УДК 62.50

Е. Д. Лихолетов, А. В. Ушаков, А. Ю. Цвентарный

АНАЛИЗ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ПЕРЕКРЕСТНЫХ СВЯЗЕЙ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ КЛАССА „ДВУМЕРНЫЙ ВХОД — ВЫХОД“ С КВАЗИОДНОТИПНЫМИ КАНАЛАМИ

На основе зависимости между запасом устойчивости сепаратных однотипных каналов и аргументом матрицы вращения межканальных связей решается задача обеспечения работоспособности динамической системы с квазиоднотипными каналами в параметризованном оценкой степени неоднотипности виде.

Ключевые слова: *динамическая система, перекрестные связи, матрица вращения, запас устойчивости, степень неоднотипности.*

Постановка задачи. Рассматривается проблема построения автоматических систем с „квазиоднотипными“ каналами, использующих принцип пространственного слежения или следящего измерительного преобразования. Такие системы, как правило, являются двухканальными и характеризуются наличием перекрестных межканальных связей с матрицей типа „матрица вращения“ (МВ), причем аргумент μ МВ является интервальным и представляется в форме $[\mu]=[\underline{\mu},\overline{\mu}]$, где $\underline{\mu}$, $\overline{\mu}$ — его левое и правое угловое значение соответственно.

Настоящая статья является логическим развитием положений статьи [1], посвященной анализу перекрестных связей в непрерывных динамических системах (ДС) класса „двумерный вход — выход“ (ДВВ) с однотипными каналами. В работе [1] на основе связи запаса устойчивости сепаратного канала с аргументом μ МВ перекрестных несимметричных связей, при котором система типа ДВВ становится неустойчивой, по существу вводится понятие „квазизапаса устойчивости по фазе“ сепаратного канала в форме указанного значения аргумента μ.

В дополнение к полученным в работе [1] результатам, в настоящей статье решается задача оценки вариации квазизапаса системы типа ДВВ как функции оценки степени неоднотипности сепаратных каналов такой системы.

Квазиоднотипные каналы. Оценка степени неоднотипности сепаратных каналов. Рассмотрим динамическую систему типа „двумерный вход — выход“, структурная схема которой приведена на рис. 1. Здесь g_i, ε_i, y_i, $i=1,2$, — внешнее воздействие, ошибка слежения и выход i-го сепаратного канала соответственно; $[\mu]$ — интервальный аргумент матрицы межканальных связей (матрицы вращения) $T=\mathrm{col}\{[\cos[\mu] \quad \sin[\mu]], [-\sin[\mu] \quad \cos[\mu]]\}$; ν_1, ν_2 — переменные, образующие двумерный выход матрицы T; $W_i(s)$ — передаточная функция прямой цепи i-го, $i=1, 2$, сепаратного канала спроектированной системы, имеющая представление

$$W_i(s)=M_i(s)N_i^{-1}(s), \tag{1}$$

где $M_i(s), N_i(s)$ — полиномы с вещественными коэффициентами степенью m и n ($m<n$) соответственно при $i=1, 2$, образующие при $[\mu]=[0,0]$ характеристический полином $D_i(s)$ каждого сепаратного канала в замкнутом виде в силу соотношения:

$$D_i(s)=N_i(s)+M_i(s). \tag{2}$$

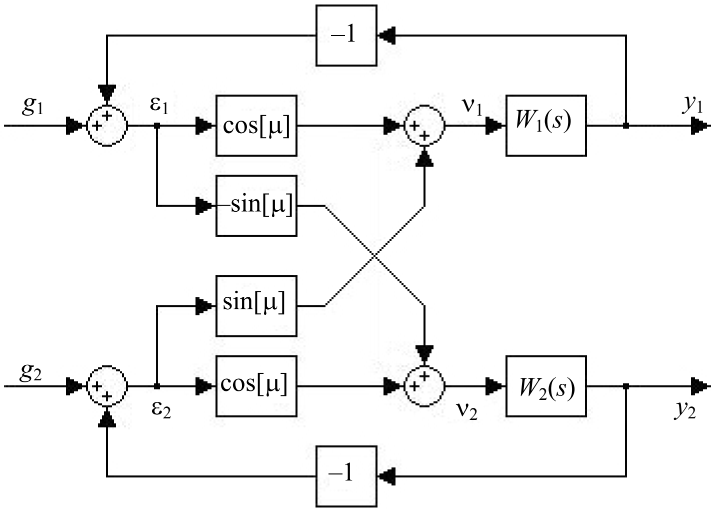

Рис. 1

Утверждение 1. Характеристический полином $D_\Sigma(\lambda, \mu)$ системы типа ДВВ (см. рис. 1), параметризованный аргументом μ МВ межканальных связей, имеет представление

$$D_\Sigma(\lambda, \mu)=D_1(\lambda)D_2(\lambda)-\{M_1(\lambda)N_2(\lambda)+M_2(\lambda)N_1(\lambda)\}(1-\cos\mu), \tag{3}$$

где $D_1(\lambda), D_2(\lambda)$ — характеристические полиномы сепаратных каналов системы, формируемые в силу соотношения (2).

Доказательство утверждения опирается на прямое применение формулы Мейсона [2] к структурной схеме системы ДВВ (см. рис. 1) с последующим использованием в соотношениях (1) и (2). ■

Введем в рассмотрение определение „квазиоднотипности сепаратных каналов“ системы ДВВ.

О п р е д е л е н и е 1. Сепаратные каналы называются квазиоднотипными, если передаточные функции $W_i(s)$, $i=1, 2$, их прямых цепей имеют представления

$$W_i(s)=W(s, \omega_{0i})=\frac{1}{s}\frac{\nu_n\omega_{0i}^n}{s^{n-1}+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\nu_k\omega_{0i}^k s^{n-1-k}}, \tag{4}$$

где ω_{0i} — характеристическая частота полиномиальной динамической модели (4), принимающая для каждого i свое значение и тем самым определяющая свой набор показателей качества в переходном и установившемся режимах i-го сепаратного канала.

Очевидно, что при $\omega_{0i}=\omega_0$, $i=1, 2$, система ДВВ (см. рис. 1) вырождается в систему с однотипными каналами, характеризующимися передаточной функцией $W_i(s)=W(s, \omega_0)$.

Введем, далее, определение оценки γ степени неоднотипности квазиоднотипных сепаратных каналов.

Определение 2. Будем характеризовать квазиоднотипные сепаратные каналы системы ДВВ с передаточными функциями прямых цепей вида (4) оценкой γ степени их неоднотипности, если эти передаточные функции имеют представление:

$$W_1(s) = W(s, \omega_0) = \frac{1}{s} \frac{\nu_n \omega_0^n}{s^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \nu_k \omega_0^k s^{n-1-k}} = \frac{\nu_n \omega_0^n}{s^n + \sum_{k=1}^{n-1} \nu_k \omega_0^k s^{n-k}}, \quad (5)$$

$$W_2(s) = W(s, \gamma\omega_0) = \frac{1}{s} \frac{\nu_n (\gamma\omega_0)^n}{s^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \nu_k (\gamma\omega_0)^k s^{n-1-k}} = \frac{\nu_n (\gamma\omega_0)^n}{s^n + \sum_{k=1}^{n-1} \nu_k (\gamma\omega_0)^k s^{n-k}}. \quad (6)$$

Очевидно, что при $\gamma = 1$ передаточные функции (5) и (6) совпадают, и система ДВВ вырождается в систему с однотипными каналами.

Для дальнейших исследований воспользуемся положениями следующего утверждения.

Утверждение 2. Квазиоднотипные сепаратные каналы системы ДВВ с передаточными функциями прямых цепей вида (4) или (5), (6) обладают одинаковыми запасами устойчивости $\Delta\varphi_i = \Delta\varphi$ при любых реализациях характеристических частот ω_{0i} (или оценки γ степени их неоднотипности).

Доказательство утверждения осуществим, опираясь на представления (4). Введем в рассмотрение комплексные переменные

$$s_i = s/\omega_{0i}, \quad i = 1, 2. \quad (7)$$

Если теперь все элементы числителя и знаменателя передаточной функции (4) поделить на $(\omega_{0i})^n$ и воспользоваться уравнением (7), то для передаточных функций (4) получим представления

$$W(s_i) = \frac{1}{s_i} \frac{\nu_n}{s_i^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \nu_k s_i^{n-1-k}}; \quad i = 1, 2.$$

Коэффициенты числителей и знаменателей передаточных функций $W_i(s_i)$, $i = 1, 2$, совпадают, а поэтому их запасы устойчивости как по амплитуде, так и по фазе оказываются одинаковыми. ■

Обратимся к некоторым, необходимым при дальнейших исследованиях, результатам работы [1], излагаемым далее в виде системы утверждений.

Утверждение 3. При $\gamma = 1$ система ДВВ (см. рис. 1) с помощью процедуры комплексирования векторных переменных $g = \mathrm{col}\{g_i; i = 1,2\}$, $\varepsilon = \mathrm{col}\{\varepsilon_i; i = 1,2\}$, $y = \mathrm{col}\{y_i; i = 1,2\}$ в форме $g^* = g_1 + jg_2$, $\varepsilon^* = \varepsilon_1 + j\varepsilon_2$, $y^* = y_1 + jy_2$ может быть приведена к комплексированному скалярному представлению прямой цепи в виде

$$y^*(s) = W_{\text{экв}}(s)\varepsilon^*(s)$$

с передаточной функцией прямой цепи

$$W_{\text{экв}}(s) = e^{-j[\mu]} W(s). \quad (8)$$

Доказательство утверждения приведено в работе [1]. ■

Утверждение 3 делает справедливыми положения утверждения 4.

Утверждение 4. При $\gamma=1$ система ДВВ (см. рис. 1), описываемая передаточной функцией (8) относительно комплексированных скалярных переменных $\varepsilon^*(s)$, $y^*(s)$, оказывается на границе устойчивости, если интервальный аргумент $[\mu]$ матрицы T удовлетворяет условию

$$\|[\mu]\|=\Delta\varphi,$$

где $\Delta\varphi$ — запас устойчивости по фазе сепаратного канала с передаточной функцией $W(s)$.

Доказательство утверждения опирается на комплексную запись представления (8), получаемую подстановкой $s=j\omega$, которая порождает цепочку равенств

$$W(j\omega)=e^{-j[\mu]}\left|W(j\omega)\right|e^{j\varphi(\omega)}=e^{-j\{[\mu]-\Delta\varphi(\omega)\}}\left|W(j\omega)\right|e^{-j\pi}=-\left|W(j\omega)\right|e^{-j\{[\mu]-\Delta\varphi(\omega)\}}. \qquad (9)$$

Если в уравнении (9) положить $\omega=\omega_{\text{c}}=\arg\left\{\left|W(j\omega)\right|=1\ \&\ \Delta\varphi(\omega)=\Delta\varphi\right\}$, то оно принимает следующий вид:

$$W_{\text{экв}}(j\omega_{\text{c}})=e^{-j\{[\mu]-\Delta\varphi\}},$$

где ω_{c} — характеристическая частота сепаратного канала. ■

П р и м е ч а н и е 1. Положения утверждения 4 позволяют осуществить деинтервализацию интервального параметра $[\mu]=\left[\underline{\mu},\overline{\mu}\right]$ путем перехода от интервального значения $[\mu]=\left[\underline{\mu},\overline{\mu}\right]$ к сосредоточенному значению μ, определяемому соотношением

$$\mu=\max\left\{\left|\underline{\mu}\right|,\left|\overline{\mu}\right|\right\}. \qquad (10)$$

П р и м е ч а н и е 2. Положения утверждения 4 сохраняются, если в нем вместо интервального значения $[\mu]$ положить сосредоточенное значение μ, вычисляемое в виде (10).

П р и м е ч а н и е 3. Утверждение 4 определяет способ экспериментального (в модельной среде) определения запаса $\Delta\varphi$ устойчивости по фазе произвольной системы типа „одномерный вход — выход“ (ОВВ). Реализация этого способа требует построения модельного прототипа исследуемой системы типа ОВВ. Для этого необходимо объединить две системы ОВВ в соответствии со схемой, представленной на рис. 1, с помощью прямых перекрестных связей, образующих МВ с параметром μ, и фиксации значения μ_φ этого параметра, при котором сформированная система ДВВ оказывается на границе устойчивости. Это значение параметра μ принимается за оценку запаса устойчивости исследуемой системы ОВВ в форме $\Delta\varphi=\mu_\varphi$.

Положениями утверждения 4 и примечания 2 обусловлена постановка задачи максимизации запаса устойчивости по фазе системы ДВВ (см. рис. 1) с тем, чтобы гарантировать ее работоспособность путем обеспечения устойчивости при возможном, неконтролируемом в процессе эксплуатации системы, увеличении зоны интервального параметра $[\mu]=\left[\underline{\mu},\overline{\mu}\right]$, а следовательно, порождаемого им деинтервализированного сосредоточенного параметра μ (10).

Как показали исследования, результаты которых представлены в работе [1], решение этой задачи в рамках модальных представлений стандартных полиномиальных динамических моделей (ПДМ) сепаратных каналов системы ДВВ приводит к необходимости использовать модифицированные биномиальные распределения мод характеристического полинома $D(\lambda)=D(\lambda,\omega_0)$ ПДМ.

В качестве модифицируемой версии распределения мод примем версию биномиального распределения, параметризованную „шагом модификации“ ν и записываемую в виде

$$D(\lambda)=D(\lambda,\omega_0,\nu)=\prod_{i=0}^{n-1}\left(\lambda+\omega_0\left(1+i\nu\right)\right), \quad (11)$$

где λ — корень характеристического полинома.

Очевидно, что при $\nu=0$ модифицированное биномиальное распределение принимает вид канонического биномиального распределения.

Основной результат. Связь вариации оценки запаса устойчивости сепаратных каналов с вариацией оценки степени их неоднотипности. Решение проблемы перекрестных связей в динамических системах ДВВ с квазиоднотипными каналами, характеризующихся оценкой степени неоднотипности $\gamma\neq1$, встречает сложности, состоящие в том, что, в отличие от случая $\gamma=1$, при $\gamma\neq1$ не удается привести систему ДВВ к комплексированному скалярному представлению.

В этой связи задача может быть решена двумя способами: первый способ, опирающийся на соотношение (3), позволяет решить задачу аналитически на основе использования характеристического полинома агрегированной через матрицу связей системы, параметризованной аргументом μ. Действительно, сосредоточенное значение $\mu=\mu_\varphi=\Delta\varphi$ параметра МВ при произвольном значении γ, которое в соответствии с примечанием 3 оценивается экспериментально, может быть определено соотношением

$$\Delta\varphi=\mu_\varphi=\arg\left\{D_\Sigma(\lambda,\mu)=0:\ \exists\,\lambda_l(\mu):\mathrm{Re}(\lambda_l(\mu))=0;\ l\in\overline{1,2n}\right\}.$$

Второй способ позволяет решить задачу на основе полученных экспериментальных данных о зависимости запаса устойчивости по фазе $\Delta\varphi$ от величины γ. Этот способ реализуется в соответствии со следующим алгоритмом.

Алгоритм.

1. На основе экспертной оценки разрабатываемой системы ДВВ установить возможные угловые значения интервального представления $[\mu]=[\underline{\mu},\overline{\mu}]$ параметра МВ перекрестных несимметричных межканальных связей [3].

2. Осуществить деинтервализацию параметра $[\mu]$ в виде (10).

3. Произвести предварительный анализ сепаратных каналов системы ДВВ на предмет оценки их размерности n.

4. В классе ПДМ размерности n с максимизированным в соответствии с соотношением (11) запасом устойчивости по фазе осуществить выбор ПДМ, параметризованной аргументом μ согласно рекомендациям, изложенным в работе [1].

5. Произвести поканальный синтез системы ДВВ в соответствии с требованиями к динамическим показателям сепаратных каналов в переходном и установившемся режимах с использованием ПДМ, выбранной в п. 4.

6. Решить задачу максимизации запасов устойчивости каждого из сепаратных каналов системы ДВВ на основе соотношения (11).

7. Положить в исследуемой системе ДВВ значение $\gamma=1$. Произвести экспериментальную оценку в модельной среде запаса устойчивости по фазе в соответствии с соотношением $\mu=\mu_\varphi=\Delta\varphi$.

8. Задать диапазон изменения значения оценки γ: $0{,}1\le\gamma\le10$.

9. Произвести экспериментальную оценку в модельной среде вариаций $\Delta\Delta\varphi$ в функции от оценки γ: $\Delta\Delta\varphi=\mu(\gamma)-\mu_\varphi$.

10. Фиксировать знак вариации $\Delta\varphi = \Delta\varphi(\gamma)$ в возможном диапазоне изменения γ.

11. В соответствии с результатами, полученными при выполнении п. 10, можно внести коррективы в алгоритм [1] поканального синтеза системы ДВВ, гарантирующего требуемые динамические свойства системы и ее работоспособность в заданном диапазоне вариаций параметра $[\mu]$.

В соответствии с приведенным алгоритмом проведено исследование систем ДВВ размерности $n = \overline{2, 5}$, сепаратные каналы которых построены:

— с распределением мод Баттерворта (РМБ);
— с биномиальным распределением мод Ньютона (БРМН);
— с модифицированным распределением мод Ньютона (МРМН).

Полученные результаты представлены в виде приведенных на рис. 2, *а—г* графиков, демонстрирующих симметрию зависимости $\Delta\Delta\varphi = \Delta\Delta\varphi(\gamma)$: *а* — РМБ, *б* — БРМН, *в* — МРМН при ν=5, *г* — МРМН при ν=20. Более того, при $\gamma \in \forall$ величины $\Delta\Delta\varphi(\gamma)$ оказались положительными, что, по-видимому, не потребует изменения алгоритма синтеза, приведенного в работе [1], так как при $\gamma \neq 1$ система характеризуется повышенным запасом устойчивости по фазе.

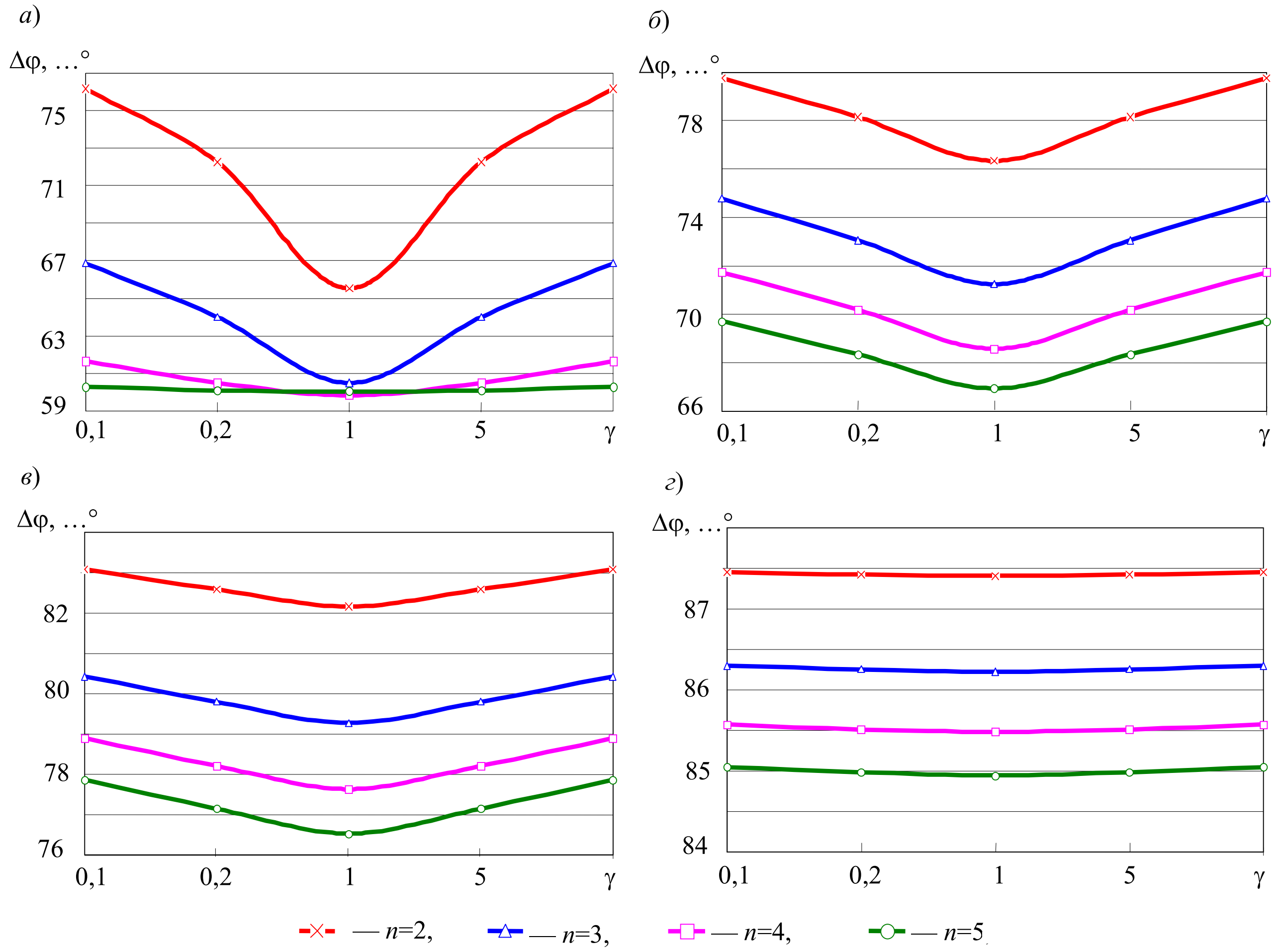

Рис. 2

Результаты компьютерного эксперимента. Для иллюстрации полученных результатов в программе MatLab Simulink проведено исследование двух версий двухканальной динамической системы (см. рис. 1), каналы которой построены с использованием ПДМ третьего порядка с модифицируемым биномиальным распределением для значений $\nu = 1$ и $\nu = 5$ при $\gamma = 5$, и $\omega_0 = 10\ \text{с}^{-1}$ и $\mu = 0$, 30 и 75°.

Графики процессов в пространстве выходов двумерной системы при входном векторном скачкообразном единичном воздействии приведены на рис. 3, *а*—*е*.

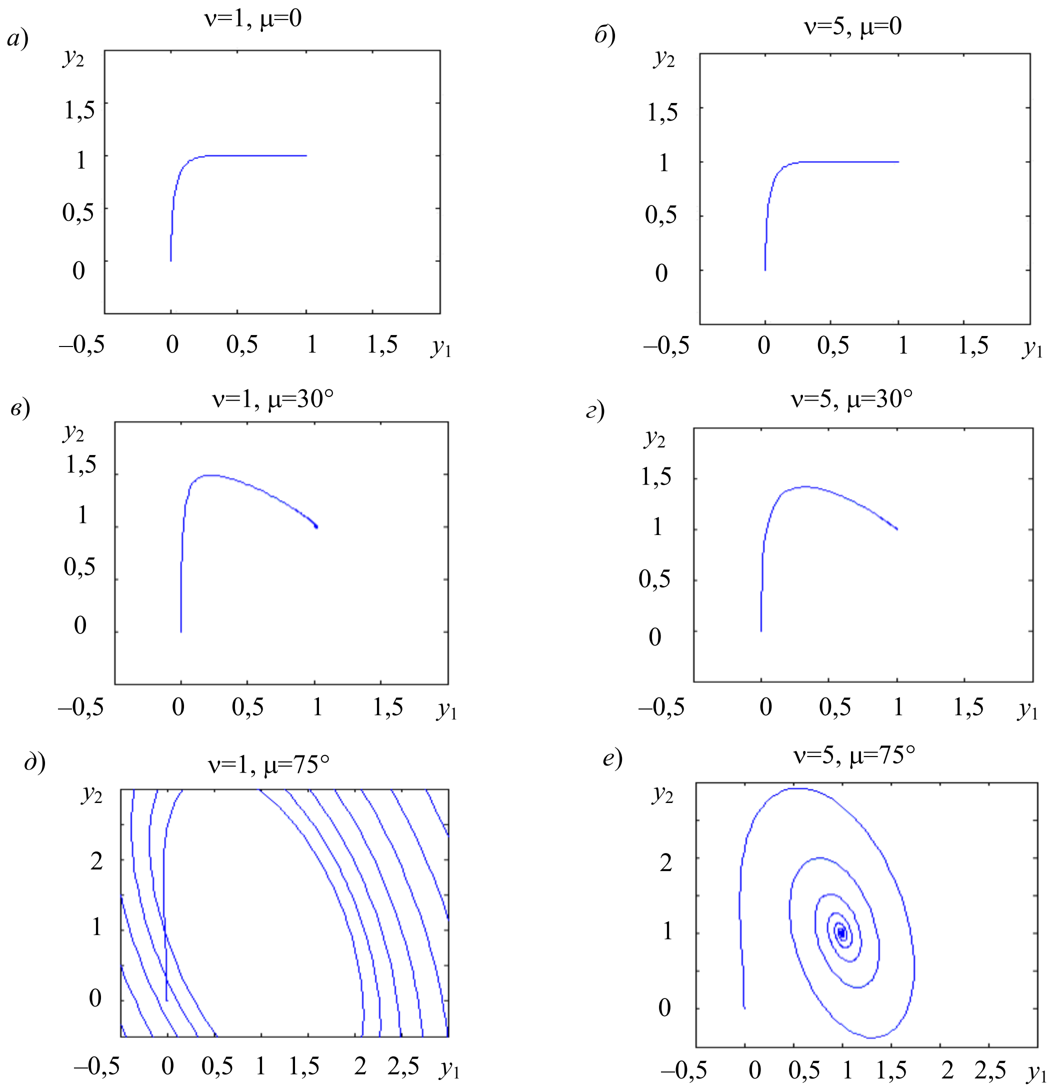

Рис. 3

ПДМ третьего порядка с МРМН при $\nu=1$ обладает запасом устойчивости $\Delta\varphi=73{,}78°$, а при $\nu=5$ $\Delta\varphi=79{,}27°$. Как и следовало ожидать, при $\mu=75°$ и $\nu=1$ (см. рис. 3, *д*) система оказывается неработоспособной, в то время как при $\mu=75°$ и $\nu=5$ (см. рис. 3, *е*) система остается работоспособной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лихолетов Е. Д., Ушаков А. В., Цвентарный А. Ю.* Анализ перекрестных связей в динамических системах класса „двумерный вход — выход“ с однотипными каналами // Изв. вузов. Приборостроение. 2009. Т. 52, № 7. С. 35—42.

2. *Дорф Р., Бишоп Р.* Современные системы управления: Пер. с англ. М.: Лаборатория базовых знаний, 2004.

3. *Дударенко Н. А., Слита О. В., Ушаков А. В.* Математические основы современной теории управления: аппарат метода пространства состояний: Учеб. пособие / Под ред. *А. В. Ушакова*. СПб.: СПбГУ ИТМО, 2008.

Сведения об авторах

Евгений Дмитриевич Лихолетов — студент; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; E-mail: bsboris@gmail.com

Анатолий Владимирович Ушаков — д-р. техн. наук, профессор; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики;
E-mail: ushakov-AVG@yandex.ru

Артем Юрьевич Цвентарный — аспирант; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; E-mail: Taifyn@nm.ru

Рекомендована кафедрой
систем управления и информатики

Поступила в редакцию
20.02.09 г.