УДК 519.8

А. Н. Кириллов

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ И РАЗМЕРНОСТЬЮ

Предлагается подход к математическому моделированию сложных динамических систем с переменной структурой и размерностью. Модель задается системами обыкновенных дифференциальных уравнений, количество и вид которых зависят от поведения специальных переменных. Приведен пример использования предложенного подхода в задаче стабилизации системы твердых тел.

Ключевые слова: *динамическая система, математическая модель, изменение структуры, переменная размерность, декомпозиция, управление.*

Введение. Решение задачи управления техническими системами и технологическими процессами связано с построением сложных математических моделей, что обусловлено, в частности, многочисленными взаимосвязями различных подсистем. Необходимость учета этих взаимосвязей приводит к созданию динамических систем, аналитическое исследование которых весьма затруднительно. К системам, в которых важную роль играют изменяющиеся во времени взаимосвязи образующих их подсистем, можно отнести крупные производственные комплексы, движущиеся объекты с переменным количеством компонентов, роботы-манипуляторы, динамические модели теории метапопуляций. Эти и многие другие аналогичные системы имеют общие свойства: в процессе функционирования их структура изменяется таким образом, что подсистемы, из которых они состоят, могут на различных интервалах времени находиться в пассивном или активном режиме. В настоящей статье для моделирования таких процессов предлагается использовать динамические системы, размерность и структура которых, в зависимости от состояния, может изменяться с течением времени, т.е. происходит динамическая декомпозиция сложной системы [1]. Отметим, что вопросы моделирования сложных систем со структурными изменениями исследовались в работах [2—7]. Настоящая статья развивает это направление.

Пусть некоторая сложная система S состоит из подсистем S_i, $i = 1, ..., n$, которые в процессе функционирования могут отключаться от нее или, наоборот, подключаться к ней в зависимости от состояния сложной системы. Тем самым структура и, следовательно, размерность S изменяются. Перейдем к формальному описанию. Предположим, что система S

представляет собой совокупность взаимосвязанных подсистем S_i, $i = 1, ..., n$, причем не все S_i могут входить в состав S одновременно. Итак, $S = \{S_{k1}, ..., S_{kj}, ..., S_{km}\}$, $kj \in \{1, ..., n\}$, $j = 1, ..., m$, $m \le n$, при этом полагаем, что $ki \equiv k_i$, $ki < k(i+1)$.

Определение. Вектором структуры $\boldsymbol{\gamma} \in R^n$ системы S называется вектор $\boldsymbol{\gamma}^T = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$, такой что $\gamma_i = 1$, если $S_i \in S$, и $\gamma_i = 0$, если $S_i \notin S$.

Вектор $\boldsymbol{\gamma}$ будем также называть структурой системы S. Введем вектор $\mathbf{y}(t) \in R^n$, $\mathbf{y}^T(t) = (y_1(t), ..., y_n(t))$, такой что $\gamma_i = 1$, если $y_i(t) > \tilde{y}_i$, и $\gamma_i = 0$, если $y_i(t) < \tilde{y}_i$. Здесь $\tilde{y}_i$ — заданные постоянные (пороговые значения). Если в некоторый момент времени $\tilde{t}$ справедливо равенство $y_i(\tilde{t}) = \tilde{y}_i$, то происходит изменение структуры системы S, а именно: если при $t \in (\tilde{t} - \delta, \tilde{t})$ подсистема S_i входит в состав S, $S_i \subset S$, т.е. $y_i(t) > \tilde{y}_i$, то происходит отключение S_i от S. Если при $t \in (\tilde{t} - \delta, \tilde{t})$ подсистема S_i не входит в состав S, $S_i \not\subset S$, т.е. $y_i(t) < \tilde{y}_i$, то происходит подключение S_i к S. Здесь $\delta > 0$ — заданная постоянная.

Замечание. Вектор $\mathbf{y}(t)$ можно назвать многомерным временем эволюции системы в отличие от текущего времени t. Именно изменение компонентов $y_i(t)$ приводит к изменению структуры системы S.

Перейдем к описанию динамики системы S. При этом рассмотрим два варианта: разрывное (скачкообразное) и непрерывное изменения структуры.

Разрывное изменение структуры. Отключение S_{kj}. Пусть в некоторый момент времени t в состав S входят подсистемы S_{ki} : $S = \{S_{k1}, ..., S_{km}\}$, т.е. $y_{ki}(t) > \tilde{y}_{ki}$. Введем векторы состояний $\mathbf{X}_{ki} \in R^{(ki)}$ подсистем S_{ki}, где (ki) — размерность вектора $\mathbf{X}_{ki}$. Тогда полагаем, что динамика системы S в момент времени t описывается системой дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}}_{ki} &= f^{ki}_{k1,...,km}(\mathbf{X}_{k1}, ..., \mathbf{X}_{ki}, ..., \mathbf{X}_{km}), \ \ i = 1, ..., m; \\ \dot{y}_l &= g^{l}_{k1,...,km}(\mathbf{X}_{k1}, ..., \mathbf{X}_{ki}, ..., \mathbf{X}_{km}), \ \ l = 1, ..., n, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $f^{ki}_{k1,...,km} : R^{(k1)+...+(km)} \to R^{(ki)}$; $g^{l}_{k1,...,km} : R^{(k1)+...+(km)} \to R$, причем правые части обеспечивают существование и единственность решения системы (1).

Пусть в некоторый первый момент времени $t = t^-_{kj}$ переменная $y_{kj}(t)$ принимает значение $\tilde{y}_{kj}$: $y_{kj}(t^-_{kj}) = \tilde{y}_{kj}$. Введем отключающее подсистему S_{kj} непрерывное отображение $\varphi^-_{kj} : R^{(k1)+...+(km)+n+1} \to R^{(k1)+...+(km)+n+1}$:

$$\begin{aligned} &\varphi^-_{kj}(\mathbf{X}_{k1}(t^-_{kj}), ..., \mathbf{X}_{kj}(t^-_{kj}), ..., \mathbf{X}_{km}(t^-_{kj}), y_1(t^-_{kj}), ..., \tilde{y}_{kj}, ..., y_n(t^-_{kj}), t^-_{kj}) = \\ &= \left(\mathbf{X}^{(-kj)}_{k1}, ..., \mathbf{0}^{(kj)}, ..., \mathbf{X}^{(-kj)}_{km}, y^{(-kj)}_1, ..., \tilde{y}_{kj} - \delta^-_{kj}, ..., y^{(-kj)}_n, \tilde{t}^-_{kj}\right), \end{aligned}$$

где $\mathbf{0}^{(kj)}$ — нулевой вектор, $\mathbf{0}^{(kj)} \in R^{(kj)}$, причем $\mathbf{0}^{(kj)}$ находится на j-м месте; постоянная $\delta^-_{kj} > 0$; постоянная $\tilde{y}_{kj} - \delta^-_{kj}$ находится на $(m + j)$-м месте; $t^-_{kj} \le \tilde{t}^-_{kj}$ — заданный момент времени; $\mathbf{X}^{(-kj)}_{ki}$, $y^{(-kj)}_l$ — заданные векторы и постоянные, $l = 1, ..., n$, $l \ne kj$, $i = 1, ..., m$, $i \ne j$, $\mathbf{X}^{(-kj)}_{ki} \in R^{ki}$. При этом полагаем

$$(y_l(t^-_{kj}) - \tilde{y}_l)\left(y^{(-kj)}_l - \tilde{y}_l\right) > 0, \ l = 1, ..., n, \ \ l \ne kj,$$

т.е. положение постоянных $y_l(t_{kj}^-)$ по отношению к пороговым значениям $\tilde{y}_l$ после скачка не изменяется. Тогда отображение перехода φ_{kj}^-, понижающее размерность системы *S*, не влияет мгновенно на отключение или подключение других подсистем S_{ki}.

Далее, при $t \geq \tilde{t}_{kj}^-$ динамика системы *S* задается уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}}_{ki} &= f^{ki}_{k1,\dots,\hat{kj},\dots,km}(\mathbf{X}_{k1},\dots,\hat{\mathbf{X}}_{ki},\dots,\mathbf{X}_{km}),\ \ i=1,\dots,m,\ \ i\neq j;\\ \dot{\mathbf{X}}_{kj} &= 0^{(kj)};\\ \dot{y}_l &= g^l_{k1,\dots,\hat{kj},\dots,km}(\mathbf{X}_{k1},\dots,\hat{\mathbf{X}}_{kj},\dots,\mathbf{X}_{km}),\ \ l=1,\dots,n, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

с начальными условиями

$$\mathbf{X}_{ki}(\tilde{t}_{kji}^-)=\mathbf{X}_{ki}^{(-kj)},\ \ i=1,\dots,m,\ \ i\neq j;\ \ \mathbf{X}_{kj}(\tilde{t}_{kj}^-)=\mathbf{0}^{(kj)}; \tag{3}$$

$$y_l(\tilde{t}_{kj}^-)=y_l^{(-kj)},\ \ l=1,\dots,n,\ \ l\neq kj,\ \ y_{kj}(\tilde{t}_{kj}^-)=\tilde{y}_{kj}-\delta_{kj}^-. \tag{4}$$

Здесь символом $\hat{\mathbf{X}}_{ki}$ обозначен отсутствующий вектор. В силу второго уравнения системы (2) и начального условия (3) $\mathbf{X}_{kj}(t)\equiv\mathbf{0}^{(kj)}$ при $t\geq\tilde{t}_{kj}^-$. Это означает, что переменной $\mathbf{X}_{kj}(t)$ можно пренебречь. Тогда будем полагать, что при $t\geq\tilde{t}_{kj}^-$ динамика системы *S* задается уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}}_{ki} &= f^{ki}_{k1,\dots,kj-1,kj+1,\dots,km}(\mathbf{X}_{k1},\dots,\mathbf{X}_{kj-1},\mathbf{X}_{kj+1},\dots,\mathbf{X}_{km}),\ \ i=1,\dots,m,\ \ i\neq j;\\ \dot{y}_l &= g^l_{k1,\dots,kj-1,kj+1,\dots,km}(\mathbf{X}_{k1},\dots,\mathbf{X}_{kj-1},\mathbf{X}_{kj+1},\dots,\mathbf{X}_{km}),\ \ l=1,\dots,n. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Таким образом, произошло отключение подсистемы S_{kj}. В результате динамика системы *S* описывается уравнениями (5) с начальными условиями (3), (4).

З а м е ч а н и е. Следует отметить, что отображение φ_{kj}^- позволяет системе *S* совершить временной скачок длительностью $\tilde{t}_{kj}^- - t_{kj}\geq 0$.

Подключение S_{kj}. Пусть динамика системы *S* задается уравнениями (5). Предположим, что в некоторый момент времени $t=t_{kj}^+$ переменная $y_{kj}(t)$ принимает значение $\tilde{y}_{kj}:\ y_{kj}(t_{kj}^+)=\tilde{y}_{kj}$. Отсутствие в составе *S* подсистемы S_{kj} при $t<t_{kj}^+$ означает, что при этом выполняется условие $y_{kj}(t)<\tilde{y}_{kj}$. Введем подключающие подсистему S_{kj} отображения $\varphi_{kj}^+ : R^{(k1)+\dots+(kj-1)+(kj+1)+\dots+(km)+n+1}\to R^{(k1)+\dots+(km)+n+1}$, так что

$$\varphi_{kj}^+(\mathbf{X}_{k1}(t_{kj}^+),\dots,\mathbf{X}_{k(j-1)}(t_{kj}^+),\mathbf{X}_{k(j+1)}(t_{kj}^+),\dots,\mathbf{X}_{km}(t_{kj}^+),y_1(t_{kj}^+),\dots,y_n(t_{kj}^+),t_{kj}^+)=$$
$$=\left(\mathbf{X}_{k1}^{(+kj)},\dots,\mathbf{X}_{k(j-1)}^{(+kj)},\mathbf{X}_{kj}^{(+kj)},\mathbf{X}_{k(j+1)}^{(+kj)},\dots,X_{km}^{(+kj)},y_1^{(+kj)},\dots,y_{k(j-1)}^{(+kj)},\tilde{y}_{kj}+\delta_{kj}^+,y_{k(j+1)}^{(+kj)},\dots,y_n^{(+kj)},\ \tilde{t}_{kj}^+\right),$$

где δ_{kj}^+, $\tilde{t}_{kj}^+$, $y_i^{(+kj)}$ — заданные постоянные, $\delta_{kj}^+>0$, $\tilde{t}_{kj}^+\geq t_{kj}^+$; $\mathbf{X}_{ki}^{(+kj)}$ — заданные векторы, $\mathbf{X}_{ki}^{(+kj)}\in R^{(ki)}$, $i=1,\dots,m$; при этом полагаем, что $(y_l(t_{kj}^+)-\tilde{y}_l)\left(y_l^{(+kj)}-\tilde{y}_l\right)>0$, $l=1,\dots,n$,

$l \neq kj$, т.е. положение постоянных $y_l(t_{kj}^+)$ не изменяется по отношению к пороговым значениям $\tilde{y}_l$ после скачка, иными словами, отображение φ_{kj}^+, повышающее размерность системы, не влияет мгновенно на отключение или подключение других подсистем S_{ki}.

Далее, при $t \geq \tilde{t}_{k_j}^+$ динамика системы S задается уравнениями (1) с начальными условиями $\mathbf{X}_{ki}(\tilde{t}_{kj}^+) = \mathbf{X}_{ki}^{(+kj)}$, $y_l(\tilde{t}_{kj}^+) = y_l^{(+kj)}$, $y_{kj}(\tilde{t}_{kj}^+) = \tilde{y}_{kj} + \delta_{kj}^+$, $l = 1, ..., n$, $l \neq kj$, $i = 1, ..., m$.

Непрерывное изменение структуры. Отключение S_{kj}. Предположим, что при $t < t_{kj}^-$ динамика системы S задается уравнениями (1). Пусть $y_{kj}(t_{kj}^-) = \tilde{y}_{kj}$.

Также полагаем, что $g_{k1,...,km}^{kj}(\mathbf{X}_{k1}(t_{kj}^-),...,\mathbf{X}_{km}(t_{kj}^-)) < 0$. Пусть при $t \geq t_{kj}^-$, $\mathbf{X}_{kj}(t) \neq 0$ динамика системы S задается уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}}_{ki} &= f_{k1,...,km}^{-ki}(\mathbf{X}_{k1},...,\mathbf{X}_{ki},...,\mathbf{X}_{km}), \quad i = 1,...,m; \\ \dot{y}_l &= g_{k1,...,km}^{-l}(\mathbf{X}_{k1},...,\mathbf{X}_{kj},...,\mathbf{X}_{km}), \quad l = 1,...,n, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где функции $f_{k1,...,km}^{-ki}$, $g_{k1,...,km}^{-l}$ обеспечивают существование и единственность решений системы (6). При этом полагаем, что в области $\{\| \mathbf{X}_{kj} \| \leq \| \mathbf{X}_{kj}(t_{kj}^-) \|\}$

$$f_{k1,...,km}^{-kj}(\mathbf{X}_{k1},...,\mathbf{X}_{kj},...,\mathbf{X}_{km}) < -\alpha_{kj}^- < 0, \tag{7}$$

где α_{kj}^- — заданная постоянная, кроме того,

$$g_{k1,...,km}^{-kj}(\mathbf{X}_{k1}(t_{kj}^-),...,\mathbf{X}_{kj}(t_{kj}^-),...,\mathbf{X}_{km}(t_{kj}^-)) < 0.$$

Далее, наличие условия (7) позволяет определить момент времени $\hat{t}_{kj}$, такой что $\mathbf{X}_{kj}(\hat{t}_{kj}) = 0$. При этом возможны два случая: 1) траектория системы (6), находясь в области, для которой $y_{kj} < \tilde{y}_{kj}$, попадает на множество $\mathbf{X}_{kj} = 0$; 2) траектория системы (6) сначала при $t = \tilde{t}_{kj} < \hat{t}_{kj}$ попадает на плоскость $y_{kj} = \tilde{y}_{kj}$.

Рассмотрим оба случая:

1) с момента попадания траектории на множество $\mathbf{X}_{kj} = 0$ динамика системы S задается уравнениями (5); таким образом, происходит отключение подсистемы S_{kj};

2) после попадания траектории на плоскость $y_{kj} = \tilde{y}_{kj}$ из области $y_{kj} < \tilde{y}_{kj}$ полагаем, что динамика системы S задается уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}}_{ki} &= f_{k1,...,km}^{+ki}(\mathbf{X}_{k1},...,\mathbf{X}_{ki},...,\mathbf{X}_{km}), \quad i = 1,...,m; \\ \dot{y}_l &= g_{k1,...,km}^{+l}(\mathbf{X}_{k1},...,\mathbf{X}_{kj},...,\mathbf{X}_{km}), \quad l = 1,...,n, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где функции $f_{k1,...,km}^{+kj}$, $g_{k1,...,km}^{+l}$ обеспечивают существование и единственность решения.

Пусть

$$g_{k1,...,km}^{+kj}(\mathbf{X}_{k1}(\tilde{t}_{kj}),...,\mathbf{X}_{kj}(\tilde{t}_{kj}),...,\mathbf{X}_{km}(\tilde{t}_{kj})) \geq 0, \tag{9}$$

$$g_{k1,...,km}^{-kj}(\mathbf{X}_{k1}(\tilde{t}_{kj}),...,\mathbf{X}_{kj}(\tilde{t}_{kj}),...,\mathbf{X}_{km}(\tilde{t}_{kj})) > 0.$$

При этом функции $g^{+kj}_{k1,...,km}$ обладают свойством положительного скачка: гарантируют попадание траектории на плоскость $y_{kj} = \tilde{y}_{kj} + \delta^{+}_{kj}$, после чего динамика системы S задается уравнениями (1). Это означает, что отключения подсистемы S_{kj} не произошло („ложная тревога“).

Подключение S_{kj}. Пусть динамика S задается системой (5), и в некоторый момент времени t^{+}_{kj} имеем $y_{kj}(t^{+}_{kj}) = \tilde{y}_{kj}$. При этом полагаем

$$g^{kj}_{k1,...,k(j-1),k(j+1),...,km}(\mathbf{X}_{k1}(t^{+}_{kj}),...,\mathbf{X}_{k(j-1)}(t^{+}_{kj}),\mathbf{X}_{k(j+1)}(t^{+}_{kj}),...,\mathbf{X}_{km}(t^{+}_{kj})) > 0.$$

Далее, при $t \ge t^{+}_{kj}$ динамика S задается системой (8), для которой, помимо условия (9) и свойства положительного скачка для $g^{+kj}_{k1,...,km}$, до момента попадания траектории на плоскость $y_{kj} = \tilde{y}_{kj} + \delta^{+}_{kj}$ выполняется условие

$$| f^{+kj}_{k1,...,km}(\mathbf{X}_{k1},...,\mathbf{X}_{kj},...,\mathbf{X}_{km}) | > \alpha^{+}_{kj} > 0,$$

где α^{+}_{kj} — заданная постоянная.

В результате динамика S задается системой (1). Происходит подключение подсистемы S_{kj}.

Определение. Будем называть построенную выше математическую модель системой с переменной размерностью (СПР) с разрывным или непрерывным изменением структуры.

Траектория СПР состоит из участков, соответствующих временным интервалам, на которых структура системы не изменяется. При этом каждый участок траектории порождает последовательность структур $\gamma^{(k)}$, т.е. структурную траекторию. Задача стабилизации заданной структуры в случае линейной системы решается в работе [8].

Пример. Рассмотрим систему m связанных между собой твердых тел P_k, уравнения движения которых имеют вид: $f_k(\omega_k, \dot{\omega}_k, v_k, \dot{v}_k, u_k) = 0$, где ω_k, v_k — абсолютные угловая скорость k-го тела и скорость относительно неподвижной точки O_k; u_k — управляющий момент сил, приложенных к k-му телу. Пусть в каждом теле выделен орт $\mathbf{r}_k$, а в пространстве задана совокупность ортов $\mathbf{d}_k$. Задача состоит в стабилизации системы тел, т.е. в построении управлений u_k, при которых $\mathbf{r}_k \to \mathbf{d}_k$ при $t \to \infty$. Введем дополнительное непрямое управление w, такое что $\dot{w} = M - (|u_1| + ... + |u_m|)$, где $M = M(t)$ — пороговая кусочно-постоянная функция, $|u_k|$ — модуль вектора u_k. Пусть задана бесконечная совокупность постоянных $w_i : w_i < w_{i+1}$, $i = 1, 2, ...$ Будем полагать, что при $w \in (w_k, w_{k+1})$ в состав системы входят тела $P_1,...,P_k$. При достижении переменной значения w_k происходит отключение тела P_k, а при достижении значения w_{k+1} — подключение тела P_{k+1}. Переменная w характеризует запас энергии, имеющейся в распоряжении управляющего органа системы и затрачиваемой на стабилизацию. Если этот запас достаточно велик, то подключается дополнительный объект, в противном случае отключается один из объектов. Таким образом, построена саморазвивающаяся механическая система с двухуровневым управлением: посредством управления u_k решается задача стабилизации, а посредством параметра w изменяется структура системы в зависимости от наличия энергии, значение которой может регулироваться изменением функции M, зависящей, в свою очередь, от параметров, характеризующих движение системы.

Предложенный подход, который можно назвать методом динамической декомпозиции, позволяет аналитически исследовать сложные системы с переменной структурой и размерностью, используя на различных стадиях их функционирования более простые, по сравнению с исходной, модели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кириллов А. Н.* Динамическая декомпозиция и устойчивость структур // Математический анализ и его приложения: Сб. / Под ред. *В. В. Мазалова*. Чита: Изд-во Читинск. пед. ин-та, 1996. Вып. 2. С. 20—24.

2. *Шильяк Д.* Децентрализованное управление сложными системами. М.: Мир, 1994. 576 с.

3. *Груйич Л. Т., Мартынюк А. А., Риббенс-Павелла М.* Устойчивость крупномасштабных систем при структурных и сингулярных возмущениях. Киев: Наукова думка, 1984. 473 с.

4. *Матросов В. М., Маликов А. И.* Вектор-функции Ляпунова в анализе динамических систем со структурными изменениями // Изв. РАН. Сер. Теория и системы управления. 1998. Вып. 2. С. 47—54.

5. *Охтилев М. Ю., Соколов Б. В., Юсупов Р. М.* Интеллектуальные технологии мониторинга и управление структурной динамикой сложных динамических объектов. М.: Наука, 2006. 410 с.

6. *Москвин Б. В., Михайлов Е. П., Павлов А. Н., Соколов Б. В.* Комбинированные модели управления структурной динамикой информационных систем // Изв. вузов. Приборостроение. 2006. Т. 49, № 11. С. 7—12.

7. *Емельянов С. В.* Системы автоматического управления с переменной структурой. М.: Наука, 1967. 336 с.

8. *Кириллов А. Н.* Управление многостадийными технологическими процессами // Вестн. СПбГУ. Сер. 10. 2006. Вып. 4. С. 127—131.

Сведения об авторе

Александр Николаевич Кириллов — канд. физ.-мат. наук, доцент; Санкт-Петербургский государственный технологический университет растительных полимеров, кафедра высшей математики; E-mail: krllvaleksandr@rambler.ru

Рекомендована кафедрой высшей математики

Поступила в редакцию 18.09.08 г.