

Е. Д. ЛИХОЛЕТОВ, А. В. УШАКОВ, А. Ю. ЦВЕНТАРНЫЙ

## АНАЛИЗ ПЕРЕКРЕСТНЫХ СВЯЗЕЙ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ КЛАССА „ДВУМЕРНЫЙ ВХОД — ВЫХОД“ С ОДНОТИПНЫМИ КАНАЛАМИ

Показывается, что работоспособность динамических систем класса „двумерный вход — выход“ с однотипными каналами и матрицей вращения перекрестных связей сохраняется, если ее аргумент не превышает запаса устойчивости по фазе сепаратного канала системы. Предлагается способ увеличения запаса устойчивости скалярных полиномиальных динамических моделей.

*Ключевые слова:* динамическая система, перекрестные связи, матрица вращения, запас устойчивости.

**Постановка задачи.** Рассматривается проблема построения автоматических систем, встраиваемых в измерительные мониторинговые комплексы, использующие принцип следящего преобразования. Такие системы, как правило [1—5], являются двухканальными с однотипным исполнением каналов и характеризуются наличием перекрестных межканальных связей с матрицей типа „матрица вращения“ (МВ). Наличие перекрестных связей при определенных значениях аргумента  $\mu$  МВ становится причиной потери работоспособности двухканальных систем при устойчивых сепаратных каналах.

В настоящей статье рассматривается проблема установления связи аргумента  $\mu$  МВ с запасом устойчивости  $\Delta\varphi$  по фазе сепаратных однотипных каналов, степень различия которых оказывается важным фактором.

**Определение связи между предельно допустимым значением аргумента матрицы вращения и запасом устойчивости сепаратных каналов. Основной результат.**

Рассмотрим динамическую систему (ДС) класса „двумерный вход — выход“, структурная схема которой приведена на рис. 1. Здесь  $g_i, \varepsilon_i, y_i, i=1, 2$ , — внешнее воздействие, ошибка слежения и выход  $i$ -го сепаратного канала соответственно;  $\mu$  — аргумент матрицы межканальных связей (матрицы вращения)  $T = \text{col}\{[\cos \mu \quad \sin \mu], [-\sin \mu \quad \cos \mu]\}$ ;  $v_1, v_2$  — переменные, образующие двумерный выход матрицы  $T$ ;  $W(s)$  — передаточная функция прямой цепи  $i$ -го сепаратного канала спроектированной системы, имеющая представление

$$W(s) = M(s)N^{-1}(s), \quad (1)$$

где  $M(s)$ ,  $N(s)$  — полиномы с вещественными коэффициентами степени  $m$  и  $n$  ( $m < n$ ) соответственно, образующие при  $\mu=0$  характеристический полином  $D(s)$  каждого сепаратного канала в замкнутом виде в силу соотношения  $D(s) = N(s) + M(s)$ .

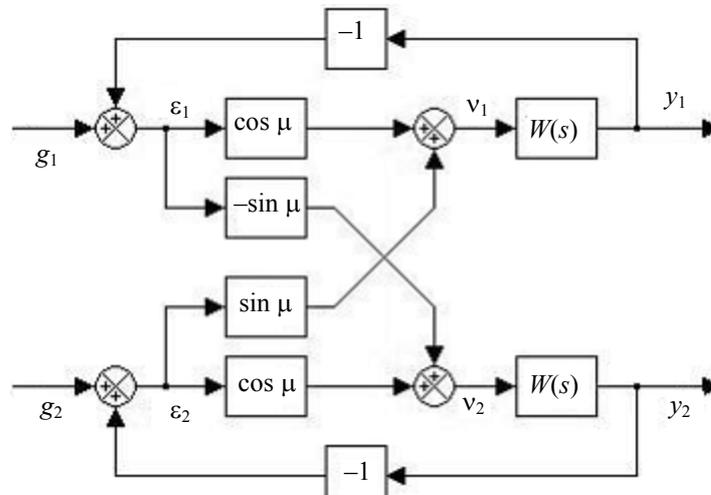


Рис. 1

Для аналитического описания системы (см. рис. 1) воспользуемся скалярным комплексированным представлением, опирающимся на приведенные в работах [6—9] результаты, модифицированные применительно к представлению матрицы межканальных связей в виде матрицы вращения.

**Утверждение 1.** Двухканальная система (см. рис. 1) с помощью процедуры комплексирования векторных переменных может быть приведена к скалярному представлению с передаточной функцией  $W_{\text{эКВ}}(s)$  прямой цепи вида

$$W_{\text{эКВ}}(s) = e^{-j\mu} W(s). \quad (2)$$

**Доказательство.** Для рассматриваемой схемы справедливы следующие соотношения:

$$\begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W(s) & 0 \\ 0 & W(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \mu & \sin \mu \\ -\sin \mu & \cos \mu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1(s) \\ \varepsilon_2(s) \end{bmatrix}; \quad (3)$$

$$y_1(s) = W(s)(\cos \mu)\varepsilon_1(s) + W(s)(\sin \mu)\varepsilon_2(s), \quad (4)$$

$$y_2(s) = -W(s)(\sin \mu)\varepsilon_1(s) + W(s)(\cos \mu)\varepsilon_2(s). \quad (5)$$

Введем в рассмотрение комплексированные переменные двухканальной системы:

$$g^* = g_1 + jg_2, \quad \varepsilon^* = \varepsilon_1 + j\varepsilon_2, \quad y^* = y_1 + jy_2. \quad (6)$$

Умножив соотношение (5) на  $j = \sqrt{-1}$ , в результате получим

$$jy_2(s) = -W(s)(j \sin \mu)\varepsilon_1(s) + W(s)(\cos \mu)(j\varepsilon_2(s)). \quad (7)$$

Просуммируем выражения (4) и (7) и воспользуемся представлениями (6):

$$\begin{aligned} y^*(s) &= y_1(s) + jy_2(s) = W(s)(\cos \mu)\varepsilon_1(s) + W(s)(\sin \mu)\varepsilon_2(s) - \\ &\quad - W(s)(j \sin \mu)\varepsilon_1(s) + W(s)(\cos \mu)(j\varepsilon_2(s)) = \\ &= W(s)(\cos \mu)\varepsilon_1(s) - W(s)(j \sin \mu)(j\varepsilon_2(s)) - W(s)(j \sin \mu)\varepsilon_1(s) + W(s)(\cos \mu)(j\varepsilon_2(s)) = \\ &= W(s)\{\cos \mu - j \sin \mu\}\varepsilon_1(s) + W(s)\{\cos \mu - j \sin \mu\}(j\varepsilon_2(s)) = \\ &= W(s)e^{-j\mu}(\varepsilon_1(s) + j\varepsilon_2(s)) = e^{-j\mu}W(s)\varepsilon^*(s) = W_{\text{эКВ}}(s)\varepsilon^*(s). \end{aligned} \quad (8) \blacksquare$$

Доказанное утверждение делает справедливыми положения утверждения 2.

**Утверждение 2.** Двухканальная система (см. рис. 1) с симметричными каналами, описываемая передаточной функцией (2) относительно комплексированных переменных  $\varepsilon^*(s)$ ,  $y^*(s)$ , оказывается на границе устойчивости, если аргумент  $\mu$  матрицы  $T$  удовлетворяет условию

$$|\mu| = \Delta\varphi, \tag{9}$$

и становится неустойчивой при

$$|\mu| > \Delta\varphi. \tag{10}$$

**Доказательство.** В силу критерия устойчивости Найквиста если выполняется условие (9), то передаточная функция (2) характеризуется нулевым запасом устойчивости, при этом ее частотный годограф проходит через критическую точку  $(-1; 0)$ , а при выполнении условия (10) он охватывает эту точку. ■

**Примечание.** Если аргумент  $\mu$  оказывается интервальной величиной  $[\mu] = [\underline{\mu}, \bar{\mu}]$  согласно работам [9, 10], то в неравенстве (10) следует положить  $\mu = \max \{ |\underline{\mu}|, |\bar{\mu}| \}$ .

**Максимизация запаса устойчивости сепаратных каналов в стандартных полиномиальных динамических моделях (ПДМ) на основе модальных представлений.** Решение этой задачи осуществляется в соответствии со следующей логикой. Вычленим из структуры двухканальной системы (см. рис. 1) сепаратный канал с передаточной функцией (1), которую представим в виде

$$W(s) = \frac{M(s)}{D(s) - M(s)} = \frac{1}{s} \frac{v_n}{s^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} v_i s^{n-1-i}}. \tag{11}$$

В замкнутом виде уравнение (11) формирует передаточную функцию „вход — выход“:

$$\Phi(s) = \frac{y_i(s)}{g_i(s)} = \frac{W(s)}{1 + W(s)} = \frac{M(s)}{D(s)} = \frac{v_n}{s^n + \sum_{i=1}^n v_i s^{n-i}}. \tag{12}$$

Оценка запаса устойчивости сепаратного канала (12) осуществляется согласно следующей процедуре.

1. Задать ПДМ с характеристическим полиномом  $D(s)$ , имеющим известные (Баттерворта, Ньютона) распределения мод или их модификации.

2. На основе выбранного в п. 1 представления ПДМ вычислить передаточную функцию разомкнутой системы вида (11).

3. Оценить запас устойчивости по фазе с помощью критерия устойчивости Найквиста, примененного к передаточной функции (11), с использованием процедуры „BODE“ в программе MatLab Simulink.

При модификации распределения мод Баттерворта (МРМБ) изменяемым параметром является величина  $\psi \in [\pi/2; 0]$  их локализации в левой полуплоскости на единичной окружности в секторе раскрытом  $2\psi$ .

На рис. 2 приведен график зависимости  $\Delta\varphi(\psi)$  для МРМБ с первого порядка по пятый ( $n=\overline{1,5}$ ). Для всех порядков ПДМ обнаруживается общая тенденция увеличения запаса устойчивости с уменьшением параметра  $\psi$  раскрыва сектора.

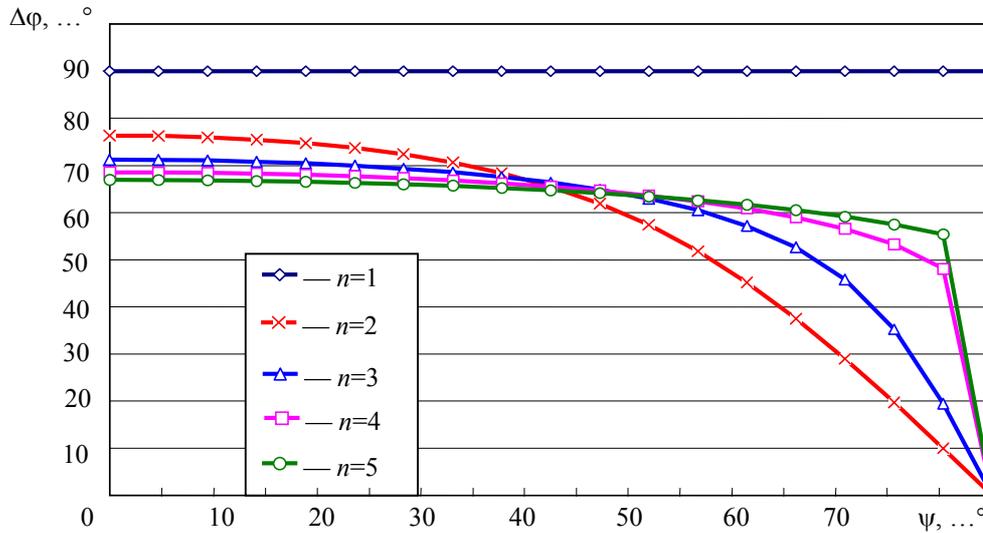


Рис. 2

В табл. 1 приведены значения  $\Delta\varphi$  для ПДМ с биномиальным распределением мод Ньютона (БРМН) при  $n=\overline{1,5}$ , здесь в аналитическом представлении полинома  $D(s, \omega_0)$   $\omega_0$  — характеристическая частота БРМН. Сравнение величин  $\Delta\varphi$ , представленных на рис. 2 и в табл. 1, показывает, что запас устойчивости по фазе с БРМН превышает запасы устойчивости с МРМБ для равных порядков ПДМ при  $\psi \neq 0$ , а при  $\psi = 0$  эти величины совпадают. Таким образом, основное направление дальнейших модификаций распределений мод ПДМ будем связывать с возможностями модифицируемости БРМН.

Таблица 1

| $n$ | Аналитическое представление полинома $D(s, \omega_0)$ | $\Delta\varphi, \dots^\circ$ |
|-----|---|------------------------------|
| 1   | $s + \omega_0$  | 90                           |
| 2   | $(s + \omega_0)^2$                                    | 76,34                        |
| 3   | $(s + \omega_0)^3$                                    | 71,25                        |
| 4   | $(s + \omega_0)^4$                                    | 68,58                        |
| 5   | $(s + \omega_0)^5$                                    | 66,93                        |

В качестве модифицируемой версии распределения мод используется версия биномиального распределения, параметризованная коэффициентом  $\nu$ , записываемая в виде

$$D(\lambda) = D(\lambda, \omega_0, \nu) = \prod_{i=0}^{n-1} (\lambda + \omega_0 (1 + i\nu)), \quad (13)$$

где  $\lambda$  — корень характеристического полинома.

Очевидно, что при  $\nu=0$  модифицированное биномиальное распределение принимает вид канонического биномиального.

При построении модифицированного БРМН в виде (13) учитывается доминирование одной моды над остальными, в соответствии с которым обеспечивается выбор параметра  $\nu$ . Следует ожидать, что при  $\nu \geq 10$  система с характеристическим полиномом вида (13) будет максимально приближена к апериодическому звену 1-го порядка.

На рис. 3 приведен график зависимости  $\Delta\varphi(v)$  для ПДМ с первого порядка по пятый ( $n=1, 5$ ). Для всех порядков ПДМ обнаруживается общая тенденция увеличения запаса устойчивости с увеличением параметра  $v$ .

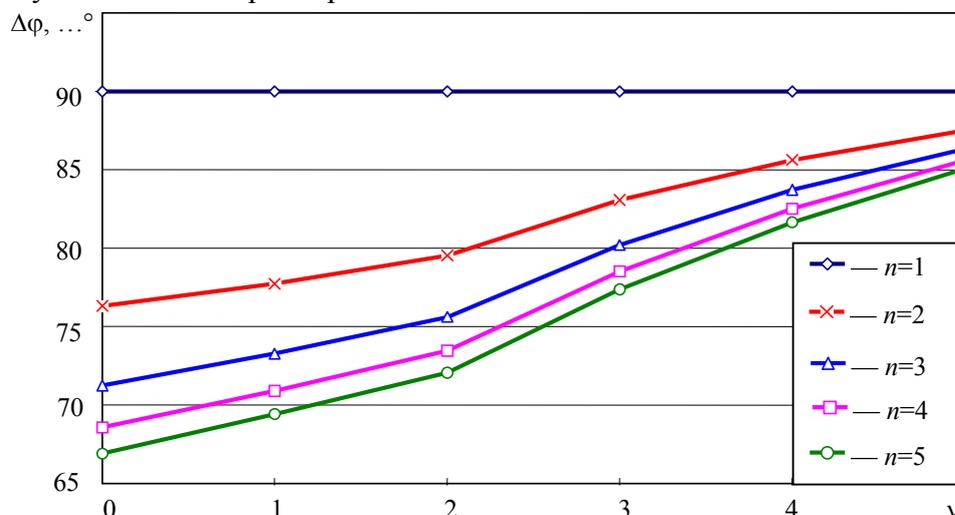


Рис. 3

Для обеспечения работоспособности двухканальной динамической системы с перекрестными связями путем повышения запаса устойчивости сепаратных каналов необходимо решить проблему степени свободы назначения параметров  $\omega_0$  и  $v$ . Для решения этой проблемы будут полезны положения следующего утверждения.

**Утверждение 3.** Если ПДМ сепаратного канала системы имеет характеристический полином вида (13), то добротность  $D_i = \dot{g}_i / \varepsilon_{i \text{ уст}}$  (где  $\varepsilon_{i \text{ уст}}$  — установившаяся ошибка в  $i$ -м сепаратном канале) канала по скорости определяется в соотношении

$$D_i = \left\{ \frac{1}{\omega_0} + \frac{1}{(1+v)\omega_0} + \frac{1}{(1+2v)\omega_0} + \dots + \frac{1}{(1+(n-1)v)\omega_0} \right\}^{-1}. \quad (14)$$

**Доказательство** строится на использовании аналитического представления добротности по скорости сепаратного канала на основе выражения (11) в виде  $D_i = v_n(\omega_0) / v_{n-1}(\omega_0)$ . Если с помощью соотношения (13) сформировать вид коэффициентов  $v_{n-1}(\omega_0)$  и  $v_n(\omega_0)$ , то их отношение приводит к уравнению (14). ■

**Построение банка моделей ПДМ с динамическими показателями, параметризованными характеристической частотой  $\omega_0$  и аргументом  $\mu$  МВ.** Полученные результаты по выбору полиномиальной модели с максимальным запасом устойчивости по фазе следует дополнить таблицей показателей  $\{\beta_j, j=\overline{1, p}\}$  качества процессов в переходном и установившемся режимах сепаратного канала, вмонтированного в структуру двухканальной системы с перекрестными связями, характеризующимися аргументом  $\mu$ . Таким образом, таблица показателей будет содержать их значения  $\beta_j(v, \omega_0, \mu)$ .

В качестве примера в табл. 2 приведены значения показателей  $\beta_j(v, \omega_0, \mu)$  для ПДМ третьего порядка ( $n=3$ ) с модифицированным БРМН при  $v=5, v=10, v=20$  и  $\mu \in [0, 60^\circ] \forall \omega_0$ ; в таблице:  $\sigma$  — перерегулирование;  $t_\sigma$  — момент достижения переходной характеристикой ее максимального значения;  $t_1$  — время первого, после  $t_\sigma$ , пересечения переходной характеристикой границы допустимой ошибки  $\Delta=5\%$ ;  $t_2$  — время последнего пересечения

переходной характеристикой границы допустимой ошибки  $\Delta=5\%$ . Длительность переходного процесса  $t_{пр}$  определяется выражением  $t_{пр} = \max\{t_1, t_2\}$ .

Таблица 2

| $\mu, \dots^\circ$ | $\nu=5$      |                         |                         |                          |                        | $\nu=10$     |                         |                         |                         |                        | $\nu=20$     |                         |                         |                         |                        |
|--------------------|--------------|-------------------------|-------------------------|--------------------------|------------------------|--------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|------------------------|--------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|------------------------|
|                    | $\sigma, \%$ | $t_\sigma$              | $t_1, \text{с}$         | $t_2, \text{с}$          | $\frac{D_i}{\omega_0}$ | $\sigma, \%$ | $t_\sigma$              | $t_1, \text{с}$         | $t_2, \text{с}$         | $\frac{D_i}{\omega_0}$ | $\sigma, \%$ | $t_\sigma$              | $t_1, \text{с}$         | $t_2, \text{с}$         | $\frac{D_i}{\omega_0}$ |
| 0                  | 0            | —                       | —                       | —                        | 0,769                  | 0            | —                       | —                       | —                       | 0,87                   | 0            | —                       | —                       | —                       | 0,930                  |
| 6                  | 0            | —                       | —                       | —                        | 0,774                  | 0            | —                       | —                       | —                       | 0,874                  | 0            | —                       | —                       | —                       | 0,935                  |
| 12                 | 0            | —                       | —                       | —                        | 0,786                  | 0            | —                       | —                       | —                       | 0,889                  | 0            | —                       | —                       | —                       | 0,951                  |
| 18                 | 0            | —                       | —                       | —                        | 0,809                  | 0            | —                       | —                       | —                       | 0,914                  | 0            | —                       | —                       | —                       | 0,978                  |
| 24                 | 1            | $\frac{3,54}{\omega_0}$ | —                       | —                        | 0,842                  | 0            | —                       | —                       | —                       | 0,952                  | 0            | —                       | —                       | —                       | 1,018                  |
| 30                 | 1,5          | $\frac{3,07}{\omega_0}$ | —                       | —                        | 0,888                  | 1,06         | $\frac{3,03}{\omega_0}$ | —                       | —                       | 1,004                  | 0,7          | $\frac{3,06}{\omega_0}$ | —                       | —                       | 1,074                  |
| 36                 | 3,8          | $\frac{2,78}{\omega_0}$ | —                       | —                        | 0,951                  | 2,7          | $\frac{2,65}{\omega_0}$ | —                       | —                       | 1,075                  | 2            | $\frac{2,64}{\omega_0}$ | —                       | —                       | 1,15                   |
| 42                 | 7,7          | $\frac{2,58}{\omega_0}$ | $\frac{3,35}{\omega_0}$ | —                        | 1,035                  | 5,6          | $\frac{2,4}{\omega_0}$  | $\frac{3,17}{\omega_0}$ | $\frac{5,28}{\omega_0}$ | 1,17                   | 4,2          | $\frac{2,36}{\omega_0}$ | —                       | —                       | 1,252                  |
| 48                 | 13,6         | $\frac{2,45}{\omega_0}$ | $\frac{3,24}{\omega_0}$ | —                        | 1,149                  | 10,28        | $\frac{2,23}{\omega_0}$ | $\frac{3,03}{\omega_0}$ | $\frac{5,98}{\omega_0}$ | 1,3                    | 8            | $\frac{2,15}{\omega_0}$ | $\frac{2,92}{\omega_0}$ | $\frac{5,52}{\omega_0}$ | 1,39                   |
| 54                 | 22,4         | $\frac{2,36}{\omega_0}$ | $\frac{3,16}{\omega_0}$ | —                        | 1,307                  | 17,4         | $\frac{2,11}{\omega_0}$ | $\frac{2,93}{\omega_0}$ | $\frac{6,25}{\omega_0}$ | 1,479                  | 13,8         | $\frac{2,01}{\omega_0}$ | $\frac{2,79}{\omega_0}$ | $\frac{5,86}{\omega_0}$ | 1,583                  |
| 60                 | 37,6         | $\frac{2,31}{\omega_0}$ | $\frac{3,11}{\omega_0}$ | $\frac{10,28}{\omega_0}$ | 1,539                  | 27,8         | $\frac{2,03}{\omega_0}$ | $\frac{2,85}{\omega_0}$ | $\frac{9,1}{\omega_0}$  | 1,739                  | 22,4         | $\frac{1,9}{\omega_0}$  | $\frac{2,7}{\omega_0}$  | $\frac{5,96}{\omega_0}$ | 1,861                  |

Использование данных табл. 2 позволяет предложить следующую оформленную в виде алгоритма процедуру поканального синтеза систем класса „двумерный вход — выход“, основанную на использовании возможностей модального управления.

#### Алгоритм.

1. Сформулировать требования к значениям показателей качества проектируемой системы в переходном и установившемся режимах.

2. Произвести оценку возможного диапазона вариаций параметра  $\mu$  — аргумента матрицы  $T$  — с последующим его представлением в виде интервального числа  $[\mu] = [\underline{\mu}, \bar{\mu}]$ .

3. В силу доказанных утверждений принять  $\mu = \max\{|\underline{\mu}|, |\bar{\mu}|\}$ .

4. Произвести оценку порядка  $n$  исходной динамической модели сепаратного канала на основе модельных представлений образующих его функциональных компонентов и выбрать значение параметра  $\nu$ .

5. Построить векторно-матричное  $(A, B, C)$ -представление исходной динамической модели сепаратного канала, рассматриваемого в процедуре синтеза как объект управления.

6. Осуществить выбор типа ПДМ (параметризованной коэффициентом  $\nu$ , характеристической частотой  $\omega_0$  и аргументом  $\mu$ ), доставляющей системе в условиях наличия перекрестных связей динамические показатели, сформированные в п. 1.

7. Построить модальную модель на основе векторно-матричного  $(G, H)$ -представления ПДМ, выбранной при выполнении п. 6.

8. Осуществить канонический синтез [4—9, 10] сепаратных каналов двухканальной системы с использованием возможностей модельного управления.

9. Провести комплексное экспериментальное исследование в программе Matlab Simulink динамических показателей спроектированной двухканальной ДС.

**Результаты компьютерного эксперимента.** Для иллюстрации полученных результатов проведено исследование двух версий двухканальной динамической системы (см. рис. 1), каналы которых построены с использованием ПДМ третьего порядка с модифицируемым биномиальным распределением для значений  $\nu=1$  и  $\nu=10$  при  $\omega_0=10 \text{ с}^{-1}$  и  $\mu=0, 30$  и  $75^\circ$ .

Графики процессов в пространстве выходов двумерной системы при входном векторном скачкообразном единичном воздействии приведены на рис. 4, а—е.

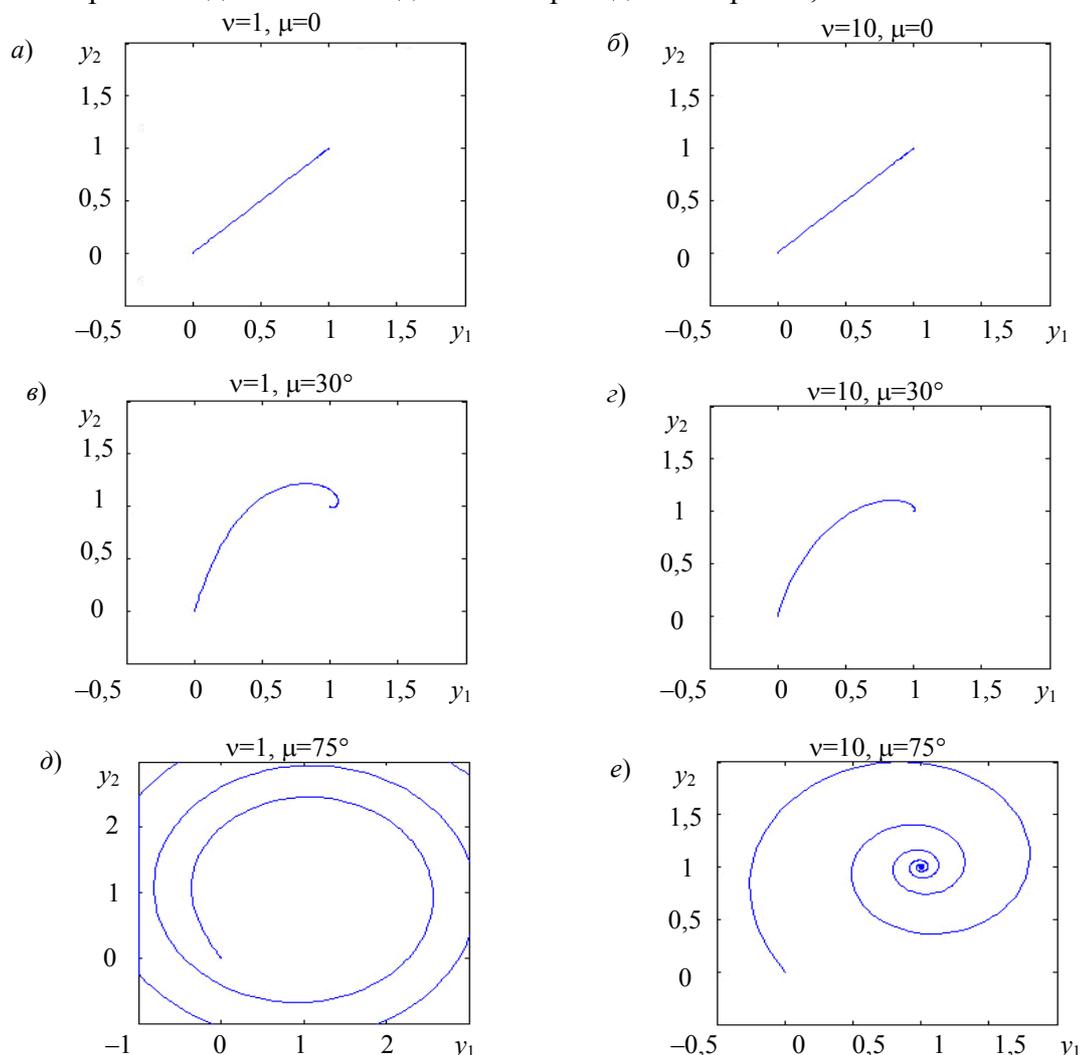


Рис. 4

ПДМ третьего порядка с модифицированным БРМН при  $\nu=1$  обладает запасом устойчивости  $\Delta\varphi=73,277^\circ$ , а при  $\nu=10$  —  $\Delta\varphi=83,711^\circ$ . Как и следовало ожидать, при  $\mu=75^\circ$  и  $\nu=1$  (см. рис. 4, д) система оказывается неработоспособной, в то время как при  $\mu=75^\circ$  и  $\nu=10$  (см. рис. 4, е) система остается работоспособной.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акунов Т. А., Сударчиков С. А., Ушаков А. В. Синтез фотоэлектрической следящей системы на основе интервальных модельных представлений. Часть I. Построение интервальной модели компонентов системы // Изв. вузов. Приборостроение. 2004. Т. 47, № 1.
2. Акунов Т. А., Сударчиков С. А., Ушаков А. В. Синтез фотоэлектрической следящей системы на основе интервальных модельных представлений. Часть II. Синтез управления, обеспечивающего стабильные эллипсоидные показатели качества системы // Там же. 2004. Т. 47, № 2.
3. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления: Пер с англ. М: Мир, 1977.
4. Синтез дискретных регуляторов при помощи ЭВМ / В. В. Григорьев, В. Н. Дроздов, В. В. Лаврентьев, А. В. Ушаков. Л.: Машиностроение, 1983.
5. Николаев П. В., Сабинин Ю. А. Фотоэлектрические следящие системы. Л.: Энергия, 1969.
6. Мирошник И. В. Теория автоматического управления: Линейные системы. СПб.: Питер, 2005.
7. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования. СПб.: Профессия, 2003.
8. Ушаков А. В. Обобщенное модальное управление // Изв. вузов. Приборостроение. 2000. Т. 43, № 3.
9. Никифоров В. О., Ушаков А. В. Управление в условиях неопределенности: чувствительность, адаптация, робастность. СПб.: СПбГИТМО (ТУ), 2002.
10. Дударенко Н. А., Слита О. В., Ушаков А. В. Математические основы современной теории управления: аппарат метода пространства состояний: Учеб. пособие / Под ред. А. В. Ушакова. СПб.: СПбГУ ИТМО, 2008.

**Сведения об авторах**

- Евгений Дмитриевич Лихолетов** — студент; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; E-mail: bsboris@gmail.com
- Анатолий Владимирович Ушаков** — д-р. техн. наук, профессор; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; E-mail: ushakov-AVG@yandex.ru
- Артем Юрьевич Цвентарный** — аспирант; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; E-mail: Taifyn@nm.ru

Рекомендована кафедрой  
систем управления и информатики

Поступила в редакцию  
25.12.08 г.