

БЫСТРОЕ ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДЛЯ РАВНОМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МОБИЛЬНЫХ РОБОТОВ

Д. А. Галкина*, К. А. Зименко, Д. Е. Коновалов, А. А. Маргун

Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия,

* da.galkina@itmo.ru

Аннотация. Рассматривается задача синтеза алгоритма быстрого децентрализованного управления для равномерного распределения группы мобильных роботов, составляющих мультиагентную систему, на заданном отрезке. Цель исследования — синтез алгоритма группового финитного управления для достижения распределенного консенсуса и его последующая экспериментальная апробация. Используемый метод основан на теории однородности и методе неявной функции Ляпунова. Критерии устойчивости для мультиагентной системы заданы в виде решения системы линейных матричных неравенств. В отличие от существующего метода, предложенный подход позволяет ослабить критерии устойчивости, упрощая настройку и применение алгоритма, а также эффективно анализировать динамику системы и гарантировать достижение консенсуса за конечное время. Теоретические результаты экспериментально подтверждены с помощью IP-камеры и 4 колесных роботов. Эксперименты продемонстрировали высокую эффективность предложенного подхода, что подтверждает его применимость для задач управления в реальных условиях.

Ключевые слова: финитное управление, групповое управление, мультиагентные системы, распределенный консенсус, однородные системы, колесные роботы

Благодарности: исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, проект № FSER-2025-0002.

Ссылка для цитирования: Галкина Д. А., Зименко К. А., Коновалов Д. Е., Маргун А. А. Быстрое децентрализованное управление для равномерного распределения мобильных роботов // Изв. вузов. Приборостроение. 2025. Т. 68, № 5. С. 406–416. DOI: 10.17586/0021-3454-2025-68-5-406-416.

FAST DECENTRALIZED CONTROL FOR UNIFORM DISTRIBUTION OF MOBILE ROBOTS

D. A. Galkina*, K. A. Zimenko, D. E. Konovalov, A. A. Margun

ITMO University, St. Petersburg, Russia

* da.galkina@itmo.ru

Abstract: The problem of synthesizing a fast decentralized control algorithm for uniform distribution of a group of mobile robots making up a multi-agent system, over a given straight line segment is considered. The aim of the study is to synthesize a group finite control algorithm to achieve distributed consensus and subsequently test it experimentally. The method used is based on the homogeneity theory and the implicit Lyapunov function method. The stability criteria for a multi-agent system are specified as a solution to a system of linear matrix inequalities. Unlike the existing method, the proposed approach allows weakening the stability criteria, simplifying the setup and application of the algorithm, as well as effectively analyzing the system dynamics and guaranteeing consensus in a finite time. The theoretical results are experimentally confirmed using an IP camera and 4 wheeled robots. The experiments demonstrated high efficiency of the proposed approach, which confirms its applicability to control problems in real conditions.

Keywords: finite control, group control, multi-agent systems, distributed consensus, homogeneous systems, wheeled robots

Acknowledgements: the study was carried out with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project no. FSER-2025-0002).

For citation: Galkina D. A., Zimenko K. A., Konovalov D. E., Margun A. A. Fast decentralized control for uniform distribution of mobile robots. *Journal of Instrument Engineering*. 2025. Vol. 68, N 5. P. 406–416 (in Russian). DOI: 10.17586/0021-3454-2025-68-5-406-416.

Введение. Исследования в области группового управления роботами и мультиагентными системами (МАС) активно развиваются на протяжении более пяти десятилетий и интерес к этой области не ослабевает. В последние годы благодаря стремительному развитию технологий роботизированные системы стали неотъемлемой частью многих сфер человеческой деятельности. Существующая литература по данной тематике охватывает как фундаментальные исследования, посвященные общим принципам функционирования МАС [1–3], так и узкоспециализированные работы, рассматривающие конкретные аспекты их применения [4–6].

Одной из главных причин интереса к мультиагентным системам является их способность значительно увеличивать площадь и скорость выполнения задач по сравнению с одиночными роботами. Также, как отмечается в работе [7], вероятность успешного выполнения задачи с использованием одного робота значительно ниже, чем при использовании группы роботов. Это становится особенно критичным в экстремальных условиях, таких как ликвидация аварий или работа в опасных средах.

Особое внимание в современных исследованиях уделяется задачам, где критически важны временные рамки и высокая точность выполнения операций. В таких случаях применение классических методов управления часто оказывается недостаточным, поэтому целесообразно использовать финитные алгоритмы, которые гарантируют достижение целей за конечное время и обеспечивают повышенную точность их выполнения [8, 9]. Применение финитных протоколов (алгоритмов управления формацией) позволяет не только повысить скорость и точность выполнения операций МАС, но и обеспечить ряд робастных свойств, необходимых на практике при наличии возмущений, шумов измерений и запаздывания (см., например, [10–12]). Именно синтезу алгоритма группового финитного управления и посвящена настоящая статья.

В статье используются следующие обозначения: $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, где \mathbb{R} — множество вещественных чисел; $0_{m \times n}$ — нулевая $m \times n$ -матрица; $1, \tilde{m}$ — последовательность целых чисел $1, \dots, m$; \otimes — произведение Кронекера; $e_i(s) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \overset{i\text{-й}}{1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^s, s \geq 1$, — вектор канонического базиса \mathbb{R}^s ; отношение порядка $P > 0$ (< 0 ; ≥ 0 ; ≤ 0) для $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ означает, что матрица P симметрична и положительно (отрицательно) определена (полуопределена).

Финитная устойчивость. Рассмотрим систему вида

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), x(0) = x_0, t \geq 0, \quad (1)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — нелинейное непрерывное векторное поле, $f(0) = 0$.

О п р е д е л е н и е 1 [8, 9]. Система (1) глобально финитно устойчива в начале координат, если она глобально равномерно асимптотически устойчива, и существует локально ограниченная функция $T: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$, такая что любое решение $x(t, x_0)$ системы (1) для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет $x(t, x_0) = 0 \forall t \geq T(x_0)$. Функция T называется функцией времени установления.

Следующая теорема описывает применение метода неявной функции Ляпунова [13, 14] для анализа финитной устойчивости.

Теорема 1. Если существует непрерывная функция

$$\begin{aligned} Q: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (V, x) &\mapsto Q(V, x), \end{aligned}$$

такая что:

- C₁) функция $Q(V, x)$ непрерывно дифференцируемая $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и $\forall V \in \mathbb{R}_+$;
- C₂) для любого $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ существуют $\forall V^- \in \mathbb{R}_+$ и $\forall V^+ \in \mathbb{R}_+$, такие что $Q(V^-, x) < 0 < Q(V^+, x)$;
- C₃) для $\Omega = \{(V, x) \in \mathbb{R}^{(n+1)} : Q(V, x) = 0\}$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (V, x) \in \Omega}} V = 0^+, \quad \lim_{\substack{V \rightarrow 0^+ \\ (V, x) \in \Omega}} \|x\| = 0, \quad \lim_{\substack{\|x\| \rightarrow \infty \\ (V, x) \in \Omega}} V = +\infty;$$

С₄) неравенство $-\infty < \frac{\partial Q(V, x)}{\partial V} < 0$ выполняется $\forall V \in \mathbb{R}_+$ и $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$;

С₅) неравенство $\frac{\partial Q(V, x)}{\partial x} f(x) \leq \sigma V^{1-\mu} \frac{\partial Q(V, x)}{\partial V}$ выполняется $\forall (V, x) \in \Omega$ для некоторых $0 < \mu \leq 1$ и $\sigma \in \mathbb{R}_+$, тогда начало координат системы (1) глобально финитно устойчиво со следующей оценкой времени установления (доказательство см. в [15]):

$$T(x_0) \leq \frac{V_0^\mu}{\sigma \mu},$$

где $V_0 \in \mathbb{R}_+$: $Q(V_0, x_0) = 0$.

Взвешенная однородность. Однородностью принято считать свойство симметрии объекта относительно группы расширений (дилатаций) [16, 17].

Для некоторых $r_i \in \mathbb{R}_+$, $i = 1, n$ и $\lambda > 0$ определим вектор весов $r = [r_1, \dots, r_n]^T$ и матрицу дилатации $D_r(\lambda) = \text{diag}\{\lambda^{r_i}\}_{i=1}^n$.

Определение 2 [18]. Функция $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (векторное поле $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$) будет считаться взвешенно-однородной со степенью $v \in \mathbb{R}$, если

$$\begin{aligned} g(D_r(\lambda)x) &= \lambda^v g(x), \\ (f(D_r(\lambda)x) &= \lambda^v D_r(\lambda)f(x)) \end{aligned}$$

для всех $\lambda > 0$ и $x \in \mathbb{R}^n$. Система $\dot{x} = f(x)$ называется однородной, если функция $f(x)$ является однородной.

Взвешенная однородность является частным случаем линейной геометрической однородности (например, см. [19, 20]). Важно отметить, что свойство однородности обеспечивает наличие робастных свойств по отношению к внешним возмущениям, шумам измерений и запаздыванию [10–12].

Протокол децентрализованного финитного управления для равномерного распределения агентов. Рассматривается задача распределенного консенсуса для МАС, состоящей из n агентов. Предполагается, что каждый агент системы описывается линейной моделью

$$\dot{x}_i = Ax_i + Bu_i + d_i(t, x), \quad i = \overline{1, n}, \quad (2)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$x_i = [x_{i1}, x_{i2}]^T \in \mathbb{R}^2$ — вектор состояния i -го агента, $u_i \in \mathbb{R}$ — управляющее воздействие, $d_i(t, x) \in \mathbb{R}^2$ описывает внешние возмущения и неопределенности; пусть $x_{01}, x_{(n+1)1} \in \mathbb{R}$ обозначают фиксированные конечные точки отрезка.

Таким образом, в данной работе исследуется проблема децентрализованного управления, которое обеспечивает финитное равномерное распределение агентов на заданной прямой между точками $x_{01}, x_{(n+1)1}$, при этом каждый агент использует только собственные состояния и информацию о расстояниях до своих соседей в формации, т. е. $u_i = u_i(x_i, x_{(i-1)1} - x_{i1}, x_{(i+1)1} - x_{i1})$, $i = \overline{1, n}$.

В качестве основы для синтеза предлагается использовать однородный протокол управления из работы [21], решающий задачу распределенного консенсуса:

$$u_i = -k_{i1}[x_{i2}]^{1+v} - k_{i2}[\varphi_i(x)]^{1-v}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3)$$

где $\varphi_i(x) = \frac{1}{2}(x_{i1} - x_{(i-1)1}) + \frac{1}{2}(x_{i1} - x_{(i+1)1})$, $k_{i1}, k_{i2} \in \mathbb{R}_+$, $v \in (-1, 0)$ а критерии устойчивости для МАС (2), (3) представлены в виде решения линейных матричных неравенств (ЛМН). Однако

предлагаемые критерии устойчивости достаточно консервативны, что значительно затрудняет настройку и применение протокола (3).

В настоящей работе предлагаются ослабленные критерии устойчивости для применения рассматриваемого протокола управления (3). Для этого по аналогии с [21] приведем МАС (2), (3) к виду однородной системы с секторными нелинейностями.

Пусть $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ — вектор состояния мультиагентной системы. Тогда динамика системы может быть выражена следующим образом:

$$\dot{x} = A_0 x + A_1 f(Ux - b) + d(t, x),$$

где $A_0 = I_n \otimes A$, $A_1 = I_n \otimes \tilde{A}_i$, $\tilde{A}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -k_{i2} & -k_{i1} \end{bmatrix}$, $d(\cdot, \cdot) = [d_1^T(\cdot, \cdot), d_2^T(\cdot, \cdot), \dots, d_n^T(\cdot, \cdot)]^T \in \mathbb{R}^{2n}$;

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,5 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -0,5 & 0 & 1 & 0 & -0,5 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -0,5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n};$$

$$b = [0,5x_{01}, 0, 0, \dots, 0, 0,5x_{(n+1)1}, 0]^T \in \mathbb{R}^{2n}, f(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_{2n}(x)]^T;$$

$$f_i(x) = \lfloor e_i(2n)(Ux + b) \rfloor^{\gamma_i},$$

$$\gamma_i = \begin{cases} \frac{1+\nu}{1-\nu}, & \text{если } i \text{ нечетное,} \\ 1+\nu, & \text{если } i \text{ четное,} \end{cases} \quad \text{для } i = \overline{1, 2n}.$$

Заметим, что матрица U обратима. Введем новую переменную: $z = x - U^{-1}b$. Так как $A_0 = A_0 U$ (т. е. $A_0 U^{-1} = A_0$), получаем

$$\dot{z} = A_0 z + A_1 f(Uz) + d(t, z - U^{-1}b), z_0 = z(0), \quad (4)$$

где начало координат является равновесной точкой системы (4).

Отметим, что система (4) имеет степень однородности ν с вектором весов

$$r = [1 - \nu, 1, 1 - \nu, 1, \dots, 1 - \nu, 1]^T \in \mathbb{R}^{2n}$$

и соответствующей матрицей дилиции $D_r(\lambda) = \text{diag}\{\lambda^{r_i}\}_{i=1}^{2n}$.

Аналогично введем кандидат неявной функции Ляпунова в виде

$$Q(V, z) = z^T D_r(V^{-1}) P D_r(V^{-1}) z + 2 \sum_{i=1}^{2n} \frac{\Lambda_i}{\gamma_i + 1} |e_i(2n) U D_r(V^{-1}) z|^{\gamma_i + 1} - 1, \quad (5)$$

где $\Lambda = \text{diag}\{\Lambda_i\}_{i=1}^{2n} \in D_+^{2n}$, $P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ — симметричная положительно-полуопределенная матрица.

$$\text{Обозначим } H = \text{diag}\{r_i\}_{i=1}^{2n}, \tilde{\Lambda} = \Lambda \text{diag}\left\{\frac{1}{\gamma_i + 1}\right\}_{i=1}^{2n}.$$

Представим основной результат.

Теорема 2. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}_+$ и $\psi \geq 1$ выбраны так, что система ЛМН

$$P \geq \tilde{U} P U; \quad (6a)$$

$$P + U\Lambda U > 0; \quad (6б)$$

$$PH + HP + 2\psi U\Lambda HU > 0; \quad (6в)$$

$$S \geq \text{diag} \left\{ \left(1 + \psi \right)^{\frac{1}{\gamma_i + 1}} \right\}_{i=1}^{2n}; \quad (6г)$$

$$\beta_1 \geq \text{trace} \left[S \text{diag} \left\{ \left(\frac{\gamma_i}{\psi} \right)^{\frac{2}{1-\gamma_i}} \left(\frac{\psi}{\gamma_i} - \psi \right)^2 \right\}_{i=1}^{2n} \right]; \quad (6д)$$

$$\text{trace}(R) \leq \beta_2; \quad (6е)$$

$$Q_1 + \begin{bmatrix} \alpha_1 Q_2 + Q_3 + \alpha_2 Q_4 + Q_5 & O_{4n \times 2n} \\ O_{2n \times 4n} & O_{2n \times 2n} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (6ж)$$

разрешима относительно $\tilde{\Lambda}$, P , Y , $R \in D_+^{2n}$, P , $\Gamma \geq 0$, $S = \tilde{P} + 2\tilde{\Lambda}$, где для $\tilde{A}_0 = A_0 + \psi A_1 U$ и $X = P + \psi U^T \Lambda U$ справедливо:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} X\tilde{A}_0 + \tilde{A}_0^T X & XA_1 + \tilde{A}_0^T U\Lambda & X \\ \Lambda U\tilde{A}_0 + \tilde{A}_1^T X & \Lambda A_1 + \tilde{A}_1^T \Lambda & \Lambda U \\ X & U\Lambda & -\Gamma \end{bmatrix}; Q_2 = \begin{bmatrix} XH + HX & U\Lambda H \\ H\Lambda U & O_{2n \times 2n} \end{bmatrix};$$

$$Q_3 = \begin{bmatrix} \beta_1(P + 2\psi U\tilde{\Lambda}U) - 2UYU & \beta_1 U\tilde{\Lambda} + UY \\ \beta_1 \tilde{\Lambda}U + YU & -S \end{bmatrix}; Q_4 = \begin{bmatrix} P + 2U\tilde{\Lambda}U & U\tilde{\Lambda} \\ \tilde{\Lambda}U & O_{2n \times 2n} \end{bmatrix};$$

$$Q_5 = \begin{bmatrix} \beta_2 P + 2\beta_2 \psi U\tilde{\Lambda}U + 3\psi^2 R & \beta_2 U\tilde{\Lambda} - \psi R \\ \beta_2 \tilde{\Lambda}U - \psi R & -R \end{bmatrix},$$

и пусть выполняется условие

$$d^T D_r(V^{-1}) \Gamma D_r(V^{-1}) d \leq \alpha_2 V^{2\nu} \quad (7)$$

для всех $V \in \mathbb{R}_+$, таких что $Q(V, x) = 0$. Тогда протокол (3) позволяет решить задачу распределенного консенсуса и обеспечивает равномерное распределение агентов (2) на заданном отрезке $(x_{01}; x_{(n+1)1})$ за конечное время

$$T(z_0) \leq \frac{V_0^{-\nu}}{\alpha_1 \nu},$$

где $V_0 \in \mathbb{R}_+$, такое что $Q(V_0, z_0) = 0$.

Доказательство. В [21] было показано, что неравенства (6а) и (6б) гарантируют выполнение условий C_1 , C_2 и C_3 теоремы 1. Поскольку

$$u_i D_r(V^{-1}) x f_i(u_i D_r(V^{-1}) x) \geq \psi_i (u_i D_r(V^{-1}) x)^2, \quad i = \overline{1, l},$$

где u_i — i -я строка матрицы U , то при выполнении условия (6в) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial V} &= -V^{-1} x^T D_r(V^{-1}) (PH + HP) D_r(V^{-1}) x - 2V^{-1} \sum_{i=1}^l \Lambda_i u_i H D_r(V^{-1}) x f_i(u_i D_r(V^{-1}) x) = \\ &= -V^{-1} x^T D_r(V^{-1}) (PH + HP) D_r(V^{-1}) x - 2V^{-1} \sum_{i=1}^l \Lambda_i r_i u_i D_r(V^{-1}) x f_i(u_i D_r(V^{-1}) x), \\ \frac{\partial Q}{\partial V} &\leq -V^{-1} x^T D_r^T(V^{-1}) (PH + HP + 2U\Lambda H \Psi U) D_r(V^{-1}) x < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \end{aligned} \quad (8)$$

т. е. выполняется условие C_4 теоремы 1.

В соответствии с [21] перепишем уравнения (4), (5) в следующем виде:

$$\dot{z} = (A_0 + A_1 \Psi U)z + A_1 \hat{f}(Uz) + d(t, z - U^{-1}b), \quad (9)$$

$$Q(V, z) = -1 + z^T D_r(V^{-1}) X D_r(V^{-1}) z + 2 \sum_{i=1}^{2n} \Lambda_i \left(\frac{1}{\gamma_i + 1} |e_i(2n) U D_r(V^{-1}) z|^{\gamma_i + 1} - \frac{1}{2} (e_i(2n) \Psi U D_r(V^{-1}) z)^2 \right), \quad (10)$$

где $\hat{f}(Uz) = f(Uz) - \Psi Uz$, $\Psi \in D_+^{2n}$, $X = P + U^T \Lambda \Psi U$ при $\Psi = \psi I_{2n}$, $\psi \in \mathbb{R}_+$.

Тогда $\tilde{A}_0 = A_0 + \psi A_1 U$, $U A_1 = A_1$ и, используя свойство однородности, получаем

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = V^\nu \left\{ \begin{bmatrix} y \\ V^{-\nu} D_r(V^{-1}) d \end{bmatrix}^T Q_1 \begin{bmatrix} y \\ V^{-\nu} D_r(V^{-1}) d \end{bmatrix} + V^{-2\nu} d^T D_r(V^{-1}) \Gamma d D_r(V^{-1}) d \right\}, \quad (11)$$

где

$$y = \begin{bmatrix} D_r(V^{-1}) z \\ \hat{f}(U D_r V^{-1}) z \end{bmatrix}, \quad V \in \mathbb{R}_+: Q(V, z) = 0.$$

Также было показано, что $y^T Q_3 y \geq 0$ и $y^T Q_4 y \geq 0$ справедливо при выполнении неравенств (6г) и (6д).

В целях ослабления условий в виде ЛМН проведем дополнительный анализ нелинейностей $\hat{f}(U D_r V^{-1}) z$, $i = 1, 2n$. Определим $\tilde{z}_i = e_i(2n) U D_r(V^{-1}) z$. Согласно выражению (6а) из (5) имеем

$$\sum_{i=1}^{2n} \tilde{P}_i \tilde{z}_i^2 + 2 \frac{\Lambda_i}{\gamma_i + 1} |\tilde{z}_i^{\gamma_i + 1}| \leq 1$$

и $|\tilde{z}_i| \leq 1$ согласно (6г), где $\tilde{P}_i \in \mathbb{R}_+$, $\tilde{P} = \text{diag}\{\tilde{P}_i\}_{i=1}^{2n}$.

Заметим, что из (11) для $V \in \mathbb{R}_+$, когда $Q(V, z) = 0$, имеем

$$1 = z^T D_r(V^{-1}) P D_r(V^{-1}) z + 2 z^T D_r(V^{-1}) U \tilde{\Lambda} \hat{f}(U D_r(V^{-1}) z) = y^T \begin{bmatrix} P + 2\psi U \tilde{\Lambda} U & U \tilde{\Lambda} \\ \tilde{\Lambda} U & O_{2n \times 2n} \end{bmatrix} y. \quad (12)$$

Пусть $R = \text{diag}\{\tilde{P}_i\}_{i=1}^{2n}$, где $R_i \in \mathbb{R}_+$. Тогда, поскольку $(|\tilde{z}_i|^{\gamma_i} \text{sgn}(\tilde{z}_i) - \psi \tilde{z}_i)^2 \leq 1 - \psi \tilde{z}_i$, для $\psi \geq 1$ и $\tilde{z}_i \leq 1$ с учетом (12) получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2n} R_i [\hat{f}_i(\tilde{z}_i)]^2 &\leq \sum_{i=1}^{2n} R_i (1 - 2\psi \tilde{z}_i + \psi \tilde{z}_i^2) \leq \sum_{i=1}^{2n} R_i (1 - 2\psi \tilde{z}_i \hat{f}_i(\tilde{z}_i) + \psi^2 \tilde{z}_i^2) = \\ &= \sum_{i=1}^{2n} R_i (1 - 2\psi \tilde{z}_i \hat{f}_i(\tilde{z}_i) + 3\psi^2 \tilde{z}_i^2) \leq \beta_2 + \sum_{i=1}^{2n} R_i (-2\psi \tilde{z}_i \hat{f}_i(\tilde{z}_i) + 3\psi^2 \tilde{z}_i^2) = \beta_2 + y^T \begin{bmatrix} 3\psi^2 R & -\psi R \\ -\psi R & O_{2n \times 2n} \end{bmatrix} = \\ &= y^T \begin{bmatrix} \beta_2 P + 2\beta_2 \psi U \tilde{\Lambda} U + 3\psi^2 R & \beta_2 U \tilde{\Lambda} - \psi R \\ \beta_2 \tilde{\Lambda} U - \psi R & O_{2n \times 2n} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

т. е. $y^T Q_5 y \geq 0$.

Тогда, возвращаясь к (11), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial z} &\leq V^\nu \left\{ \begin{bmatrix} y \\ V^{-\nu} D_r(V^{-1}) d \end{bmatrix}^T \left(Q_1 + \begin{bmatrix} \alpha_1 Q_2 + Q_3 + \alpha_2 Q_4 + Q_5 & O_{4n \times 2n} \\ O_{2n \times 4n} & O_{2n \times 2n} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} y \\ V^{-\nu} D_r(V^{-1}) d \end{bmatrix} + \right. \\ &\quad \left. + V^{-2\nu} d^T D_r(V^{-1}) \Gamma d D_r(V^{-1}) d - \alpha_2 - \alpha_1 V \frac{\partial Q}{\partial V} \right\} \leq -\alpha_1 V^{1+\nu} \frac{\partial Q}{\partial V}, \end{aligned}$$

что означает выполнение условия C_5 теоремы 1. Таким образом, все условия теоремы 1 выполняются, что подтверждает способность протокола (3) обеспечить финитное равномерное распределение агентов на заданном отрезке за конечное время

$$T(z_0) \leq -\frac{V_0^{-\nu}}{\alpha_1 \nu},$$

где $V_0 \in \mathbb{R}_+$, такое что $Q(V_0, z_0) = 0$. Это, в свою очередь, в точности соответствует утверждению, предложенному в теореме 2, и завершает доказательство.

Замечание. Основные отличия рассмотренных критериев устойчивости от критериев, предложенных ранее, заключаются в неравенстве (6в) и дополнительном использовании матрицы Q_5 в неравенстве (6ж). Неравенство (6в) гарантирует выполнение условия C_4 теоремы 1 и является значительно менее ограничительным, чем неравенства $PH + HP \geq 0$, $U\Lambda U + \iota_2(PH + HP)$ для некоторого $\iota_2 \in \mathbb{R}_+$. Так как матрица A_1 недиагонально-устойчива, то компонент $\Lambda A_1 + A_1^T \Lambda$, входящий в Q_1 , не может быть отрицательно-определенным. На основе дополнительного анализа нелинейностей, присутствующих в системе, была сформирована матрица Q_5 , которая, как и Q_3 , используется для ослабления требований к матрице A_1 , позволяя обеспечить разрешимость неравенства (6ж).

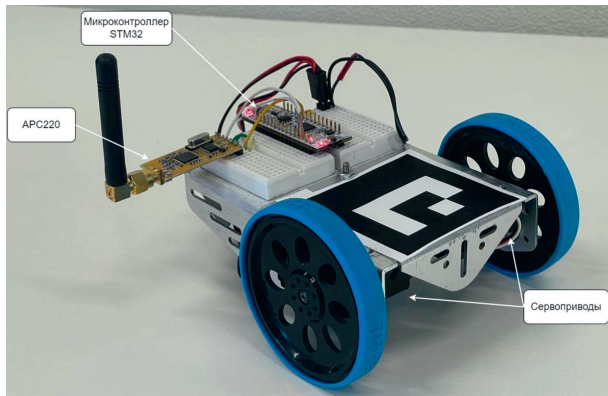


Рис. 1

линейная скорость робота i . Модель робота описывается относительно линейного (l) и углового (θ) перемещений следующим образом:

$$\begin{aligned} l &= \frac{\omega_l + \omega_r}{2} R; \quad \theta = \frac{\omega_l - \omega_r}{2} \frac{R}{D}, \\ \omega_l &= -\frac{1}{T} \omega_l + \frac{k}{T} u_l; \quad \omega_r = -\frac{1}{T} \omega_r + \frac{k}{T} u_r, \end{aligned} \quad (13)$$

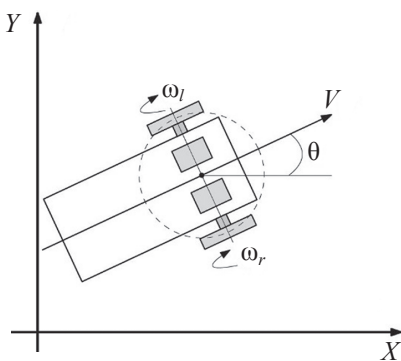


Рис. 2

где ω_l , ω_r — скорости вращения левого и правого колес соответственно, R — радиус колес, D — расстояние между колесами, u_l и u_r — управляющие сигналы для левого и правого сервоприводов соответственно, T и k — коэффициенты динамики сервопривода.

Для чистоты апробации протокола управления в данном эксперименте модель колесного робота рассматривается исключительно в динамике по одной оси с одновременным поступлением сигнала управления на оба сервопривода. В таком случае, выбрав управляющее воздействие для i -го агента как $U_i = -\frac{1}{0,01} v_{Y,i} + R \frac{1}{0,01} u_{us,i}$, где $U_i = u_{r,i} = u_{l,i}$, $v_{Y,i}$ — скорость

агента i по оси Y , $R = 3,4$ см (для робота, представленного на рис. 1), получим модель при движении по оси Y :

$$\dot{y}_i = v_{Y,i}, \quad \dot{v}_{Y,i} = u_{us,i}, \quad (14)$$

где y_i — положение агента i по оси Y .

Тогда финитный протокол управления (3) принимает вид:

$$u_{us,i} = -k_{i,1}|v_{Y,i}|^{1+\nu} \text{sgn}(v_{Y,i}) - k_{i,2}|\varphi_i(y)|^{\frac{1+\nu}{1-\nu}} \text{sgn}(\varphi_i(y)), \quad (15)$$

где $y = [y_0, y_1, \dots, y_n, y_{n+1}]$, y_1, \dots, y_n — положения агентов вдоль оси Y , а y_0, y_{n+1} представляют задаваемые координаты, между которыми должны равномерно расположиться колесные роботы.

Согласно данной стратегии для каждого агента рассматриваются ближайшие координаты по правую и левую стороны, между которыми должен находиться робот.

Описание эксперимента. Схема проводимого эксперимента приведена на рис. 3, где агенты условно представлены в виде треугольников, над которыми находится IP-камера. Цель протокола заключается в равномерном распределении роботов между задаваемыми двумя координатами (им соответствуют крайние элементы \boxtimes на рис. 3). При этом каждый робот, помимо собственного вектора состояния, получает информацию только о положении соседних агентов и о заданных координатах (для крайних агентов).

В рамках эксперимента проведем сравнение разработанного финитного протокола с линейным, представленным в [22] в виде

$$u_{us,i} = -k_{i,1}|v_{Y,i}| - k_{i,2}|\varphi_i(y)|. \quad (16)$$

Для проведения эксперимента были выбраны 4 робота. Для описанного протокола управления все агенты размещены по направлению движения вдоль оси Y . Изображение, формируемое камерой, с отображением номера каждого агента представлено на рис. 4. Для набора из 4 роботов задаются координаты крайних точек y_0 и y_5 .

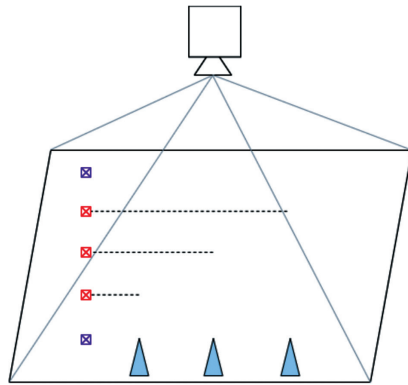


Рис. 3

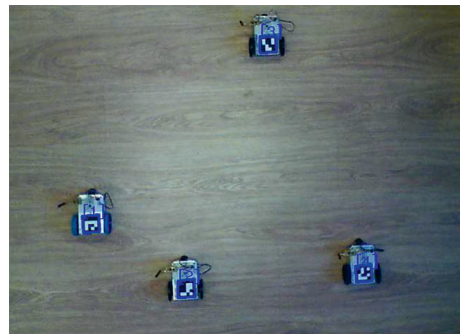


Рис. 4

В данном случае состояние каждого агента y_i определяется по данным с IP-камеры и представляет собой положение робота в пикселях. Цель управления задается также в пикселях, в рамках данного эксперимента выбраны следующие параметры цели управления: $y_0 = 50$, $y_5 = 400$. Тогда значения, к которым протокол управления должен обеспечить сходимость координат каждого агента, представляются в виде $y_{\text{целое}} = [120, 190, 260, 330]$ для соответствующих агентов $[y_1, y_2, y_3, y_4]$. В качестве начального положения роботов выбрано их размещение на прямой в точке $y = 450$.

На рис. 5, а, б представлены полученные в ходе экспериментальной апробации графики переходных процессов линейного (а) и финитного (б) протоколов управления для расположенных

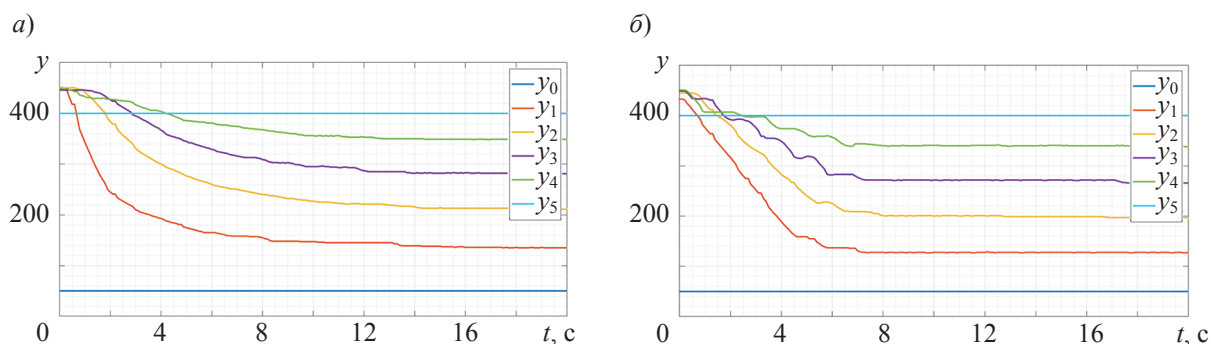


Рис. 5

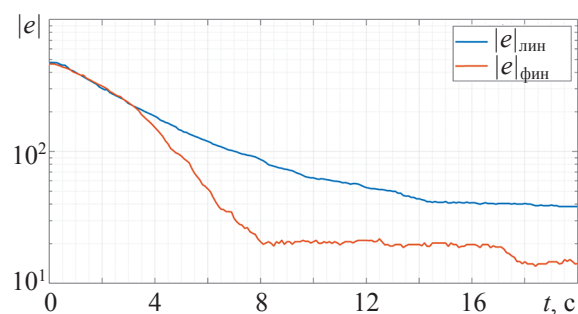


Рис. 6

на одной линии агентов при $k_{i,1} = k_{i,2} = 1$, $\nu = -0,5$. Для данных роботов действует ограничение амплитуды управляющего сигнала в диапазоне $[-50; 50]$. Также представлена норма ошибок на рис. 6. Как видно из результатов экспериментальной апробации, финитный протокол позволяет значительно увеличить как скорость сходимости, так и точность.

Заключение. Предложено решение задачи равномерного распределения группы мобильных роботов на заданном отрезке прямой за конечный временной промежуток. Для этого был выбран

алгоритм финитного группового управления, в котором критерии устойчивости для мульти-агентной системы представлены в виде решения ЛМН, которые вследствие своей консервативности затрудняли настройку и применение алгоритма. Поэтому были предложены новые, ослабленные критерии устойчивости, позволяющие проводить более эффективный анализ динамики мультиагентной системы, а также упростить процедуру настройки алгоритма. В целях проверки работоспособности алгоритма с новыми критериями устойчивости была проведена экспериментальная апробация. В качестве экспериментальной установки были задействованы IP-камера и 4 колесных робота, решающие задачу распределенного консенсуса. Эксперименты продемонстрировали высокую эффективность предложенного подхода, что подтверждает его применимость для задач управления в реальных условиях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ossowski S. Coordination in multi-agent systems: Towards a technology of agreement // Lecture Notes in Computer Science. 2008. Vol. 5244 LNAI. P. 2–12.
2. Zakiev A., Tsoy T., Magid E. Swarm robotics: Remarks on terminology and classification // Lecture Notes in Computer Science. 2018. Vol. 11097 LNAI. P. 291–300.
3. Timm I. J., Scholz T., Herzog O., Krempels K. H., Spaniol O. From Agents to Multiagent Systems // Multiagent Engineering: Theory and Applications in Enterprises. Springer Berlin Heidelberg, 2006. P. 35–51.
4. Desai J. P., Ostrowski J., Kumar V. Controlling formations of multiple mobile robots // Proc. IEEE Intern. Conf. on Robotics and Automation. 1998. Vol. 4. P. 2864–2869.
5. Vorotnikov S., Ermishin K., Nazarova A., Yuschenko A. Multi-agent robotic systems in collaborative robotics // Lecture Notes in Computer Science. 2018. Vol. 11097 LNAI. P. 270–279.
6. Huet M. P. Communication in Multiagent Systems: Agent Communication Languages and Conversation Policies. Springer Berlin Heidelberg, 2003. 322 p.
7. Belta C., Kumar V. Abstraction and control for groups of robots // IEEE Trans. on Robotics. 2004. Vol. 20. P. 865–875.
8. Bhat S. P., Bernstein D. S. Finite-time stability of continuous autonomous systems // SIAM Journal on Control and Optimization. 2000. Vol. 38, N. 3. P. 751–766.

9. Orlov Y. Finite time stability and robust control synthesis of uncertain switched systems // *SIAM Journal of Control and Optimization*. 2004. Vol. 43, N 4. P. 1253–1271.
10. Bernuau E., Polyakov A., Efimov D., Perruquetti W. Verification of ISS, iISS and IOSS properties applying weighted homogeneity // *System and Control Letters*. 2013. Vol. 62, N. 12. P. 1159–1167.
11. Efimov D., Polyakov A., Perruquetti W. Richard J. P. Weighted homogeneity for time-delay systems: Finite-time and independent of delay stability // *IEEE Trans. Automatic Control*. 2016. Vol. 61, N 1. P. 210–215.
12. Zimenko K., Efimov D., Polyakov A., Perruquetti W. A note on delay robustness for homogeneous systems with negative degree // *Automatica*. 2017. Vol. 79. P. 178–184.
13. Коробов В. И. Решение задачи синтеза с помощью функции управляемости // Докл. АН СССР. 1979. Т. 248, № 5. С. 236–244.
14. Adamy J., Flemming A. Soft variable-structure controls: a survey // *Automatica*. 2004. Vol. 40. P. 1821–1844.
15. Polyakov A., Efimov D., Perruquetti W. Finite-time and fixed-time stabilization: Implicit Lyapunov function approach // *Automatica*. 2015. Vol. 51. P. 332–340.
16. Polyakov A. Generalized homogeneity in systems and control. Springer, 2020. 447 p.
17. Зубов В. И. О системах обыкновенных дифференциальных уравнений с обобщенно-однородными правыми частями // Изв. вузов. Математика. 1958. № 1. С. 80–88.
18. Zubov V. I. Methods of A.M. Lyapunov and Their Applications. Leiden: Noordhoff, 1964. 263 p.
19. Zimenko K., Polyakov A., Efimov D., Perruquetti W. Robust feedback stabilization of linear MIMO systems using generalized homogenization // *IEEE Trans. on Automatic Control*. 2020. Vol. 65, N 12. P. 5429–5436.
20. Polyakov A. Sliding mode control design using canonical homogeneous norm // *Intern. Journal of Robust and Nonlinear Control*. 2019. Vol. 29, N. 3. P. 682–701.
21. Zimenko K., Efimov D., Polyakov A., Ping X. Finite-time control protocol for uniform allocation of second-order agents // 62nd IEEE Conf. on Decision and Control (CDC). 2023. P. 1427–1431.
22. Parsegov S., Proskurnikov A. Uniform deployment of second-order agents on a line segment // Proc. of 6th Intern. Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT). 2014. P. 631–636.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Дарья Алексеевна Галкина

— аспирант; Университет ИТМО, факультет систем управления и робототехники; E-mail: da.galkina@itmo.ru

Константин Александрович Зименко

— канд. техн. наук; Университет ИТМО, факультет систем управления и робототехники; доцент; E-mail: konstantin.zimenko@itmo.ru

Дмитрий Евгеньевич Коновалов

аспирант; Университет ИТМО, факультет систем управления и робототехники; E-mail: dekonovalov@itmo.ru

Алексей Анатольевич Маргун

канд. техн. наук; Университет ИТМО, факультет систем управления и робототехники; доцент; E-mail: aamargun@itmo.ru

Поступила в редакцию 15.01.25; одобрена после рецензирования 17.01.25; принята к публикации 27.03.25.

REFERENCES

1. Ossowski S. *Lecture Notes in Computer Science* (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics), 2008, vol. 5244 LNAI, pp. 2–12.
2. Zakiev A., Tsoy T., Magid E. *Lecture Notes in Computer Science* (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics), 2018, vol. 11097 LNAI, pp. 291–300.
3. Timm I.J., Scholz T., Herzog O., Krempels K.H., Spaniol O. *Multiagent Engineering: Theory and Applications in Enterprises*, Berlin Heidelberg, Springer, 2006, pp. 35–51.
4. Desai J.P., Ostrowski J., Kumar V. *Proc. IEEE Intern. Conf. on Robotics and Automation*, 1998, vol. 4, pp. 2864–2869.
5. Vortnikov S., Ermishin K., Nazarova A., Yuschenko A. *Lecture Notes in Computer Science* (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics), 2018, vol. 11097 LNAI, pp. 270–279.
6. Huet M.P. *Communication in Multiagent Systems: Agent Communication Languages and Conversation Policies*, Berlin Heidelberg, Springer, 2003, 322 p.
7. Belta C., Kumar V. *IEEE Transactions on Robotics*, 2004, vol. 20, pp. 865–875.
8. Bhat S.P., Bernstein D.S. *SIAM Journal on Control and optimization*, 2000, no. 3(38), pp. 751–766.
9. Orlov Y. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 2004, no. 4(43), pp. 1253–1271.
10. Bernuau E., Polyakov A., Efimov D., Perruquetti W. *System and Control Letters*, 2013, no. 12(62), pp. 1159–1167.
11. Efimov D., Polyakov A., Perruquetti W. Richard J.P. *IEEE Trans. Automatic Control*, 2016, no. 1(61), pp. 210–215.

12. Zimenko K., Efimov D., Polyakov A., Perruquetti W. *Automatica*, 2017, vol. 79, pp. 178–184.
13. Korobov V.I. Soviet Physics. *Doklady*, 1979, no. 5(248), pp. 236–244. (in Russ.)
14. Adamy J., Flemming A. *Automatica*, 2004, vol. 40, pp. 1821–1844.
15. Polyakov A., Efimov D., Perruquetti W. *Automatica*, 2015, vol. 51, pp. 332–340.
16. Polyakov A. *Generalized homogeneity in systems and control*, Springer, 2020, 447 p.
17. Zubov B.I. Izvestiya Vysshih Uchebnyh Zavedenij. *Matematika*, 1958, no. 1, pp. 80–88. (in Russ.)
18. Zubov V.I. Methods of A.M. *Lyapunov and Their Applications*, Noordhoff, Leiden, 1964, 263 p.
19. Zimenko K., Polyakov A., Efimov D., Perruquetti W. *IEEE Transact. on Automatic Control*, 2020, no. 12(65), pp. 5429–5436.
20. Polyakov A. *Intern. J. of Robust and Nonlinear Control*, 2019, no. 3(29), pp. 682–701.
21. Zimenko K., Efimov D., Polyakov A., Ping X. *62nd IEEE Conf. on Decision and Control (CDC)*, 2023, pp. 1427–1431.
22. Parsegov S., Proskurnikov A. *Proc. of 6th Intern. Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT)*, 2014, pp. 631–636.

DATA ON AUTHORS

- | | |
|------------------------------|--|
| Daria A. Galkina | — Post-Graduate Student; ITMO University, Faculty of Control Systems and Robotics; E-mail: da.galkina@itmo.ru |
| Konstantin A. Zimenko | — PhD; ITMO University, Faculty of Control Systems and Robotics; Associate Professor; E-mail: konstantin.zimenko@itmo.ru |
| Dmitry E. Konovalov | — Post-Graduate Student; ITMO University, Faculty of Control Systems and Robotics; E-mail: dekonovalov@itmo.ru |
| Alexey A. Margun | — PhD; ITMO University, Faculty of Control Systems and Robotics; Associate Professor; E-mail: aamargun@itmo.ru |

Received 15.01.25; approved after reviewing 17.01.25; accepted for publication 27.03.25.