

Г. М. ДОВГОБРОД, Л. М. КЛЯЧКО, А. В. РОГОЖНИКОВ

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ ПРИ ПЛАНИРОВАНИИ ТРАЕКТОРИЙ ДВИЖЕНИЯ АППАРАТОВ

Рассматривается методика построения планируемых траекторий движения аппаратов в форме параметрических полиномиальных кривых степени не ниже пятой. Показано, что планируемые траектории имеют максимально возможный минимальный радиус кривизны, заданные положение, направление движения и кривизну в начальных и конечных точках.

**Ключевые слова:** траектории движения, подвижные аппараты, полиномы Бернштейна, число обусловленности.

**Введение.** При планировании траекторий перемещения подвижных аппаратов, управляемых автоматически или человеком, необходимо учитывать физические ограничения. Траектории должны быть как минимум  $C^2$ -гладкими функциями на отрезке  $[a, b]$ . Кроме того, существуют ограничения на величину радиусов кривизны траекторий. Использование физически реализуемых планируемых траекторий при автоматическом или ручном управлении аппаратами позволяет повысить точность следования заданным траекториям движения.

Перечислим некоторые задачи, связанные с подвижными аппаратами, в которых целесообразно использовать планируемые криволинейные траектории:

- планирование в реальном масштабе времени траектории вывода аппарата на заданную прямолинейную траекторию после значительного отклонения от нее;
- стабилизация аппарата на заранее спланированном маршруте, задаваемом в виде ломаной линии; в окрестности точки сочленения отрезков прямых необходимо формировать физически реализуемую планируемую траекторию перехода с одного ее участка на следующий.

Применение высокопроизводительных микроконтроллеров в системах управления движением аппаратов позволяет увеличить объем вычислений при сохранении неизменным длительности цикла управления. В частности, можно выполнять управляемое движение по планируемым траекториям, сформированным из отрезков прямых и дуг окружностей [1]. Такие траектории в точках соединения дуг и отрезков прямых при совпадении направлений левой и правой касательных имеют разрывную вторую производную, следовательно, и функция кривизны в точке соединения имеет разрыв. Точное движение по такой траектории физически нереализуемо. Если для построения расчетной траектории использовать отрезки прямых и участки параметрических полиномиальных кривых [2, 3], задаваемых полиномами пятой степени, то можно обеспечить непрерывное изменение кривизны на всей планируемой траектории.

**Постановка задачи.** Задача состоит в определении участка кривой, задаваемого векторной функцией  $R(u) = (x(u), y(u))^T$ . При этом скалярные функции  $x(u)$ ,  $y(u)$  имеют:

- а) непрерывные вторые производные на замкнутом отрезке  $[0, 1]$ ;
- б) радиус кривизны не меньше некоторого заданного  $R_{\min}$  при всех значениях параметра  $u \in [0, 1]$ .

Кроме того, функции  $x(u)$ ,  $y(u)$  удовлетворяют следующим граничным условиям:

- 1) граничные точки  $R(0)$  и  $R(1)$  участка плоской кривой совпадают с заданными точками  $r_0 = (x_0, y_0)^T$  и  $r_1 = (x_1, y_1)^T$  на плоскости, т.е.  $R(0) = r_0$  и  $R(1) = r_1$ ;

2) векторы касательных в граничных точках имеют направления, заданные единичными векторами  $\mathbf{e}_0 = (\sin \alpha_0, \cos \alpha_0)^T$  и  $\mathbf{e}_1 = (\sin \alpha_1, \cos \alpha_1)^T$  соответственно;

3) кривизна траектории в граничных точках  $r_0$  и  $r_1$  равна заданным значениям  $k_0$  и  $k_1$  соответственно.

Для описания траекторий будем использовать векторные вещественные полиномы [3]:

$$R_n(u) = a_0 f_0(u) + a_1 f_1(u) + \dots + a_n f_n(u), \quad (1)$$

где  $a_0, a_1, \dots, a_n$  — постоянные двумерные векторы;  $f_0(u), f_1(u), \dots, f_n(u)$  — скалярные базисные полиномы.

**Решение задачи.** Для решения задачи докажем следующее утверждение.

**Утверждение.** Векторный полином, удовлетворяющий условиям „а“, „б“, 1—3, должен иметь степень не ниже пятой.

**Доказательство.** Для полиномов степени не ниже пятой условие „а“ выполняется автоматически.

Так как расположение граничных точек произвольно, то  $r_0$  и  $r_1$  — свободные параметры.

Варьирование длин  $d_0$  и  $d_1$  касательных векторов  $r_{10}$  и  $r_{11}$  в граничных точках позволяет обеспечить выполнение условия „б“, так как форма кривой, задаваемой векторным полиномом, в значительной степени зависит от длин касательных векторов [2]. Следовательно,

$$r_{10} = \mathbf{e}_0 \cdot d_0 \text{ и } r_{11} = \mathbf{e}_1 \cdot d_1 \quad (2)$$

— свободные параметры.

Локальная кривизна траектории зависит от первой  $R'(u)$  и второй  $R''(u)$  производных векторной функции [2]. Пусть  $r_{20} = R''(0)$  и  $r_{21} = R''(1)$ , тогда  $r_{20}$  и  $r_{21}$  должны быть свободными параметрами для удовлетворения условия 3. Следовательно, для выполнения условий „б“, 1—3 векторный полином  $R_n(u)$  должен определяться шестью векторными параметрами:  $r_0, r_1, r_{10}, r_{11}, r_{20}, r_{21}$  — и, значит, должен быть полиномом степени не ниже пятой, имеющим не менее шести коэффициентов  $a_0, a_1, \dots, a_n$ . ■

Рассмотрим возможность определения значений параметров  $r_0, r_1, r_{10}, r_{11}, r_{20}, r_{21}$  из условий 1—3. Значения параметров  $r_0$  и  $r_1$  непосредственно следуют из условия 1. В предположении, что длины  $d_0$  и  $d_1$  заданы, значения параметров  $r_{10}$  и  $r_{11}$  можно определить по формулам (2), учитывая условия 2.

Надлежащий выбор значений параметров  $r_{20}$  и  $r_{21}$  позволит обеспечить выполнение условия 3. Согласно работе [2] локальная кривизна  $k$  траектории, заданной параметрически, определяется выражением

$$k(u) = \frac{x'(u)y''(u) - y'(u)x''(u)}{(x'^2(u) + y'^2(u))^{3/2}}.$$

Это выражение при  $u=0$  и заданных  $k_0 = k(0)$  и  $r_{10} = (x'(0), y'(0))$  является уравнением прямой линии относительно  $x''(0)$  и  $y''(0)$ . В качестве значений  $x''(0)$  и  $y''(0)$  можно принять координаты точки, ближайшей к началу координат. Тогда для вычисления  $r_{20}$  и  $r_{21}$  получаем следующие выражения:

$$r_{20} = (-k_0 d_0 y'_0, k_0 d_0 x'_0),$$

$$r_{21} = (-k_1 d_1 y'_1, k_1 d_1 x'_1).$$

Теперь при любых заданных значениях  $d_0$  и  $d_1$  можно построить участок плоской кривой, заданной векторным полиномом  $R_5(u)$ ,  $u \in [0, 1]$ , такой что выполняются условия „а“, 1—3. Можно подобрать такие  $d_0$  и  $d_1$ , чтобы выполнялось условие „б“. Рассмотрим минимаксную задачу:

$$k_m = \min_{d_0, d_1} \max_{u \in [0, 1]} k(u).$$

Если  $1/k_m \geq R_{\min}$ , то искомая траектория найдена, иначе, при заданных условиях использование полинома пятой степени не позволяет найти необходимую траекторию в виде одного участка.

Рассмотрим вопрос о том, какие полиномы целесообразно выбрать для определения  $R_5(u)$ . Наиболее часто для векторных полиномов используется мономиальный базис

$$u, u^2, \dots, u^n,$$

в котором произвольный полином  $n$ -й степени может быть вычислен по схеме Горнера. Однако число обусловленности полинома, построенного на основе мономиального базиса, больше или равно числу обусловленности этого же полинома, построенного на основе базисных полиномов  $B_i^n(u)$ , предложенных Бернштейном (см. Приложение). Следовательно, полиномы, построенные на основе базисных полиномов Бернштейна, обладают большей вычислительной устойчивостью.

Полиномы Бернштейна определяются формулой

$$B_i^n(u) = \frac{n!}{i!(n-i)!} u^i (1-u)^{n-i}, \quad i=0, 1, \dots, n, \quad u \in [0, 1].$$

Функция  $R_5(u)$ , построенная на основе базисного полинома Бернштейна пятой степени, и ее первая и вторая производные могут быть представлены выражениями

$$\begin{aligned} R_5(u) &= \sum_{i=0}^5 a_i B_i^5(u); \\ R_5'(u) &= 5 \left( \sum_{i=0}^4 (a_{i+1} - a_i) B_i^4(u) \right), \\ R_5''(u) &= 20 \left( \sum_{i=0}^3 (a_{i+2} - 2a_{i+1} + a_i) B_i^3(u) \right). \end{aligned}$$

Векторные коэффициенты  $a_i$  вычисляются как решения неоднородной системы линейных уравнений шестого порядка, если параметры  $r_0, r_1, r_{10}, r_{11}, r_{20}, r_{21}$  заданы не равными нулю одновременно:

$$\left. \begin{aligned} r_0 &= R_5(0), \quad r_{10} = R_5'(0), \quad r_{20} = R_5''(0), \\ r_{21} &= R_5''(1), \quad r_{11} = R_5'(1), \quad r_1 = R_5(1). \end{aligned} \right\}$$

Определитель этой системы равен  $-1 \cdot 10^4$ , т.е. имеет полный ранг, и система может быть разрешена относительно  $a_i$ :

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= r_0, \quad a_1 = r_{10} / 5, \quad a_2 = r_{20} / 20 + 2r_{10} / 5 + r_0, \\ a_3 &= r_1, \quad a_4 = r_{11} / 5, \quad a_5 = r_{21} / 20 + 2r_{11} / 5 + r_1. \end{aligned} \right\}$$

Полиномы Бернштейна вычисляются по схеме Горнера с помощью формул

$$B_i^n(u) = (1-u)^n \cdot \binom{n}{i} \cdot t^i, \quad t = \frac{u}{1-u} \text{ на отрезке } [0, 1/2];$$

$$B_i^n(u) = u^n \cdot \binom{n}{i} \cdot t^{n-i}, \quad t = \frac{1-u}{u} \text{ на отрезке } [1/2, 1].$$

Если параметры  $r_0, r_1, r_{10}, r_{11}, r_{20}, r_{21}$  задавать как трехмерные векторы, то расчетные траектории будут кривыми в трехмерном пространстве.

Рассмотрим ряд примеров, в которых координаты  $X, Y$  заданы в местной декартовой системе координат с осью  $Y$ , направленной на север; размерность координат — метры; минимальный радиус кривизны траектории составляет не менее 50 м; отношение  $S_{mv}/S_{bv}$  обобщенных оценок чисел обусловленности (см. Приложение) находится в диапазоне 12—16.

**Пример 1.** Рассмотрим построение расчетной траектории движущегося объекта. Начало траектории в точке  $A = (-100, -1020)$ , курс  $240^\circ$ , окончание в точке  $B = (0, 0)$ , курс  $0$ , в граничных точках кривизна траектории равна нулю:  $k_A = k_B = 0$ .

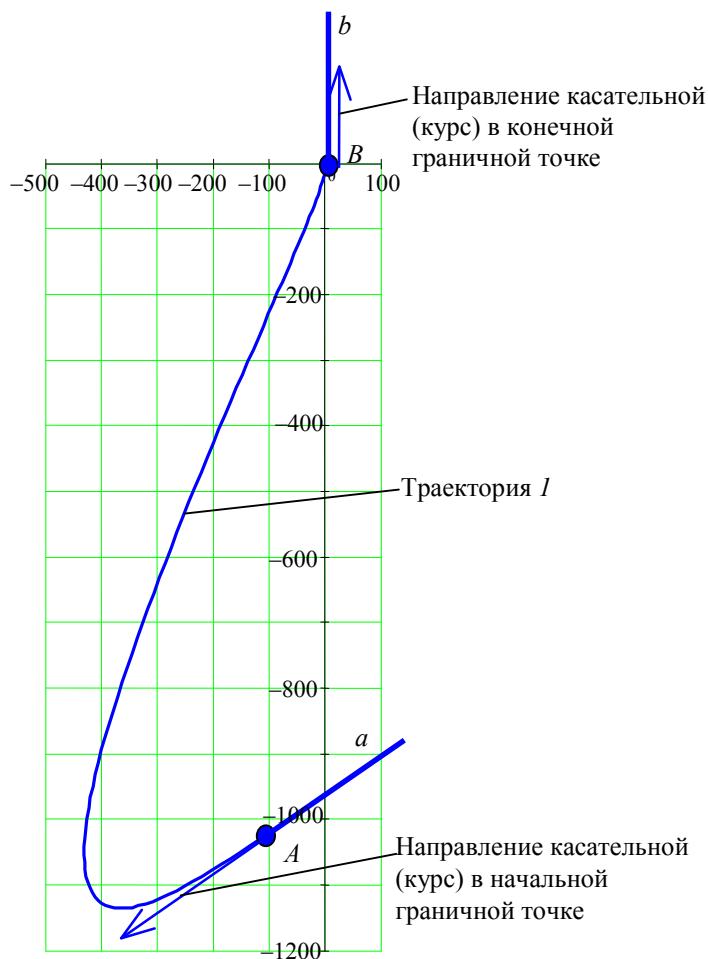


Рис. 1

С помощью изложенной выше методики получены двумерные векторные коэффициенты базисного полинома Бернштейна (см. табл. 1), который задает траекторию  $I$ , показанную на рис. 1.

Таблица 1

| Координата | $a_0$    | $a_1$     | $a_2$     | $a_3$  | $a_4$  | $a_5$ |
|------------|----------|-----------|-----------|--------|--------|-------|
| $X$        | -100     | -456,118  | -812,236  | 0      | 0      | 0     |
| $Y$        | -1,02E+3 | -1,226E+3 | -1,431E+3 | -79,52 | -39,76 | 0     |

График кривизны траектории  $l$  приведен на рис. 2. Минимальный радиус кривизны траектории  $l$  равен 51,8 м. Для полиномов с мономиальным базисом и базисом Бернштейна обобщенные оценки чисел обусловленности равны соответственно  $S_{mv}=7823$  и  $S_{bv}=515$ ,  $S_{mv}/S_{bv}=15,2$ .

На рис. 3 показаны верхние границы четырех допустимых областей для начальных точек расчетных траекторий, представленных в виде параметрических полиномиальных кривых пятого порядка. Четыре области соответствуют четырем значениям курса объекта в начальной точке траектории: 0, 30, 60, 90°. В каждой области возможно построение расчетной траектории, начинающейся в любой точке этой области, с начальной кривизной траектории, равной нулю, и заканчивающейся в точке (0, 0) с курсом 0 и кривизной, равной нулю. Допустимая область, соответствующая начальному курсу 90°, на рис. 3 заштрихована.

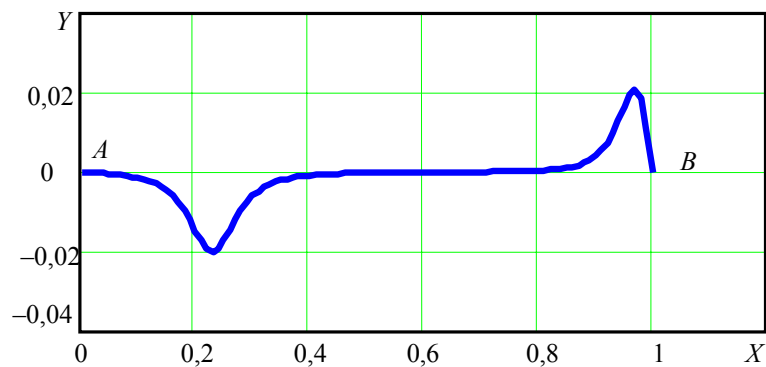


Рис. 2

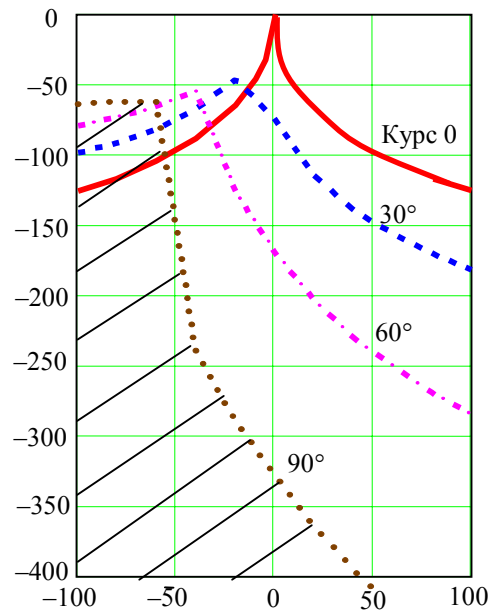


Рис. 3

**Пример 2.** Рассмотрим вариант построения расчетной траектории летательного аппарата, которая обеспечивает разворот на 180° с набором высоты. После горизонтального прямолинейного полета по траектории  $a$  аппарат начинает разворот в точке  $A = (-100, 0, 100)$  с курса 180°, приходит в точку  $B = (0, 0, 150)$  с курсом 0 и продолжает горизонтальный полет по прямой  $b$ . В граничных точках  $A$  и  $B$  кривизна траектории равна нулю:  $k_A = k_B = 0$ . С использованием приведенной методики получены трехмерные векторные коэффициенты базисного полинома Бернштейна (см. табл. 2), который задает траекторию 2, показанную на рис. 4.

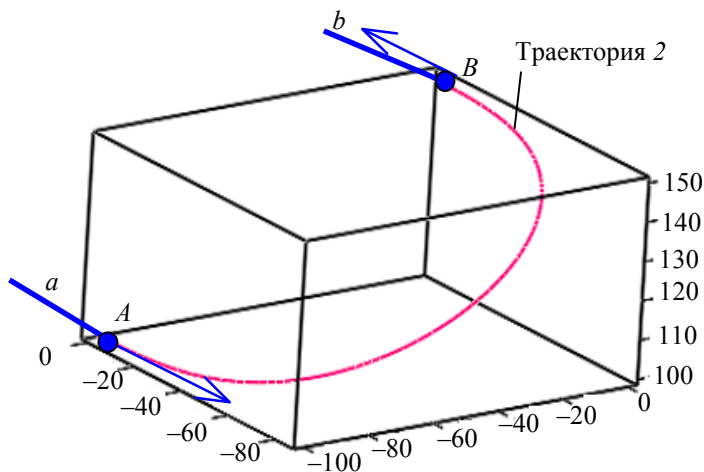


Рис. 4

Таблица 2

| Координата | $a_0$ | $a_1$  | $a_2$    | $a_3$   | $a_4$  | $a_5$ |
|------------|-------|--------|----------|---------|--------|-------|
| X          | -100  | -100   | -100     | 0       | 0      | 0     |
| Y          | 0     | -54,68 | -109,361 | -109,36 | -54,68 | 0     |
| Z          | 0     | 0      | 0        | 50      | 50     | 0     |

**Заключение.** Предложенная в статье методика расчета планируемых траекторий перемещения на плоскости аппаратов, управляемых автоматически или человеком, позволяет обеспечить повышение точности следования заданным траекториям, а также выявить ситуации, когда выход на заданную траекторию по расчетной, состоящей из одного участка, невозможен; кроме того, несложное обобщение представленной методики позволяет применить ее к расчету траекторий в трехмерном пространстве.

**ПРИЛОЖЕНИЕ**

В работе [3] вводятся числа обусловленности  $S_m(u)$  и  $S_b(u)$  для вычисления полиномов с мономиальным базисом и базисом Бернштейна соответственно:

$$S_m(u) = \sum_{k=0}^n |c_k u^k|; \quad S_b(u) = \sum_{k=0}^n |a_k B_k^n(u)|,$$

где  $c_k$  и  $a_k$  — числовые коэффициенты.

Выражения  $S_m(u)\epsilon$  и  $S_b(u)\epsilon$  оценивают погрешности вычисленных результатов для соответствующих полиномов, вызванные изменением их коэффициентов на некоторую относительную величину  $\epsilon$ . Из выкладок, приведенных в работе [3, разд. 3.4, доказательство теоремы 1], следует, что число обусловленности полинома в мономиальном базисе не меньше числа обусловленности этого полинома в базисе Бернштейна:

$$S_m(u) \geq S_b(u).$$

В работе [4] доказано, что алгоритм вычисления полинома по схеме Горнера является обратно устойчивым. Поэтому числа обусловленности полиномов с мономиальным базисом и базисом Бернштейна могут использоваться для оценки погрешности результатов соответствующих полиномов, вызванных погрешностями округления в арифметических операциях.

Для оценки на отрезке  $[0, 1]$  чисел обусловленности соответствующих полиномов можно использовать усредненные числа обусловленности  $S_m$  и  $S_b$ :

$$S_m = \int_0^1 S_m(u) du, \quad S_b = \int_0^1 S_b(u) du.$$

Так как в настоящей статье рассматриваются полиномы с векторными коэффициентами, то каждый такой полином можно интерпретировать как соответствующий размерности векторных коэффициентов набор полиномов со скалярными коэффициентами. В качестве обобщенной оценки числа обусловленности векторного полинома используется евклидова норма вектора, составленного из усредненных чисел обусловленности. Для полиномов с мономиальным базисом и базисом Бернштейна обобщенные оценки чисел обусловленности обозначаются символами  $S_{mv}$  и  $S_{bv}$  соответственно.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пелевин Л. К., Каменская А. А. О синтезе оперативных траекторий при стабилизации судна на системе галсов и заданном маршруте // Сб. трудов XXXI Всерос. конф. „Управление движением морских судов и специальных аппаратов“. М.: ИПУ РАН, 2004.
2. Фокс А., Пратт М. Вычислительная геометрия. М.: Мир, 1982.
3. Farouki R. T., Rajan V.T. On the numerical condition of polynomials in Bernstein form // Computer Aided Geometric Design, North-Holland. 1987. N 4. P. 191—216.
4. Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра. М.: Мир, 2001.

#### *Сведения об авторах*

- Георгий Моисеевич Довгоброд** — канд. техн. наук; ЦНИИ „Курс“, Москва; вед. науч. сотрудник;  
E-mail: grsud@kyrs.ru
- Лев Михайлович Клячко** — канд. техн. наук; ЦНИИ „Курс“, Москва; генеральный директор;  
E-mail: klyachko@kyrs.ru
- Андрей Владимирович Рогожников** — канд. техн. наук; ЦНИИ „Курс“, Москва; зам. главного инженера;  
E-mail: rav@kyrs.ru

Рекомендована кафедрой  
систем автоматического управления  
МГТУ им. Н. Э. Баумана

Поступила в редакцию  
15.10.08 г.