ПРИБОРЫ И СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

УДК 62.50

Л. В. Кожевникова, А. В. Ушаков

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПЕРЕМНОЖЕНИЕМ ПЕРЕМЕННЫХ НА ОСНОВЕ КРОНЕКЕРОВСКИХ МАТРИЧНЫХ СТРУКТУР

Рассматривается задача исследования процессов в динамических системах с перемножением переменных. Для указанных целей используются возможности кронекеровских векторных и матричных структур. Задача решается применительно к системам с амплитудной модуляцией.

Ключевые слова: *динамическая система, перемножение переменных, кронекеровские матричные структуры.*

Введение. Постановка задачи исследования динамических систем с перемножением переменных, на первый взгляд, может показаться экзотической, однако класс таких систем достаточно широк. В первую очередь, это системы, работающие на переменном токе, или, иначе, системы с амплитудно-фазовой модуляцией [1—3].

Системы управления и следящие системы с модуляцией составляют заметную часть практики автоматического управления. Модуляторами в таких системах являются: сельсины, поворотные трансформаторы, индуктивные датчики, полудисковые модуляторы лучистой энергии и т.д. [1—3]. Однако теоретические исследования процессов в системах с модуляцией в последнее время заметно сократились, причем это произошло на фоне интенсификации внедрения в теорию и практику исследования динамических систем метода пространства состояния [4].

Свойства векторных и матричных кронекеровских структур. Для понимания сформулированной выше проблемы приведем определения векторных и матричных кронекеровских структур, а также описание тех их свойств, которые непосредственно связаны с построением векторно-матричных модельных представлений процессов с модуляцией.

Определение 1. Кронекеровским произведением векторов (КПВ) x и y, $x \in R^n$, $y \in R^m$, называется вектор $x \otimes y$, составленный из отдельных произведений $\left\{x_i y_j;\ i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m}\right\}$ их элементов, так что становится справедливым представление

$$x \otimes y = \mathrm{col}\{x_i y_j;\ i=\overline{1,n};\quad j=\overline{1,m}\},\ x \otimes y \in R^{nm},$$

при этом КПВ некоммутативны, и $x \otimes y \neq y \otimes x$.

Определение 2. Если размерности векторов x и y одинаковы, то на их кронекеровском произведении $x \otimes y$ может быть построено согласованное сужение этого произведения $(x \otimes y)_s$, задаваемого представлением $\left(x \otimes y\right)_s = \mathrm{col}\{x_i y_i;\ i=\overline{1,n}\}$.

Согласованное сужение кронекеровского векторного произведения $x\otimes y$ может быть осуществлено с помощью оператора сужения с матрицей S вида

$$S=\mathrm{diag}\{[0_{1\times(i-1)} \vdots\ 1\ \vdots\ 0_{1\times(n-i)}];\ i=\overline{1,n}\},$$

так что становится справедливой запись

$$(x\otimes y)_s=S(x\otimes y).$$

Рассмотрим свойства кронекеровского произведения векторов.

Свойство 1. Дифференцирование кронекеровской структуры в виде КПВ осуществляется по правилам дифференцирования сложной функции, представленной в мультикативной форме:

$$\frac{d}{dt}(x(t)\otimes y(t))\overset{\Delta}{=}\dot{x}(t)\otimes y(t)+x(t)\otimes\dot{y}(t).$$

Определение 3. Кронекеровским произведением матриц (КПМ) $A\in R^{n\times m}$, $B\in R^{p\times q}$ называется матрица $A\otimes B$ размерности $np\times mq$, определяемая соотношением

$$A\otimes B=\mathrm{col}\{\mathrm{row}(A_{ij}B;\ j=\overline{1,m});\ i=\overline{1,n}\}.$$

Кронекеровское произведение произвольных прямоугольных матриц не обладает коммутативностью, так что $A\otimes B\neq B\otimes A$.

Задача конструирования матричной модели динамических процессов с модуляцией в своей основе использует квадратные матрицы, коими являются матрицы состояния системы, конечномерного источника внешнего воздействия и конечномерного источника модулирующего сигнала, поэтому далее рассматривается только класс квадратных матриц.

Определение 4. Кронекеровской суммой матриц (КСМ) $A\in R^{n\times n}$ и $B\in R^{m\times m}$ называется матрица $A\oplus B$, размерности $nm\times nm$, определяемая соотношением

$$A\oplus B=A\otimes I_B+I_A\otimes B,$$

где I_A, I_B — единичные матрицы, согласованные по размерности соответственно с матрицами A и B.

Для КСМ A и B, а в общем случае произвольного числа матриц, существует альтернативное название — преобразование Сильвестра $\mathrm{Si}(A, B)$, что записывается в форме

$$A\oplus B\overset{\Delta}{=}A\otimes I_B+I_A\otimes B\overset{\Delta}{=}\mathrm{Si}\{A,B\}.$$

Для трех квадратных матриц A, B, D кронекеровская сумма или их преобразование Сильвестра определяется как

$$\mathrm{Si}\{A,B,D\}=A\oplus B\oplus D=A\otimes I_B\otimes I_D+I_A\otimes B\otimes I_D+I_A\otimes I_B\otimes D.$$

Отметим, что, как и КПМ, кронекеровская сумма матриц некоммутативна.

Кронекеровские матричные структуры, введенные выше, обладают следующими свойствами.

Свойство 2. Алгебраические спектры собственных значений кронекеровского произведения $A\otimes B$ квадратных матриц $A\in R^{n\times n}$ и $B\in R^{m\times m}$ и их кронекеровской суммы $A\oplus B$ как матричных функций от матриц обладают следующим свойством: элементы первого алгебраического спектра образованы попарными произведениями собственных значений кронекеровски перемножаемых матриц:

$$\sigma\{A\otimes B\}=\{\mu_k:\det(\mu I-A\otimes B)=0;\ \mu_k=\lambda_{A_i}\lambda_{B_j};\ i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m};\ k=\overline{1,mn}\}, \tag{1}$$

элементы второго алгебраического спектра образованы попарными суммами собственных значений кронекеровски суммируемых матриц:

$$\sigma\{A\oplus B\}=\{\nu_l:\det(\nu I-A\oplus B)=0;\ \nu_l=\lambda_{A_i}+\lambda_{B_j};\ i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m};\ l=\overline{1,mn}\}. \tag{2}$$

В выражениях (1) и (2) λ_{A_i} и λ_{B_j} — собственные значения матриц A и B соответственно.

Следует заметить, что алгебраические спектры собственных значений кронекеровских произведений $A \otimes B$ и $B \otimes A$ в соответствии с выражением (1) совпадают, аналогичным свойством в силу соотношения (2) обладают и спектры кронекеровских сумм $A \oplus B$ и $B \oplus A$.

Свойство 3. Определитель КПМ матриц $A \in R^{n \times n}$ и $B \in R^{m \times m}$ удовлетворяет соотношению

$$\det(A \otimes B) = (\det A)^m (\det B)^n .$$

Свойство 4. След КСМ матриц $A \in R^{n \times n}$ и $B \in R^{m \times m}$ удовлетворяет соотношению

$$\mathrm{tr}(A \oplus B) = m\, \mathrm{tr} A + n\, \mathrm{tr} B .$$

Свойство 5. Ранг КПМ матриц $A \in R^{n \times n}$ и $B \in R^{m \times m}$ удовлетворяет условию

$$\mathrm{rang}(A \otimes B) = \mathrm{rang} A \ \mathrm{rang} B .$$

Для решения поставленной задачи полезно напомнить [5] основные свойства кронекеровских произведений произвольных матриц, что необходимо при преобразованиях матричных композиций, содержащих в своем составе эти произведения.

Свойство 6.

$$(P \otimes Q)(W \otimes V) = PW \otimes QV . \tag{3}$$

Свойство 7.

$$(P + Q) \otimes R = P \otimes R + Q \otimes R ; \tag{4}$$

$$P \otimes (Q + R) = P \otimes Q + P \otimes R , \tag{5}$$

$$P \otimes (Q \otimes R) = (P \otimes Q) \otimes R . \tag{6}$$

В выражениях (3)—(6) матрицы P, Q, R, W, V имеют произвольные размерности, не противоречащие правилам перемножения и сложения матриц.

Свойство 8.

$$P \otimes Q = (P \otimes I_Q)(I_P \otimes Q) ; \tag{7}$$

$$(P_1 \otimes Q_1)(P_2 \otimes Q_2) \cdots (P_R \otimes Q_K) = (P_1 P_2 \cdots P_K) \otimes (Q_1 Q_2 \cdots Q_K) ; \tag{8}$$

$$(P \otimes Q)^{-1} = P^{-1} \otimes Q^{-1} , \tag{9}$$

$$I \otimes (P_1 P_2 \cdots P_K) = (I_{P_1} \otimes P_1)(I_{P_2} \otimes P_2) \cdots (I_{P_K} \otimes P_K) . \tag{10}$$

В выражениях (7)—(10) $I_{(*)}$ — единичная матрица, по размерности согласованная с матрицей (*).

Свойство 9. Оператор сужения с матрицей S кронекеровского произведения векторов PX, QZ удовлетворяет соотношению

$$S(Px \otimes Qz) = S(P \otimes Q)(x \otimes z) .$$

Основной результат. Воспользуемся приведенными свойствами векторных и матричных кронекеровских структур для построения динамической модели процессов в линейной многомерной непрерывной системе с амплитудной модуляцией. При построении модели процессов будем полагать, что источник внешнего воздействия (ИВВ) является конечномерным и может быть представлен автономной системой; будем полагать, что и модулирующий сигнал также является конечномерным, поэтому источник модулирующего сигнала (ИМС) тоже может быть представлен автономной системой. Таким образом, полное исходное описание задачи приобретает следующий вид:

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gv(t);\ x(0);\ y(t) = Cx(t) ; \tag{11}$$

$$\dot{z}(t) = \Gamma z(t);\ z(0);\ g(t) = Hz(t) ; \tag{12}$$

$$\dot{z}_{\text{м}}(t) = \Gamma_{\text{м}} z_{\text{м}}(t);\ z_{\text{м}}(0);\ g_{\text{м}}(t) = H_{\text{м}} z_{\text{м}}(t) . \tag{13}$$

В модели (11) многомерной непрерывной системы x — вектор состояния; v — вектор внешнего воздействия; y — вектор выхода; $x \in R^n$; $v, y \in R^m$; F, G, C — матрицы состояния, входа и выхода соответственно, $F \in R^{n\times n}$; C^T, $G \in R^{m\times m}$.

В модели (12) источника внешнего воздействия z и g — векторы состояния и выхода ИВВ соответственно; $z \in R^l$; $g \in R^m$; Γ, H — матрицы состояния и выхода; $\Gamma \in R^{l\times l}$; $H \in R^{m\times l}$.

В модели (13) источника модулирующего сигнала $z_{\text{м}}$ и $g_{\text{м}}$ — векторы состояния и выхода ИМС соответственно; $z_{\text{м}} \in R^k$; $g_{\text{м}} \in R^m$; $\Gamma_{\text{м}}$, $H_{\text{м}}$ — матрицы состояния и выхода ИМС; $\Gamma_{\text{м}} \in R^{k\times k}$; $H_{\text{м}} \in R^{m\times k}$.

Процесс формирования модулированного внешнего воздействия $v(t)$ представим в виде

$$v(t) = \mathrm{col}\{g_j(t) g_{\text{м}\,j}(t);\ j = \overline{1,m}\}. \tag{14}$$

Нетрудно видеть, что процесс модуляции внешнего воздействия в форме (14) допускает представление его в виде кронекеровского произведения векторов с последующим сужением, т.е.

$$v(t) = S(g(t) \otimes g_{\text{м}}(t)). \tag{15}$$

Учитывая правила формирования векторов $g(t)$ и $g_{\text{м}}(t)$ (см. формулы (12) и (13)), выражение (15) в силу свойств кронекеровских произведений матриц можно записать в виде

$$v(t) = S(g(t) \otimes g_{\text{м}}(t)) = S(Hz(t) \otimes H_{\text{м}} z_{\text{м}}(t)) = S(H \otimes H_{\text{м}})(z(t) \otimes z_{\text{м}}(t)). \tag{16}$$

Выражение (16) представляет модулированный сигнал $v(t)$ как функцию состояния системы с вектором состояния $z(t) \otimes z_{\text{м}}(t)$.

Сформируем систему, описывающую процесс по данному вектору состояния, опираясь на модели (12) и (13), а также на свойства матричных кронекеровских структур. В результате получим следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(z(t) \otimes z_{\text{м}}(t)) \overset{\Delta}{=} \dot z(t) \otimes z_{\text{м}}(t) + z(t) \otimes \dot z_{\text{м}}(t) = \\ &= \Gamma z(t) \otimes z_{\text{м}}(t) + z(t) \otimes \Gamma_{\text{м}} z_{\text{м}}(t) = (\Gamma \otimes I_{\Gamma_{\text{м}}} + I_{\Gamma} \otimes \Gamma_{\text{м}})(z(t) \otimes z_{\text{м}}(t)) = \\ &= (\Gamma \oplus \Gamma_{\text{м}})(z(t) \otimes z_{\text{м}}(t)), \quad z(0) \otimes z_{\text{м}}(0). \end{aligned} \tag{17}$$

Для дальнейших исследований продолжим процесс построения автономной модели динамических систем с модуляцией, для чего введем в рассмотрение составной вектор состояния

$$\tilde x = \mathrm{col}\{x, \quad z \otimes z_{\text{м}}\} \tag{18}$$

и сформулируем утверждение.

Утверждение. Процессы в непрерывной системе (11) с модулированным внешним воздействием (14), компоненты которого задаются с помощью моделей (12) и (13), могут быть представлены автономной системой:

$$\dot{\tilde x}(t) = \tilde F \tilde x(t);\ \ \tilde x(0) = \mathrm{col}\{x(0), \quad z(0) \otimes z_{\text{м}}(0)\}; \tag{19}$$

$$x(t) = \tilde C_x \tilde x(t),\ y(t) = \tilde C_y \tilde x(t), \tag{20}$$

где матричные компоненты (19), (20) вычисляются согласно соотношениям

$$\tilde F = \begin{bmatrix} F & \vdots & GS(P \otimes H_{\text{м}}) \\ \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 & \vdots & \Gamma \oplus \Gamma_{\text{м}} \end{bmatrix}, \tag{21}$$

$$\tilde C_x = [I_x \ \vdots\ 0];\ \ \tilde C_y = [C \ \vdots\ 0]. \tag{22}$$

Доказательство. Доказательство утверждения строится на покомпонентном формировании производной по времени от вектора (18) с использованием исходной модели (11) многомерной системы, представления (16) процесса формирования внешнего модулированного сигнала, а также соотношения (17). ■

Представление соотношений (19)—(21) позволяет для кронекеровской матричной модели динамических процессов с модуляцией записать решение в явном виде:

$$\tilde{x}(t)=\exp\left\{\tilde{F}t\right\}\tilde{x}(0),\ \ x(t)=\tilde{C}\,\tilde{x}(t),\ \ y(t)=C\,x(t).$$

Заключение. Очевидно, что модель вида (19)—(22) является универсальной, поскольку позволяет исследовать процессы как с модуляцией входного воздействия, так и без нее. В последнем случае в выражении (14) достаточно положить $g_{\text{м}\,j}(t)\equiv 1,\ j=\overline{1,n}$. Это означает, что источник модулирующего сигнала (12) вырождается в скалярный интегратор с единичным начальным состоянием, нулевой матрицей состояния $\Gamma_{\text{м}}$ и единичной матрицей выхода $H_{\text{м}}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бесекерский В. А., Попов Е. П.* Теория систем автоматического управления. СПб.: Профессия, 2003.
2. *Куракин К. И., Куракин Л. К.* Анализ систем автоматического регулирования на несущей переменного тока. М.: Машиностроение, 1978.
3. *Сабинин Ю. А.* Позиционные и следящие электромеханические системы: Учеб. пособие. СПб.: Энергоатомиздат, 2001.
4. *Заде Л., Дезоер Ч.* Теория линейных систем: Пер. с англ. М.: Наука, 1970.
5. *Ланкастер П.* Теория матриц: Пер. с англ. М.: Наука, 1978.

Сведения об авторах

Лариса Владиславовна Кожевникова — Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; инженер-программист.

Анатолий Владимирович Ушаков — д-р. техн. наук, профессор; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; E-mail: ushakov-AVG@yandex.ru

Рекомендована кафедрой
систем управления и информатики

Поступила в редакцию
04.10.07 г.