УДК 681.3

Л. А. Мироновский, Д. В. Шинтяков

СВЯЗЬ ГАНКЕЛЕВЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ЧИСЕЛ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ЕЕ ЧАСТОТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Рассматриваются линейные системы управления с ганкелевыми сингулярными числами высокой кратности. Для таких систем исследован вид частотных характеристик и показана возможность определения по ним значений сингулярных чисел без вычисления грамианов управляемости и наблюдаемости.

Ключевые слова: *линейные системы, сингулярные числа ганкелева оператора, частотные характеристики.*

Введение. Ганкелевы сингулярные числа сравнительно недавно привлекли внимание исследователей, но уже прочно вошли в арсенал методов теории управления. Они тесно связаны с современной методикой синтеза робастных регуляторов (μ-синтез и H_∞-теория) и применяются для построения редуцированных моделей динамических систем, для оценки наблюдаемости и управляемости систем управления, а также как информативные диагностические признаки [1]. Средства для вычисления сингулярных чисел имеются в ряде математических пакетов.

Наибольшее из ганкелевых сингулярных чисел равно ганкелевой норме системы. Для их определения обычно необходимо вычислять грамианы управляемости и наблюдаемости системы. Поэтому имеет практическое значение исследование взаимосвязи ганкелевых сингулярных чисел и частотных характеристик, которые поддаются непосредственному измерению.

В литературе в основном исследовались системы с различными ганкелевыми сингулярными числами, в то время как их связь с частотными характеристиками наиболее отчетливо проявляется в случае чисел высокой кратности. Именно этот случай исследуется в настоящей статье, причем основное внимание уделено ситуации, когда все сингулярные числа одинаковы либо образуют две группы одинаковых чисел. Такие системы названы моносингулярными и бисингулярными соответственно.

Ганкелевы сингулярные числа линейных систем. Аппарат сингулярных чисел широко применяется в теории матриц, линейной алгебре и теории линейных динамических систем. Он представляет собой эффективное средство для вычисления ранга операторов, получения SVD-разложения, решения задач идентификации и редукции.

Напомним, что сингулярными числами матрицы A называются положительные квадратные корни из собственных чисел матрицы A^TA.

В теории динамических систем получили распространение два вида сингулярных чисел. Первый из них — это сингулярные числа матричной передаточной функции $Q(p)$, определяемые формулой

$$s_i = \max_{\omega} \sqrt{\lambda_i \left[Q^T(j\omega) Q(j\omega) \right]},$$

где λ_i — собственные числа произведения матриц, указанных в скобках.

Количество сингулярных чисел определяется размерами матрицы $Q(p)$. У скалярных систем (так называемых SISO-систем) имеется единственное сингулярное число, которое совпадает с максимумом амплитудно-частотной характеристики (АЧХ).

В настоящей статье рассматривается второй тип сингулярных чисел динамических систем — это ганкелевы сингулярные числа, определяемые формулой

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i (W_c W_o)},$$

где W_c и W_o — грамианы управляемости и наблюдаемости системы.

Эти грамианы представляют собой симметричные квадратные матрицы, которые могут быть найдены путем решения матричных уравнений Ляпунова

$$W_c A^T + A W_c = -BB^T, \quad W_o A + A W_o = -C^T C,$$

где A, B, C — матрицы описания системы в пространстве состояний.

Количество ганкелевых сингулярных чисел равно n (размеру матрицы A, т.е. порядку системы) и не зависит от числа входов и выходов.

В пакете MathLab для вычисления грамианов управляемости и наблюдаемости имеется команда **gram**, а ганкелевы сингулярные числа могут быть найдены с помощью команды **balreal.**

Далее будем рассматривать линейные стационарные динамические системы с одним входом $u(t)$ и одним выходом $y(t)$, описываемые операторным уравнением $y(p)=Q(p)u(p)$, где $Q(p)$ — дробно-рациональная передаточная функция:

$$Q(p) = \frac{b_{n-1} p^{n-1} + \ldots + b_1 p + b_0}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_0} = \frac{B(p)}{A(p)}.$$

Ганкелевы сингулярные числа не зависят от выбора базиса в пространстве состояний и подобно коэффициентам передаточной функции представляют собой важные характеристики системы. Количество ганкелевых сингулярных чисел равно порядку характеристического полинома, однако среди них могут быть совпадающие (кратные). В общем случае линейная система порядка n имеет k различных сингулярных чисел $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ с кратностями $r_1, \ldots, r_k$, где $\sum_{i=1}^{k} r_i = n$.

Рассмотрим подробнее два предельных случая максимальной кратности, когда k=1 и k=2, уделяя внимание взаимосвязи между ганкелевыми сингулярными числами и частотными характеристиками системы, и покажем, что в этих случаях сингулярные числа могут быть определены непосредственно по частотным характеристикам, без вычисления грамианов.

Частотные характеристики моносингулярных систем.

Определение 1 [2]. Будем называть *моносингулярной* систему, все ганкелевы сингулярные числа которой равны по величине.

Моносингулярные системы образуют особый класс линейных систем, обладающих рядом специфических свойств. Подобные системы достаточно часто встречаются в инженерной практике. В частности, типичным примером моносингулярной системы в радиотехнике является фазовращательное звено, имеющее постоянную амплитудно-частотную характеристику. Произвольная моносингулярная система отличается от фазовращательного звена только наличием дополнительной прямой связи с входа на выход (т.е. постоянным слагаемым в передаточной функции), не влияющей на сингулярные числа.

Передаточную функцию конечномерной моносингулярной системы можно представить в виде

$$Q(p) = \pm\sigma \frac{A(-p)}{A(p)} + d, \tag{1}$$

где $A(p)$ — характеристический полином, коэффициент σ равен сингулярному числу системы; d — константа, не влияющая на сингулярные числа.

О п р е д е л е н и е 2. Моносингулярные системы, коэффициент d которых равен нулю, будем называть *центрированными*. В теории управления они также известны как фазовращательные звенья (all-pass systems). Передаточная функция таких систем определяется как

$$Q(p)=\pm\sigma\frac{A(-p)}{A(p)}. \tag{2}$$

Примером бесконечномерной моносингулярной системы является звено постоянного запаздывания на время T, оно характеризуется трансцендентной передаточной функцией e^{-Tp}.

Рассмотрим частотные характеристики моносингулярных систем.

Амплитудно-фазовая характеристика (диаграмма Найквиста) моносингулярной системы (1) имеет вид окружности с центром в точке $(d;\,0)$ и радиусом σ. Амплитудно-фазовая характеристика (АФХ) центрированной моносингулярной системы представляет собой окружность с центром в начале координат. Для доказательства этого достаточно подставить в формулу (2) $p=j\omega$ и учесть, что $\left|A(j\omega)\right|=\left|A(-j\omega)\right|$. Отсюда получаем равенство $\left|Q(j\omega)\right|=\sigma$, представляющее уравнение окружности на комплексной плоскости. Отсюда же следует, что для центрированных моносингулярных систем (2) АЧХ постоянна и равна σ.

Для моносингулярных систем вида (1) график АЧХ колеблется между двумя уровнями: $\left|\sigma-d\right|\le A(\omega)\le\left|\sigma+d\right|$. Количество максимумов и минимумов АЧХ равно числу витков диаграммы Найквиста системы и не превышает порядка последней. Перечисленные свойства иллюстрируются рис. 1, где приведены графики частотных характеристик для центрированных (*а*, *б*) и нецентрированных (*в*, *г*) моносингулярных систем.

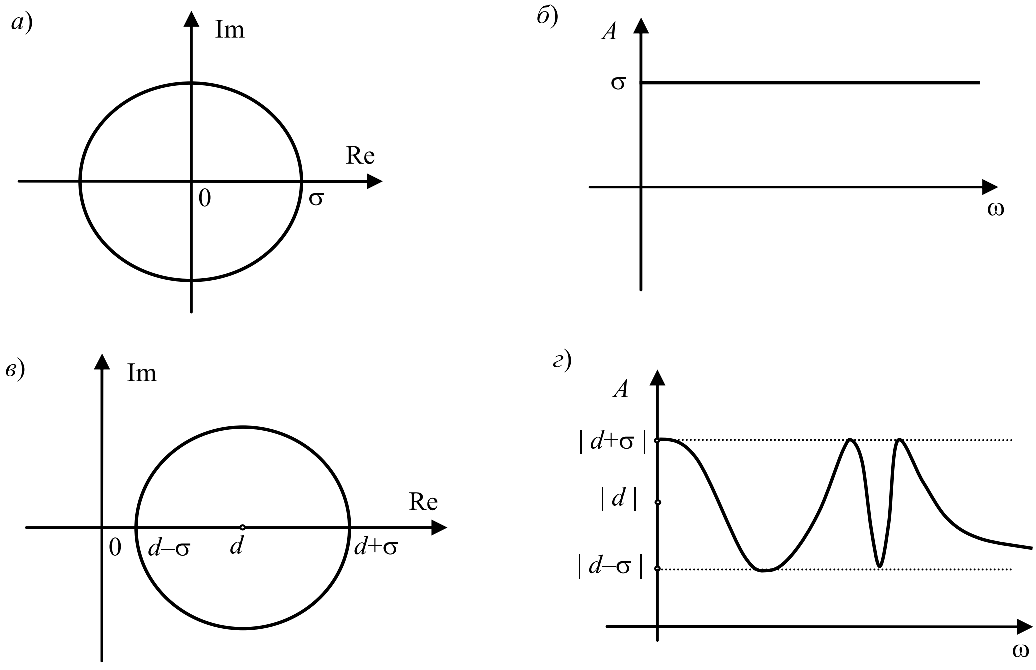

Рис. 1

Таким образом, для моносингулярных систем взаимосвязь частотных характеристик и сингулярных чисел исключительно проста: диаграмма Найквиста имеет вид окружности с радиусом σ, а АЧХ — вид равноволновых колебаний. Эти свойства позволяют определять значения ганкелевых сингулярных чисел непосредственно по АФХ и АЧХ, не вычисляя грамианы управляемости и наблюдаемости.

Пример 1. На рис. 2, *а* показана схема моста Вина — Робинсона, который используется при построении генераторов синусоидальных колебаний. Его передаточная функция имеет вид

$$Q(p)=\frac{1}{3}\frac{(Tp)^2+1}{(Tp)^2+3Tp+1}, \quad T=RC.$$

Диаграмма Найквиста (рис. 2, *б*) представляет собой окружность радиусом σ =1/6 с центром в точке $(1/6;\,0)$.

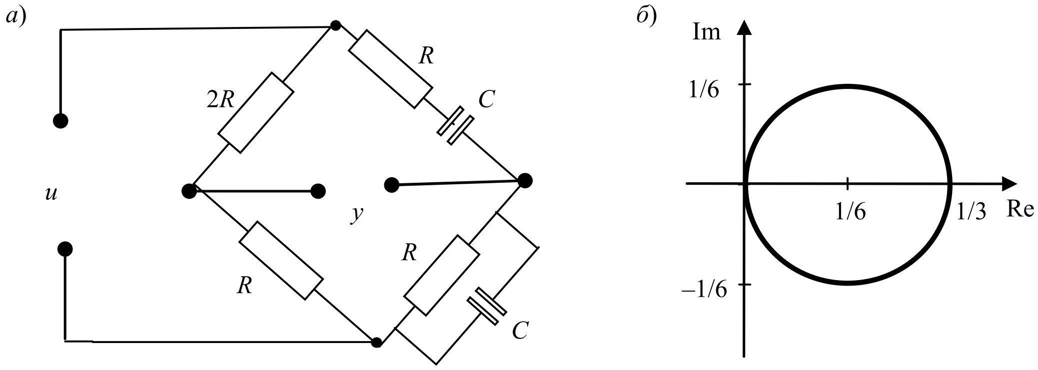

Рис. 2

Бисингулярные динамические системы. Рассмотрим частотные характеристики систем, имеющих две группы равных сингулярных чисел.

Определение 3. Будем называть *бисингулярной* систему, ганкелевы сингулярные числа которой могут принимать только два различных значения.

Любую бисингулярную систему можно представить как композицию двух моносингулярных блоков с перекрестными связями, коэффициенты усиления которых определяются сингулярными числами. Соответствующая структурная схема приведена на рис. 3. Здесь подсистемы S_1 и S_2 имеют передаточные функции вида (2) с сингулярными числами σ_1 и σ_2 соответственно, т.е. $Q_1(p)=\pm\sigma_1\frac{A_1(-p)}{A_1(p)}$, $Q_2(p)=\pm\sigma_2\frac{A_2(-p)}{A_2(p)}$. Построенная таким образом система будет иметь сингулярные числа, равные σ_1 и σ_2, их кратность будет равна порядку подсистем.

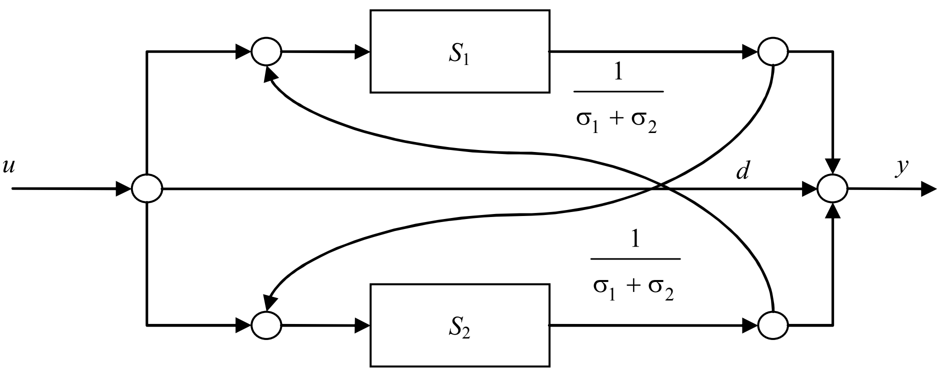

Рис. 3

Доказательство возможности такого представления опирается на сбалансированную каноническую форму Обера, описанную в терминах пространства состояний в работе [3].

Общая передаточная функция бисингулярной системы (см. рис. 3) определяется следующим образом:

$$Q(p)=(s_1+s_2)\frac{1+Q_1(p)Q_2(p)+\frac{s_1}{s_2}Q_1(p)+\frac{s_2}{s_1}Q_2(p)}{Q_1(p)Q_2(p)-Q_1(p)-Q_2(p)-1-\frac{s_1}{s_2}-\frac{s_2}{s_1}}+d\,, \tag{3}$$

где $s_1=\pm\sigma_1$, $s_2=\pm\sigma_2$.

Как и в случае с моносингулярными системами, бисингулярную систему, константа d которой равна нулю, будем называть *центрированной*.

Помимо структуры с перекрестными связями, показанной на рис. 3, бисингулярную систему можно реализовать в виде параллельного соединения двух моносингулярных блоков.

Согласно результатам Гловера [4] имеет место следующая теорема. Пусть $Q(p)$ — устойчивая рациональная передаточная функция порядка n с ганкелевыми сингулярными числами $\sigma_1 > \sigma_2 > \ldots > \sigma_k$, где число σ_i имеет кратность r_i, и $r_1 + r_2 + \ldots + r_k = n$. Тогда функция $Q(p)$ может быть представлена в виде суммы:

$$Q(p) = d + \sigma_1 \Phi_1(p) + \sigma_2 \Phi_2(p) + \ldots + \sigma_k \Phi_k(p),$$

где $\Phi_i(p)$ — устойчивые фазовращательные передаточные функции.

Отсюда следует, что любая бисингулярная система может быть представлена в виде параллельного соединения двух фазовращательных звеньев, коэффициенты усиления которых равны сингулярным числам системы:

$$Q(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = d + \sigma_1 \frac{A_1(-p)}{A_1(p)} + \sigma_2 \frac{A_1(-p)A_2(-p)}{A_1(p)A_2(p)}, \qquad (4)$$

где $A_1(p)$, $A_2(p)$ — устойчивые полиномы степени r_1 и $r_1 + r_2$ соответственно.

Необходимо отметить, что обратное утверждение в общем случае неверно, и два произвольных фазовращательных звена, соединенные параллельно, не образуют бисингулярную систему. Формулы (3) и (4) — это два различных канонических представления передаточной функции бисингулярной системы. Алгоритмы построения этих канонических представлений описаны в работах [2, 5].

Приведенные математические модели позволяют выяснить, как связаны сингулярные числа и частотные характеристики бисингулярных систем.

Теорема. Амплитудно-частотная характеристика центрированной бисингулярной системы полностью расположена в горизонтальной полосе $(\sigma_1 - \sigma_2, \sigma_1 + \sigma_2)$, ширина которой равна удвоенному значению меньшего сингулярного числа.

Доказательство. Рассмотрим разложение Гловера (4) при d=0. Соответствующая АЧХ определяется формулой

$$A(\omega) = |Q(j\omega)| = \left| \sigma_1 \frac{A_1(-j\omega)}{A_1(j\omega)} + \sigma_2 \frac{A_1(-j\omega)A_2(-j\omega)}{A_1(j\omega)A_2(j\omega)} \right|.$$

Так как $\left| \sigma_1 \dfrac{A_1(-j\omega)}{A_1(j\omega)} \right| = \sigma_1$, $\left| \sigma_2 \dfrac{A_1(-j\omega)A_2(-j\omega)}{A_1(j\omega)A_2(j\omega)} \right| = \sigma_2$, то, пользуясь неравенством $|a| - |b| \le |a + b| \le |a| + |b|$, которое справедливо для произвольных комплексных чисел, окончательно получаем: $\sigma_1 - \sigma_2 \le A(\omega) \le \sigma_1 + \sigma_2$. ■

Отсюда вытекает, что для любой бисингулярной системы существует значение коэффициента d, при котором АЧХ будет иметь вид равноволновых колебаний, заключенных в интервале между суммой сингулярных чисел $\sigma_1 + \sigma_2$ и их разностью $\sigma_1 - \sigma_2$. Ширина этого интервала определяется только сингулярными числами.

Следовательно, амплитудно-фазовая характеристика бисингулярной системы (годограф Найквиста) полностью расположена в круговой полосе (кольце), ограниченной двумя концентрическими окружностями радиусами $\sigma_1 - \sigma_2$ и $\sigma_1 + \sigma_2$.

Пример 2. На рис. 4 приведена диаграмма Найквиста бисингулярной системы 8-го порядка с передаточной функцией

$$Q(p)=\frac{29{,}33p^8+185{,}6p^7+1233p^6+1749p^5+3890p^4+1711p^3+1039p^2-191{,}1p-147}{5{,}333p^8+68{,}27p^7+274{,}1p^6+1185p^5+1239p^4+2985p^3+916{,}8p^2+1135p+58{,}82}.$$

Амплитудно-фазовая характеристика этой системы заключена между двумя концентрическими окружностями с центром в точке $d=1{,}5$ и радиусами $\sigma_1+\sigma_2=4$, $\sigma_1-\sigma_2=2$. Таким образом, ганкелевы сингулярные числа равны $\sigma_1=3, \sigma_2=1$. Дополнительный анализ позволяет установить их кратности: $r_1=1, r_2=7$.

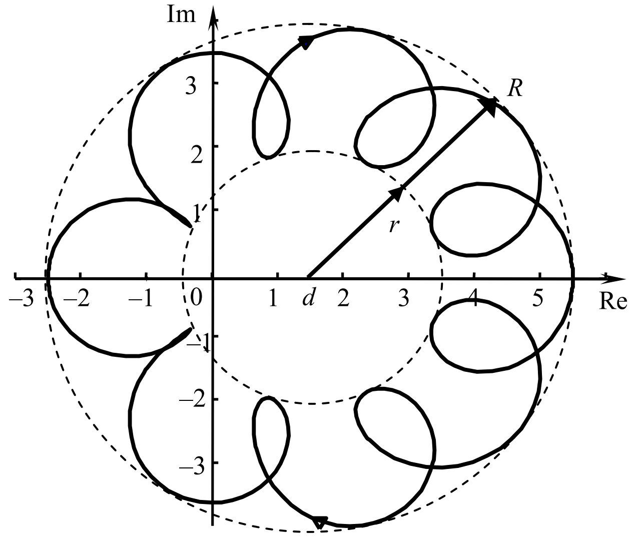

Рис. 4

Заключение. Рассмотрена взаимосвязь частотных характеристик и ганкелевых сингулярных чисел линейных динамических систем. Основное внимание уделено исследованию малоизученного класса динамических систем — бисингулярных систем. Ганкелевы сингулярные числа таких систем принимают только два значения. Полученные результаты позволяют определять значения сингулярных чисел непосредственно по частотным характеристикам, без вычисления грамианов управляемости и наблюдаемости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мироновский Л. А.* Функциональное диагностирование динамических систем. М.: Изд-во МГУ, 1998. 256 с.

2. *Мироновский Л. А., Шинтяков Д. В.* Частотные характеристики фазовращательных и бисингулярных систем // Информационно-управляющие системы. 2007. № 5. С. 36—41.

3. *Ober R. J.* Balanced parametrization of classes of linear systems // SIAM J. Control and Optimization. 1991. Vol. 29, N 6. P. 1251—1287.

4. *Glover K.* All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariables systems // Intern. J. Control. 1984. Vol. 39, N 6. P. 1115—1193.

5. *Курмаев И. Р., Мироновский Л. А.* Фазовое разложение Гловера для бисингулярных систем // Сб. докл. 9-й науч. сессии ГУАП. СПб.: СПбГУАП, 2006. Ч. 2. С. 126—128.

Сведения об авторах

Леонид Алексеевич Мироновский — д-р техн. наук, профессор; Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения; кафедра вычислительных систем и сетей; E-mail: mir@aanet.ru

Дмитрий Васильевич Шинтяков — аспирант; Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения; кафедра вычислительных систем и сетей; E-mail: ratson@mail.ru

Рекомендована кафедрой
вычислительных систем и сетей

Поступила в редакцию
14.11.07 г.