УДК 004.8

А. Л. Тулупьев

СОГЛАСОВАННОСТЬ ДАННЫХ И ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТИ АЛЬТЕРНАТИВ В ЦИКЛЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРЕДПОЧТЕНИЙ

Рассматривается подход к проверке согласованности данных и вычислению оценок вероятности альтернатив на основе преобразования цикла стохастических предпочтений во фрагмент знаний алгебраической байесовской сети и последующего логико-вероятностного вывода. Предлагаемый подход может быть использован при разработке систем поддержки принятия решений.

Ключевые слова: *байесовские сети, стохастические предпочтения, принятие решений, вероятностная семантика, модели знаний с неопределенностью, логико-вероятностный вывод.*

Введение. Одна из наиболее распространенных функций систем поддержки принятия решений (СППР) — представление и хранение структуры предпочтений, используемых лицом (или группой лиц, или экспертами), принимающим решения (ЛПР) [1]. Такие системы позволяют на основе имеющихся данных ранжировать возможные решения [2] или оценивать вероятность реализации двух или более альтернатив (посредством сравнения их значимости и возможности реализации) [3].

Лицо, принимающее решение, обладая достаточными познаниями в предметной области, как правило, не имеет специальной математической подготовки для того, чтобы учесть все особенности и ограничения различных формальных подходов, применяющихся в СППР. Кроме того, далеко не всегда элементы в том объеме знаний, которым располагает опрашиваемый специалист, идеально согласованы. Это приводит к тому, что полученные сведения о его системе предпочтений могут оказаться в какой-то части непригодными для представления или обработки с помощью СППР. Например, система предпочтений может быть противоречивой, при этом противоречия в различных подходах могут проявляться по-разному. Один из основных их видов — цикл предпочтений, который в простейшем детерминированном случае выглядит как, например, следующая система утверждений: „*A* важнее, чем *B*“; „*B* важнее, чем *C*“; „*C* важнее, чем *A*“. В этом случае определить, что важнее, невозможно.

Читателю противоречивость приведенного фрагмента системы предпочтений очевидна, поскольку число противоречащих друг другу элементов невелико, они сведены вместе, изолированы от других сведений и, наконец, читатель *понимает* то, что написано. Программа же, используемая в СППР, может распознать противоречие только по формальным признакам.

Как правило, при появлении столь жестко *детерминированных* циклов в предпочтениях не остается ничего иного, как вернуться к опросу ЛПР и в диалоге с ним модифицировать систему предпочтений [2]. Однако высказывания о предметной области не всегда столь однозначны. В них может присутствовать доля неопределенности, которую удается представить в виде оценки доверия к истинности высказывания [3—5]. Одним из примеров таких оценок является вероятность истинности высказывания, а цель настоящей статьи состоит в описании цикла *стохастических* (или вероятностных) предпочтений, его формализации, результатов его анализа и способа обработки. Такие циклы нередко возникают при обработке мнений большой группы экспертов, при ранжировании большого числа альтернатив, а также при голосовании в группе.

Измерения (и иные процедуры), направленные на выявление системы предпочтений, свойственны ряду предметных областей и наук. Например, в маркетинге „средством измерений“ является опросный лист клиента (покупателя), в психологии — тестовая методика, в социологии — анкета, в инженерии знаний — формализованное интервью эксперта или ЛПР, при голосовании — избирательный бюллетень. При этом возможность использования в большинстве областей электронных средств хранения данных обеспечивает доступность сведений о реализации предпочтений. В каждой из перечисленных областей используется соответствующий ей терминологический аппарат, сложились свои способы формализации и описания решения задач, связанных с исследованиями предпочтений, выработаны определенные методы измерений.

В настоящей статье в качестве иллюстрационной задачи предлагается использовать пример, связанный с оценкой (или прогнозом) результатов голосования, проведенного группой (комитетом) из трех человек. Такой пример позволит достаточно ясно и доступно отобразить все особенности проблемы принятия решения в условиях цикла стохастических предпочтений.

Исходная задача. Комитет состоит из трех равноправных членов. Каждый из них голосует „за“ или „против“ относительно проекта решения, вынесенного в повестку дня заседания. Среди членов комитета сложились достаточно устойчивые отношения: выбор, производимый первым членом комитета, зависит от выбора, производимого третьим, выбор второго — от выбора первого, а выбор третьего — от выбора второго. Предпочтения членов комитета отличаются достаточной степенью неопределенности и поэтому формально представляются условными вероятностями вида $p(\tilde{x}_i \mid \tilde{x}_j)$, $i, j = 1, 2, 3$ [4—6].

Введем дополнительные обозначения. Пусть x_1 соответствует утверждению «первый член комитета голосует „за“», x_2 — утверждению «второй член комитета голосует „за“», x_3 — утверждению «третий член комитета голосует „за“»; индекс $j = i - 1$ соответствует значению j, предшествующему значению i, а для $i = 1$ считается, что $j = 3$. Символ $\overline{x}$ означает отрицание высказывания x, а символ $\tilde{x}$ называется литералом и может принимать значения из множества $\{x, \overline{x}\}$.

Таким образом, предпочтения голосующих могут быть формально представлены совокупностью значений шести условных вероятностей: $p(x_1 \mid \overline{x}_3)$, $p(x_1 \mid x_3)$, $p(x_2 \mid \overline{x}_1)$, $p(x_2 \mid x_1)$, $p(x_3 \mid \overline{x}_2)$, $p(x_3 \mid x_2)$ — иначе говоря, известна вероятность истинности высказываний вида «первый член комитета голосует „за“ при условии, что третий голосует „против“», «первый член комитета голосует „за“ при условии, что третий тоже голосует „за“» и т.д. Заметим, что исходя из теории вероятностей также известны величины $p(\overline{x}_i \mid \tilde{x}_j) = 1 - p(x_i \mid \tilde{x}_j)$.

Для завершения спецификации исходной задачи предположим, что вследствие устойчивых отношений между голосующими они, скорее, склонны поддержать проект решения, нежели отвергнуть его. Оценки, описывающие такую ситуацию, приведены в таблице, пример 1; предположение о том, что члены комитета придерживаются разных точек зрения, представлено примером 2.

Индекс оценки i	Оценка вероятности (*пример 1*)				Оценка вероятности (*пример 2*)				Оценка вероятности (*пример 3*)			
	условной		совместной		условной		совместной		условной		совместной	
	$x_i \mid x_j$	$x_i \mid \overline{x}_j$	x_i	$x_i x_j$	$x_i \mid x_j$	$x_i \mid \overline{x}_j$	x_i	$x_i x_j$	$x_i \mid x_j$	$x_i \mid \overline{x}_j$	x_i	$x_i x_j$
1	0,96	0,75	0,957	0,946	0,4	0,05	0,119	0,079	0,75	0,167	0,400	0,300
2	0,97	0,8	0,963	0,928	0,5	0,75	0,720	0,060	0,25	0,5	0,400	0,100
3	0,99	0,88	0,986	0,953	0,1	0,45	0,198	0,072	0,75	0,167	0,400	0,300
Результат	$p(x_1x_2x_3)$		[0,918; 0,921]		$p(x_1x_2x_3)$		[0,020; 0,060]		Исходные данные содержат противоречие [4]			
	$p(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)$		[0,079; 0,082]		$p(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)$		[0,940; 0,980]					

Пусть требуется найти вероятности трех исходов:

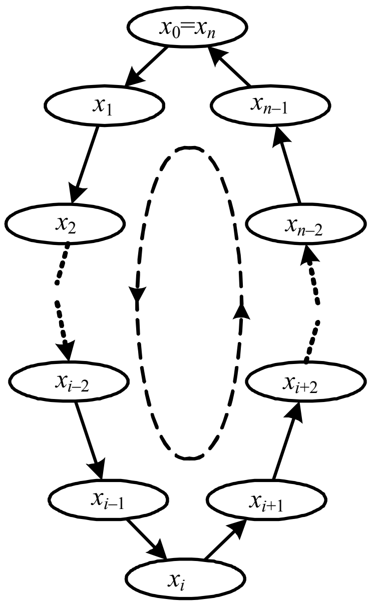
— вероятность консенсусного голосования „за“;

— вероятность того, что хотя бы один член комитета проголосует против;

— вероятность того, что первый член комитета проголосует „за“.

Консенсусному голосованию „за“ соответствует логическая формула $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$ (далее будем писать $x_1x_2x_3$, опуская знаки конъюнкции); второму исходу соответствует $\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3$, а третьему — x_1.

Обобщение и формализация [4, 6]**.** В обобщенной версии этой задачи исходные данные представляют собой направленный цикл (см. рисунок), который для краткости назовем БСД-циклом (БСД — байесовские сети доверия). Каждому узлу цикла приписаны $p(\tilde{x}_i \mid \tilde{x}_j)$ — тензоры условных вероятностей, характеризующие неопределенность и силу [4] связи между утверждениями $\tilde{x}_i$ и $\tilde{x}_j$, $i,\ j = \overline{1,n}$. Речь идет о вероятностях принятия литералом того или иного означивания в зависимости от означивания литерала в узле-родителе. Индекс j предшествует i. Как правило, $j = i - 1$, но для $i = 1$ предшествующим индексом будет $j = n$. Будем считать $j = n$ и $j = 0$ одним и тем же значением индекса, что приводит, например, к совпадению $x_0 = x_n$. Определим величину $r_i = p(x_i \mid x_j) - p(x_i \mid \overline{x}_j)$.



На первый взгляд, получившаяся конструкция является частным случаем БСД, аппарат которых и базовые алгоритмы логико-вероятностного вывода известны и хорошо изучены [5, 7]. Для решения исходной задачи как раз и требуется по известным исходным оценкам истинности получить другие оценки, которые не заданы явно. Это и есть один из видов логико-вероятностного вывода.

Однако БСД — это не просто направленный граф с тензорами условных вероятностей в узлах. БСД (как *направленный* граф) должна быть еще и *ациклической* — в ней не должно быть направленных циклов. Имеющиеся исходные данные (см. рисунок) именно такой цикл и образуют, что делает невозможным применение существующих БСД-исчислений [7].

Алгоритмы обработки. Возможность обработать БСД-цикл все же существует. Преобразуем имеющуюся совокупность условных вероятностей в совокупность совместных вероятностей [4, 6] и рассмотрим ее как оценки вероятностей элементов идеала конъюнктов — фрагмент знаний алгебраической байесовской сети (АБС) [5]. Алгоритмы логико-вероятностного вывода для названного фрагмента знаний известны [5, 6], что позволяет найти требующиеся оценки вероятностей.

По формуле полной вероятности можно рассчитать вероятность истинности $p(x_i)$ утверждения x_i, если известна вероятность истинности $p(x_j)$ утверждения x_j из предыдущего узла: $p(x_i) = p(x_i \mid x_j)p(x_j) + p(x_i \mid \overline{x}_j)p(\overline{x}_j)$. С учетом r_i получим $p(x_i) = r_i p(x_j) + p(x_i \mid \overline{x}_j)$. Определив $p(x_i)$, можно аналогичным образом вычислить $p(x_{i+1})$, а затем $p(x_{i+2})$, $p(x_{i+3})$ и т. д., пока цикл не замкнется на $p(x_{i-1})$. На основании $p(x_{i-1}) = p(x_j)$ и в соответствии с определением условной вероятности рассчитываются вероятности конъюнкций утверждений $p(x_i x_j) = p(x_i \mid x_j)p(x_j)$.

Таким образом, если известна маргинальная вероятность [4] хотя бы одного утверждения из узла цикла, то можно восстановить все остальные маргинальные вероятности вида $p(x_j)$, $p(x_i x_j)$, а следовательно, и $p(\tilde{x}_i \tilde{x}_j)$.

Пусть $p(x_0) = \nu$. Тогда согласно приведенным формулам через неизвестное значение ν можно выразить последовательно маргинальные вероятности утверждений $p(x_i) = p_i(\nu)$. Неизвестное значение ν определяется из уравнения $\nu = p_n(\nu)$, которое может иметь единственное решение или бесконечно много решений [4, 6] в зависимости от исходных данных. Вычислив значение ν, можно, в свою очередь, вычислить значения маргинальных вероятностей вида $p(x_j)$, $p(x_j x_i)$ и, вообще говоря, все вероятности $p(\tilde{x}_i \tilde{x}_j)$.

Определим векторы

$$\mathbf{P}_0 = \begin{pmatrix} \nu \\ 1-\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(x_0) \\ 1-p(x_0) \end{pmatrix} \text{ и } \mathbf{P}_i = \begin{pmatrix} p_i(\nu) \\ 1-p_i(\nu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(x_i) \\ 1-p(x_i) \end{pmatrix},$$

а также матрицу

$$\mathbf{W}_j = \begin{pmatrix} p(x_i \mid x_j) & p(x_i \mid \overline{x}_j) \\ p(\overline{x}_i \mid x_j) & p(\overline{x}_i \mid \overline{x}_j) \end{pmatrix}.$$

При этом уравнение $\nu = p_n(\nu)$ эквивалентно матрично-векторному уравнению $\mathbf{P}_0 = \mathbf{W}\mathbf{P}_0$, где $\mathbf{W} = \mathbf{W}_n \times \mathbf{W}_{n-1} \times \ldots \times \mathbf{W}_1 \times \mathbf{W}_0$, согласно которому вектор $\mathbf{P}_0$ есть собственный вектор произведения матриц **W**. Вектору $\mathbf{P}_0$ должно соответствовать собственное число $\lambda = 1$. Заметим, что матрицы $\mathbf{W}_i$ и, следовательно, их произведение **W** являются стохастическими, а $\mathbf{P}_0$ — вектор вероятностей (его компоненты неотрицательны и в сумме дают единицу) [8]. Значения компонент вектора $\mathbf{P}_0$ можно определить по формулам Крамера или методом последовательных приближений [6].

Совокупность вычисленных вероятностей $p(x_j)$, $p(x_i x_j)$, где $1 \le i \le n$, можно внести в качестве исходных данных во фрагмент знаний алгебраической байесовской сети. Такой фрагмент обрабатывается с помощью известных алгоритмов поддержания непротиворечивости и априорного вывода [4—6]. Эти алгоритмы, в частности, позволяют получить оценки искомых величин $p(x_1 x_2 x_3)$, $p(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)$ и $p(x_1)$.

Результаты расчетов по предложенным выше формулам (в частности, оценка $p(x_1)$), а также результаты логико-вероятностного вывода во фрагменте знаний АБС — искомые оценки альтернатив $p(x_1 x_2 x_3)$ и $p(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)$ — представлены в таблице. Заметим, что в процессе вывода по исходным данным примера 3 была выявлена их противоречивость [4].

Выводы. Математической моделью цикла стохастических предпочтений является направленный цикл в байесовской сети доверия. Его невозможно обработать с помощью известных алгоритмов логико-вероятностного вывода в БСД. Однако такой направленный цикл можно преобразовать во фрагмент знаний алгебраической байесовской сети, решив соответствующее матрично-векторное уравнение. Алгоритмы логико-вероятностного вывода для фрагмента знаний известны, что позволяет проверить согласованность (непротиворечивость) исходных данных и оценить вероятности альтернатив с учетом отношений, заданных циклом стохастических предпочтений.

Некоторые результаты, представленные в данной статье, получены в рамках проекта, поддержанного Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 09-01-00861-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Саати Т.* Принятие решений. Метод анализа иерархий. М.: Радио и связь, 1993. 316 с.

2. *Абакаров А. Ш., Сушков Ю. А.* Программная система поддержки принятия рациональных решений „MPRIORITY 1.0“ [Электронный ресурс]: Электронный науч. журн. „Исследовано в России“. 2005: <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2005/207.pdf>. С. 2130—2146.

3. *Хованов Н. В.* Анализ и синтез показателей при информационном дефиците. СПб.: Изд-во С.-Петербург. гос. ун-та, 1996. 196 с.

4. *Тулупьев А. Л., Николенко С. И., Сироткин А. В.* Байесовские сети: логико-вероятностный подход. СПб.: Наука, 2006. 607 с.

5. *Тулупьев А. Л., Сироткин А. В., Николенко С. И.* Синтез согласованных оценок истинности утверждений в интеллектуальных информационных системах // Изв. вузов. Приборостроение. 2006. Т. 49, № 7. С. 20—26.

6. *Сироткин А. В., Тулупьев А. Л.* Локальный априорный вывод в алгебраических байесовских сетях: комплекс основных алгоритмов // Тр. СПИИРАН. 2007. Вып. 5. С. 100—111.

7. *Jensen F. V.* Bayesian Networks and Decision Graphs. N.Y.: Springer-Verlag, 2001. 268 p.

8. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969. 368 с.

Сведения об авторе

Александр Львович Тулупьев — канд. физ.-мат. наук, доцент; Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН, лаборатория прикладной информатики; E-mail: alt@iias.spb.su

Рекомендована кафедрой
технологий программирования
СПбГУ ИТМО

Поступила в редакцию
15.02.08 г.