,39$, $z_7 = \lambda_3 - j\omega_3 = -0,711 - j0,39$ использование первого столбца $\mathbf{A}_1(z)$ присоединенной матрицы $\text{adj}(z\mathbf{E}_7 - \mathbf{P}^T)$, построенного по второй формуле (20), приводит к следующим матрицам собственных векторов и установившегося решения:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0,531 & 0,331 - j0,415 & 0,331 + j0,415 & -0,118 - j0,518 & -0,118 + j0,518 & -0,479 - j0,231 & -0,479 + j0,231 \\ 0,531 & -0,118 - j0,518 & -0,118 + j0,518 & -0,479 + j0,231 & -0,479 - j0,231 & 0,331 + j0,415 & 0,331 - j0,415 \\ 0,531 & -0,479 - j0,231 & -0,479 + j0,231 & 0,331 + j0,415 & 0,331 - j0,415 & -0,118 - j0,518 & -0,118 + j0,518 \\ 0,531 & -0,479 + j0,231 & -0,479 - j0,231 & 0,331 - j0,415 & 0,331 + j0,415 & -0,118 + j0,518 & -0,118 - j0,518 \\ 0,531 & -0,118 + j0,518 & -0,118 - j0,518 & -0,479 - j0,231 & -0,479 + j0,231 & 0,331 - j0,415 & 0,331 + j0,415 \\ 0,531 & 0,331 + j0,415 & 0,331 - j0,415 & -0,118 + j0,518 & -0,118 - j0,518 & -0,479 + j0,231 & -0,479 - j0,231 \\ 0,531 & 0,531 & 0,531 & 0,531 & 0,531 & 0,531 & 0,531 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{VZ}_1\mathbf{V}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,143 & 0,143 & 0,143 & 0,143 & 0,143 & 0,143 & 0,143 \\ 0,143 & 0,143 & 0,143 & 0,143 & 0,143 & 0,143 & 0,143 \\ 0,143 & 0,143 & 0,143 & 0,143 & 0,143 & 0,143 & 0,143 \\ 0,143 & 0,143 & 0,143 & 0,143 & 0,143 & 0,143 & 0,143 \\ 0,143 & 0,143 & 0,143 & 0,143 & 0,143 & 0,143 & 0,143 \\ 0,143 & 0,143 & 0,143 & 0,143 & 0,143 & 0,143 & 0,143 \\ 0,143 & 0,143 & 0,143 & 0,143 & 0,143 & 0,143 & 0,143 \end{bmatrix}.$$

Пример 2. Обоснование требований к эффективности работы ремонтного органа по критерию пригодности по значению вероятности работоспособного состояния. Рассматривается техническая система, граф которой представляет однородную МЦ, изображенную на рис. 3.

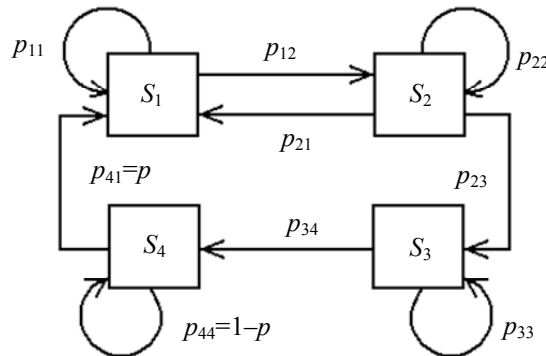


Рис. 3

Работоспособному состоянию системы соответствует S_1 . При поломке система переходит в состояние S_2 с возможностью устранения неисправности своими силами (возврат в состояние S_1). В случае серьезной аварии система эвакуируется (состояние S_3) и при доставке в ремонтный орган восстанавливается (состояние S_4). При этом требуется обосновать величину показателя эффективности восстановления — вероятности $p_{41} = p$ — исходя из заданного значения средней вероятности $\bar{P}_1(0...10) \geq 0,5$ на интервале функционирования $k = 0—10$.

В качестве исходных данных заданы МПВ и ВНРВ

$$P = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,4 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,1 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0,9 \\ p & 0 & 0 & 1-p \end{bmatrix}, P(0) = \begin{bmatrix} 0,9 \\ 0 \\ 0 \\ 0,1 \end{bmatrix}.$$

Рассматривается вариация параметра $p_{41} = p$ от 0,1 до 0,95. Возьмем для иллюстрации крайние точки. При $p = 0,1$ определяем изображение вероятности (собственные значения: $z_1 = 1, z_2 = 0,717, z_3 = -0,203, z_4 = 0,186$):

$$P_1(z) = \Phi_{11}(z)P_1(0) + \Phi_{14}(z)P_4(0) = \frac{0,9z^3 - 0,98z^2 + 0,169z - 0,008}{(z-1)(z-0,717)(z+0,203)(z-0,186)}.$$

Далее

$$C_1(k) = \left[\frac{0,9z^3 - 0,98z^2 + 0,169z - 0,008}{(z-0,717)(z+0,203)(z-0,186)} \Big|_{z=z_1} \right] z_1^k = c_1 \cdot z_1^k = 0,292 \cdot 1^k = 0,292,$$

$$C_2(k) = \left[\frac{0,9z^3 - 0,98z^2 + 0,169z - 0,008}{(z-1)(z+0,203)(z-0,186)} \Big|_{z=z_2} \right] z_2^k = c_2 \cdot z_2^k = 0,426 \cdot 0,717^k,$$

$$C_3(k) = \left[\frac{0,9z^3 - 0,98z^2 + 0,169z - 0,008}{(z-1)(z-0,717)(z-0,186)} \Big|_{z=z_3} \right] z_3^k = c_3 \cdot z_3^k = 0,21 \cdot (-0,203)^k,$$

$$C_4(k) = \left[\frac{0,9z^3 - 0,98z^2 + 0,169z - 0,008}{(z-1)(z-0,717)(z+0,203)} \Big|_{z=z_4} \right] z_4^k = c_4 \cdot z_4^k = -0,028 \cdot 0,186^k,$$

$$P_1(k) = 0,292 + 0,426 \cdot 0,717^k + 0,21 \cdot (-0,203)^k - 0,028 \cdot 0,186^k.$$

Тактовое время затухания по составляющей, обусловленной доминирующим корнем $z_2 = 0,717$, с округлением до ближайшего большего целого

$$k_+ = (\ln 0,05 + \ln c_1 - \ln c_2) / \ln |z_2| = 10,14 \rightarrow 11.$$

Среднее значение вероятности работоспособного состояния на заданном интервале

$$\bar{P}_1(0-10) = \left[\sum_{k=0}^{10} P_1(k) \right] / 11 = 0,438.$$

Соответственно при $p = 0,95$ собственные значения:

$$z_1 = 1, z_{2,3} = \lambda \pm j\omega = 0,168 \pm j0,505, z_4 = -0,486;$$

$$P_1(z) = \Phi_{11}(z)P_1(0) + \Phi_{14}(z)P_4(0) = \frac{0,9z^3 - 0,13z^2 - 0,001z + 0,0005}{(z-1)(z^2 - 0,336z + 0,283)(z + 0,486)},$$

$$C_1(k) = \left[\frac{0,9z^3 - 0,13z^2 - 0,001z + 0,0005}{(z^2 - 0,336z + 0,283)(z + 0,486)} \right]_{z=z_1} z_1^k = c_1 \cdot z_1^k = 0,547 \cdot 1^k = 0,547,$$

$$d = \sqrt{\lambda^2 + \omega^2} = 0,532, \varphi = \arctg\left(\left|\frac{\omega}{\lambda-1}\right|\right) = 0,545, \varphi_0 = \arctg\left(\frac{\omega}{\lambda}\right) = 1,25,$$

$$\Phi_1^y(z) = \Phi_1(z)(z-z_2)(z-z_3)(z-1) = \frac{0,9z^3 - 0,13z^2 - 0,001z + 0,0005}{z + 0,486},$$

$$\Phi_1^y(\lambda + j\omega) = \Phi_1^y(z) \Big|_{z=\lambda + j\omega} = -0,152 - j0,035, d_1 = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{|-0,152 - j0,035|}{\sqrt{(1-\lambda)^2 + \omega^2}} = 0,318,$$

$$\Delta\varphi_1 = \arg(-0,152 - j0,035) = -2,912, \varphi_1 = \varphi + \Delta\varphi_1 = -2,367,$$

$$\tilde{P}_{2,3}(k) = -d_1 d^k \sin(\varphi_0 k + \varphi_1) = -0,318 \cdot 0,532^k \sin(1,25k - 2,367),$$

$$C_4(k) = \left[\frac{0,9z^3 - 0,13z^2 - 0,001z + 0,0005}{(z-1)(z^2 - 0,336z + 0,283)} \right]_{z=z_4} z_4^k = c_4 \cdot z_4^k = 0,131 \cdot (-0,486)^k,$$

$$P_1(k) = 0,547 - 0,318 \cdot 0,532^k \sin(1,25k - 2,367) + 0,131 \cdot (-0,486)^k.$$

Тактовое время затухания по составляющей, обусловленной доминирующей парой $z_{2,3} = \lambda \pm j\omega = 0,168 \pm j0,505$, с округлением до ближайшего большего целого

$\tilde{k} = (\ln 0,05 + \ln c_1 - \ln d_1) / \ln d = 3,887 \rightarrow 4$. Среднее значение на заданном интервале

$$\bar{P}_1(0-10) = \left[\sum_{k=0}^{10} P_1(k) \right] / 11 = 0,583.$$

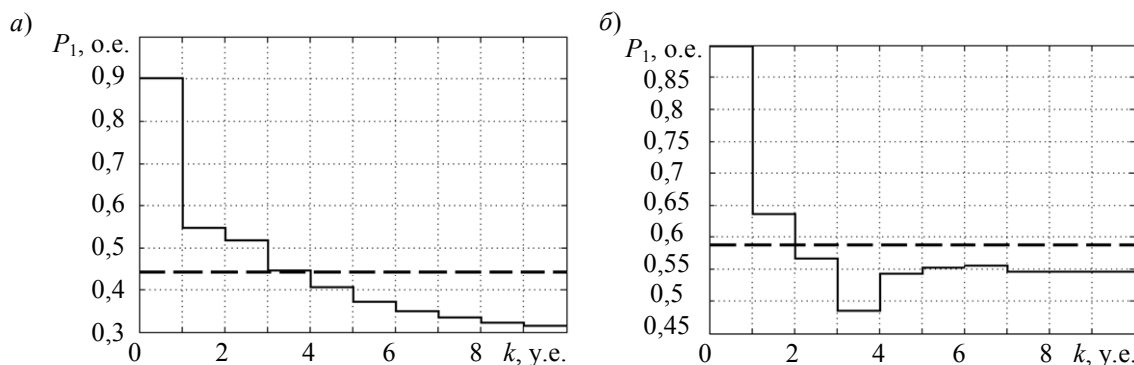


Рис. 4

ских процессах с непрерывным временем для времени установления применяются, как правило, оценки исключительно на основе корней без учета соответствующих констант, дающие весьма грубые результаты [8, 13].

Дополнение к получению установившегося решения позволяет строить матрицу собственных векторов и получать стационарные значения вероятностей с помощью алгоритма разветвления характеристического определителя.

Автор выражает признательность рецензенту за продуктивные замечания, способствовавшие улучшению содержания статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977. 485 с.
2. Вентцель Е. С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. М.: КноРус, 2010. 190 с.
3. Нуммелин Э. Общие неприводимые цепи Маркова и неотрицательные операторы. М.: Мир, 1989. 208 с.
4. Фурман Я. А., Юрьев А. Н., Янишин В. В. Цифровые методы обработки и распознавания бинарных изображений. Красноярск: Изд-во Краснояр. ун-та, 1992. 245 с.
5. Harrison P. G. Transient Behaviour of Queueing Networks // J. Appl. Prob. 1981. Vol. 18, N 2. P. 482—490.
6. Dudin A. N., Karolik A. V. BMAP/SM/1 Queue with Markovian Input of Disasters and Non-instantaneous Recovery // Performance Evaluat. 2001. Vol. 45, N 1. P. 19—32.
7. Dharmaraja S., Rakesh Kumar. Transient solution of a Markovian queueing model with heterogeneous servers and catastrophes // OPSEARCH. 2015. Vol. 52, N 4. P. 810—826.
8. Kumar B. K., Madheshwari S. P., Venkatakrisnanan K. S. Transient solution of an M/M/2 queue with heterogeneous servers subject to catastrophes // Intern. J. Inform. Management Sci. 2017. Vol. 18, N 1. P. 63—80.
9. Миллер А. Б., Миллер Б. М., Степанян К. В. Одновременное импульсное и непрерывное управление марковской цепью в непрерывном времени // Автоматика и телемеханика. 2020. № 3. С. 114—131. DOI: 10.31857/S0005231020030071.
10. Вытовтов К. А., Барабанова Е. А. Аналитический метод анализа неоднородных непрерывных марковских процессов с кусочно-постоянными интенсивностями перехода // Автоматика и телемеханика. 2021. № 12. С. 91—104. DOI: 10.31857/S0005231021120060.
11. Куо Б. Теория и проектирование цифровых систем управления / Пер. с англ. В. Г. Дунаева; под ред. П. И. Попова. М.: Машиностроение, 1986. 448 с.
12. Джюри Э. Импульсные системы автоматического регулирования / Пер. с англ. М. А. Берманта, Ж. Л. Грина. М.: Физматгиз, 1963. 455 с.
13. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Физматгиз, 1960. 654 с.
14. Теория автоматического управления: Учеб. для вузов по спец. „Автоматика и телемеханика“. В 2-х ч. Ч. I. Теория линейных систем автоматического управления / Н. А. Бабаков, А. А. Воронов, А. А. Воронова и др.; Под ред. А. А. Воронова. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Высш. шк., 1986. 367 с.
15. Земсков А. В. Метод получения матрицы передаточных функций на ЭВМ // Изв. вузов. Приборостроение. 1989. Т. 32, № 11. С. 20—22.
16. Земсков В. А., Земсков А. В. Метод определения фундаментальных матриц в непрерывных и дискретных системах автоматического управления и его практические приложения // Аналитическая теория автоматического управления и ее приложения: Тр. междунар. науч. конф. Саратов: СГТУ, 2000. С. 17—20.
17. Golub G. H. & Uhlig F. The QR algorithm: 50 years later – its genesis by John Francis and Vera Kublanovskaya, and subsequent developments // IMA Journal of Numerical Analysis. 2009. Vol. 29, N 3. P. 467—485. ISSN 0272-4979.
18. Земсков А. В. Метод выборочного поиска для собственных векторов матриц и его практические приложения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1998. Т. 38, № 3. С. 365—375.
19. Bellman R. E. Adaptive Control Processes. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1961. 276 p.

20. Langville A. N., Meyer C. D. *Google's PageRank and beyond: the science of search engine rankings*. Princeton University Press, 2006. 224 p.

Сведения об авторе

Алексей Викторович Земсков

— д-р техн. наук, профессор; Государственный университет морского и речного флота им. адмирала С. О. Макарова, кафедра математического моделирования и прикладной информатики; профессор;
E-mail: aleksei.zemskov@yandex.ru

Поступила в редакцию 23.06.2023; одобрена после рецензирования 21.08.2023; принята к публикации 27.10.2023.

REFERENCES

1. Tikhonov V.I., Mironov M.A. *Markovskiye protsessy* (Markov Processes), Moscow, 1977, 485 p. (in Russ.)
2. Ventzel E.S. *Issledovaniye operatsiy: zadachi, printsipy, metodologiya* (Operations Research: Objectives, Principles, Methodology), Moscow, 2010, 190 p. (in Russ.)
3. Nummelin E. *General Irreducible Markov Chains and Non-Negative Operators*, Cambridge etc., 1984, 156 p.
4. Furman Ya.A., Yuryev A.N., Yanshin V.V. *Tsifrovyye metody obrabotki i raspoznavaniya binarnykh izobrazheniy* (Digital Methods of Processing and Recognition of Binary Images), Krasnoyarsk, 1992, 245 p. (in Russ.)
5. Harrison P.G. *J. Appl. Prob.*, 1981, no. 2(18), pp. 482–490.
6. Dudin A.N., Karolik A.V. *Performance Evaluat.*, 2001, no. 1(45), pp. 19–32.
7. Dharmaraja S., Rakesh Kumar, *OPSEARCH*, 2015, no. 4(52), pp. 810–826.
8. Kumar B. Krishna, Madheshwari S. Pavai, Venkatakrisnanan K.S. *Int. J. Inform. Management Sci.*, 2017, no. 1(18), pp. 63–80.
9. Miller A.B., Miller B.M., and Stepanyan K.V. *Automation and Remote Control*, 2020, no. 3, pp. 469–482, DOI: 10.31857/S0005231020030071.
10. Vytovtov K.A. and Barabanova E.A. *Automation and Remote Control*, 2021, no. 12, pp. 2112–2124, DOI: 10.31857/S0005231021120060.
11. Kuo B.C. *Digital Control Systems*, NY, Chicago, San Francisco, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1980.
12. Jury E.J. *Sampled-Data Control Systems*, NY, Wiley, London, Chapman and Hall, 1958.
13. Faddeev D.K., Faddeeva V.N. *Vychislitel'nyye metody lineynoy algebrы* (Computational Methods of Linear Algebra), Moscow, 1960, 654 p. (in Russ.)
14. Babakov N.A., Voronov A.A., Voronova A.A. et al. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya. Ch. I. Teoriya lineynykh sistem avtomaticheskogo upravleniya* (Theory of Automatic Control. Part I. Theory of Linear Systems of Automatic Control), Moscow, 1986, 367 p. (in Russ.)
15. Zemskov A.V. *Journal of Instrument Engineering*, 1989, no. 11(32), pp. 20–22. (in Russ.)
16. Zemskov V.A., Zemskov A.V. *Analiticheskaya teoriya avtomaticheskogo upravleniya i yeye prilozheniya* (Analytical Theory of Automatic Control and Its Applications), Proceedings of the International Scientific Conference, Saratov, 2000, pp. 17–20. (in Russ.)
17. Golub G.H. & Uhlig F. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 2009, no. 3(29), pp. 467–485.
18. Zemskov A.V. *Computational Mathematical and Mathematical Physics*, 1998, no. 3(38), pp. 351–361.
19. Bellman R.E. *Adaptive Control Processes*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1961, 276 p.
20. Langville A.N., Meyer C.D. *Google's PageRank and beyond: the science of search engine rankings*, Princeton University Press, 2006, 224 p.

Data on author

Alexey V. Zemskov

— Dr. Sci., Professor; Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping, Department of Mathematical Modeling and Applied Computer Science; Professor;
E-mail: aleksei.zemskov@yandex.ru

Received 23.06.2023; approved after reviewing 21.08.2023; accepted for publication 27.10.2023.