УДК 517.977.5

А. А. Александров

# ОПТИМИЗАЦИЯ ДИНАМИКИ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА ПО РАЗЛИЧНЫМ КРИТЕРИЯМ

Рассматривается решение задачи оптимального управления летательным аппаратом как твердым телом, динамика которого описывается уравнениями Эйлера и Пуассона. Исследуется вопрос построения оптимальных траекторий движения ЛА с помощью алгоритма последовательной оптимизации по иерархии критериев качества и с использованием принципа максимума Понтрягина. Приведен сравнительный анализ полученных результатов.

***Ключевые слова:*** *летательный аппарат, оптимальное управление, принцип максимума Понтрягина.*

**Постановка задачи.** При управлении летательным аппаратом (ЛА) важной задачей является определение оптимальных траекторий его движения на различных участках полета. Исследуем управляемое пространственное движение ЛА. Требуется привести его из начального состояния в заданное конечное при минимизации затрат на управление.

Уравнения динамики ЛА как твердого тела содержат [1, 2]:

— уравнения Эйлера, описывающие движение центра масс в связанной системе координат (СК):

$$\dot{v} = \Omega v + g(n - \varepsilon_2), \tag{1}$$

где $v$ — вектор абсолютной земной скорости, $g$ — ускорение свободного падения, $n$ — вектор перегрузок, $\Omega$ — матрица Пуассона, $\varepsilon_2$ — элемент матрицы направляющих косинусов $\varepsilon$;

— уравнение Пуассона, описывающее динамику направляющих косинусов между осями связанной и нормальной СК:

$$\dot{\varepsilon} = \Omega\varepsilon; \tag{2}$$

— уравнения для определения географических координат:

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{h} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = d^*\varepsilon v, \quad d^* = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_3 + h} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{(R_3 + h)\cos\varphi} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

где $R_3$ = 6 375 км — радиус Земли, $h$ — высота полета, $\varphi$ и $\lambda$ — широта и долгота положения ЛА.

Матрица Пуассона (кососимметрическая)

$$\Omega = -\Omega^T = \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix},$$

где $\omega$ — вектор угловой скорости ЛА относительно земной нормальной системы координат, представленный в проекциях на оси связанной СК.

Матрица направляющих косинусов между осями связанной и нормальной систем координат $\varepsilon^T = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, где $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$ — соответствующие векторы, представлена в таблице, где $\gamma$, $\vartheta$, $\psi$ — углы крена, тангажа и рыскания; $y_g$, $x_g$, $z_g$ — линейные координаты высоты, продольной и боковой дальности.

| Координата | $x_g$ | $y_g$ | $z_g$ |
|---|---|---|---|
| $x$ | $\varepsilon_{11} = \cos\psi \cdot \cos\vartheta$ | $\varepsilon_{21} = \sin\vartheta$ | $\varepsilon_{31} = -\sin\psi \cdot \cos\vartheta$ |
| $y$ | $\varepsilon_{12} = \sin\psi \cdot \sin\gamma - -\cos\psi \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\gamma$ | $\varepsilon_{22} = \cos\vartheta \cdot \cos\gamma$ | $\varepsilon_{32} = \cos\psi \cdot \sin\gamma + +\sin\psi \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\gamma$ |
| $z$ | $\varepsilon_{13} = \sin\psi \cdot \cos\gamma + +\cos\psi \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\gamma$ | $\varepsilon_{23} = -\cos\vartheta \cdot \sin\gamma$ | $\varepsilon_{33} = \cos\psi \cdot \cos\gamma - -\sin\psi \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\gamma$ |

Представим вектор состояния в виде $x = \left[x_1^T, x_2^T, x_3^T, x_4^T, x_5^T\right]^T$, где $x_1 = \varepsilon_1 = \left(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}\right)^T$, $x_2 = \varepsilon_2 = \left(\varepsilon_{21}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{23}\right)^T$, $x_3 = \varepsilon_3 = \left(\varepsilon_{31}, \varepsilon_{32}, \varepsilon_{33}\right)^T$, $x_4 = \left(v_x, v_y, v_z\right)^T$, $x_5 = \left(\varphi, h, \lambda\right)^T$. При этом $\dot{y}_g = \dot{h}$, $\dot{x}_g = (R_З + h)\dot{\varphi}$, $\dot{z}_g = (R_З + h)\cos\varphi \cdot \dot{\lambda}$.

Задача состоит в приведении ЛА из начального состояния $x(t_0) = x_0$: $\psi_0 = \vartheta_0 = \gamma_0 = 0$, $x_{g_0} = 0$, $y_{g_0} = 200$ м, $z_{g_0} = 0$, $v_{x_0} = 300$ м/с, $v_{y_0} = v_{z_0} = 0$, в конечное $x_f$: $\psi_f = \gamma_f \approx 0$, $\vartheta_f \in$ $\in [0 \div 5]°$, $x_{g_f} = 2000$ м, $y_{g_f} = 0$, $z_{g_f} = –200$ м, $v_{y_f} = v_{z_f} \approx 0$. Таким образом планируется осуществить маневр по $S$-образной траектории при выполнении условий равенства углов и соответствующих проекций скоростей на левом и правом концах траектории.

**Оптимизация динамики ЛА по иерархии критериев.** В настоящее время известно несколько способов решения рассматриваемой задачи. Согласно одному из них оптимизация динамики ЛА производится по функционалу обобщенной работы Красовского [1—3]:

$$I = V\left[x, t_2\right] + \int_{t_0}^{t_f} \left[Q(x,t) + \frac{1}{2}u^T k^{-2} u + \frac{1}{2}u_{\text{опт}}^T k^{-2} u_{\text{опт}}\right] dt,$$

где $V$, $Q$ — заданные функции, имеющие непрерывные частные производные по $x$ и $t$.

Рассмотрим более сложное решение задачи определения оптимального режима маневрирования — по иерархии критериев качества для функционалов следующего вида [4]:

$$I_1 = V_1\left[x, t_f\right];$$

$$I_2 = V_2\left[x, t_f\right] + \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{1}{2}u^T k^{-2} u + \frac{1}{2}u_{\text{опт}}^T k^{-2} u_{\text{опт}} + Q(x,t)\right] dt;$$

$$V_1 = \frac{1}{2}\rho_1\left[\arcsin\left(-\frac{\varepsilon_{23}}{\cos(\arcsin\varepsilon_{21})}\right) - \gamma^*\right]^2 + \frac{1}{2}\rho_2\left(\arcsin\varepsilon_{21} - \vartheta^*\right)^2 + \frac{1}{2}\rho_3\left[-\operatorname{arctg}\frac{\varepsilon_{31}}{\varepsilon_{11}} - \psi^*\right]^2;$$

$$V_2 = \frac{1}{2}\rho_4\left(x_{g_f} - x_g^*\right)^2 + \frac{1}{2}\rho_5\left(y_{g_f} - y_g^*\right)^2 + \frac{1}{2}\rho_6\left(z_{g_f} - z_g^*\right)^2,$$

$$Q = \frac{1}{2}\left(n - n^*\right)^T \beta\left(n - n^*\right), \ \beta = \operatorname{diag}\left(\beta_1, \beta_2, \beta_3\right).$$

Здесь $\rho_k$, $k = 1, ..., 6$, $\beta_i$, $i = 1, 2, 3$, — весовые коэффициенты; $u = \left[\dot{n}^T, \dot{\omega}^T\right]^T =$ $= \left[\dot{n}_x, \dot{n}_y, \dot{n}_z, \dot{\omega}_x, \dot{\omega}_y, \dot{\omega}_z\right]^T$ — вектор управления; $\dot{n}_x$, $\dot{n}_y$, $\dot{n}_z$ — производные компонент вектора перегрузки в связанных осях; $\dot{\omega}_x, \dot{\omega}_y, \dot{\omega}_z$ — производные компонент вектора угловых скоростей; индексом „*“ отмечены заданные значения соответствующих переменных.

Управление определяется как $u = u_1 + u_2$, $u_1$ и $u_2$ минимизируют критерии оптимальности $I_1$ и $I_2$ соответственно.

В алгоритме последовательной оптимизации $u_1 = \Delta Y \delta(t)$, $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака. На первом этапе вычисляется величина $\Delta Y$ путем итераций на модели ЛА, описываемой уравнениями (1)—(3), при $u = 0$ из условия минимума критерия $I_1$ по $\Delta Y$ [4]. При этом минимум определяется последовательно для всех компонент вектора управления.

На втором этапе при $Q = 0$ сигнал управления можно найти аналогично способу решения задачи с одним критерием в виде: $u_2 = -k \dfrac{\Delta V_2}{\Delta Y}$. Отличие здесь заключается в том, что приращение $\Delta V_2$ определяется при $Y(t) = Y(t) + \Delta Y(t)$.

Момент времени $t_f$ корректируется на втором этапе уравнением [3] $\dot{t}_f = -k_t^2 H_{t_f}$ в обеспечение условия равенства нулю гамильтониана $H(x, p, u, t)|_{t_f} = 0$.

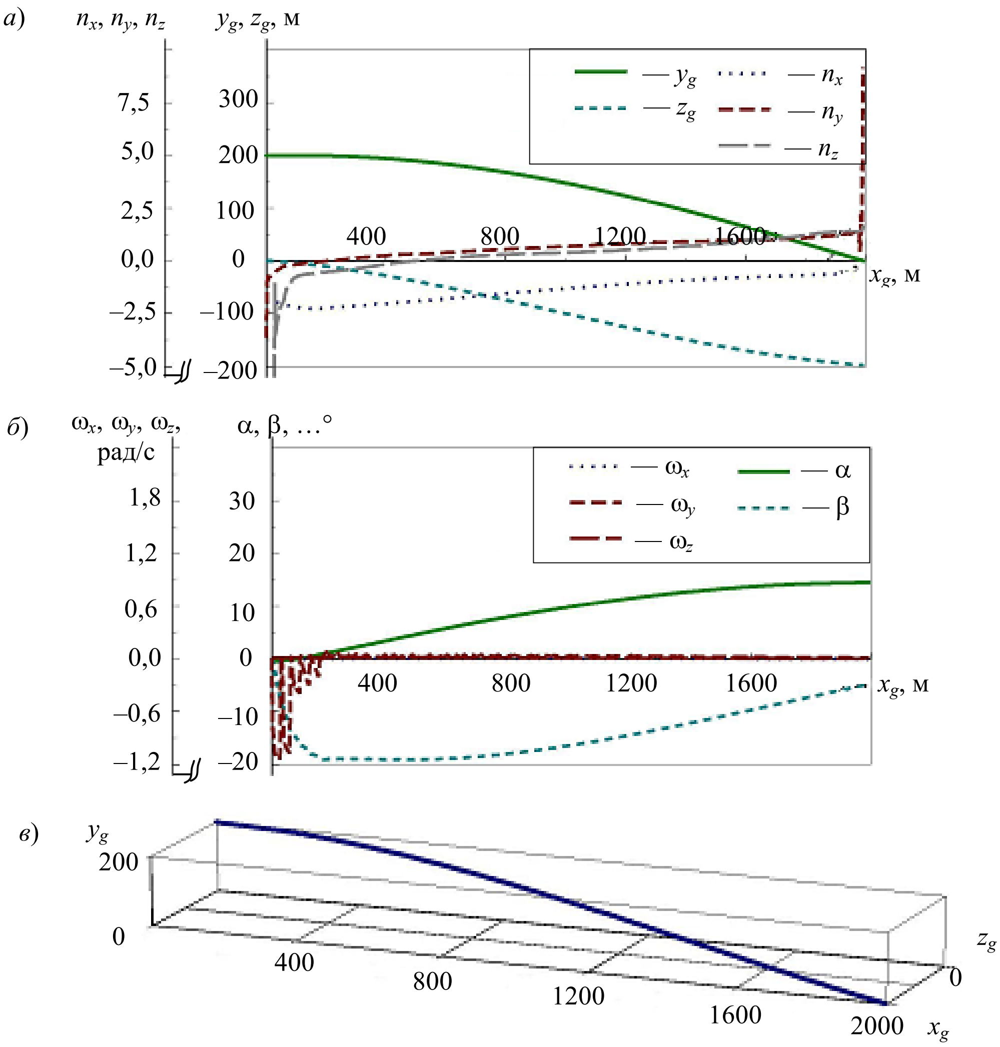


*Рис. 1*

На рис. 1, *а*—*в* представлено решение задачи оптимизации динамики ЛА по иерархии критериев: *а* — проекции оптимальной траектории и зависимости $n_x(x_g)$, $n_y(x_g)$, $n_z(x_g)$; *б* — углы $\alpha(x_g)$, $\beta(x_g)$ и зависимости $\omega_x(x_g)$, $\omega_y(x_g)$, $\omega_z(x_g)$; *в* — пространственный вид оптимальной траектории.

**Оптимизация динамики ЛА при минимизации затрат на управление.** Содержание данного раздела является продолжением и развитием ряда исследований по оптимальному управлению с использованием модели, описанной уравнениями (1)—(3) [1—5]. Оптимальное управление строится по принципу максимума Понтрягина [6].

В качестве целевого функционала выбирается критерий Лагранжа

$$I = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left(u^T k^{-2} u\right) dt,$$

отражающий минимизацию затрат на управление на интервале оптимизации; здесь $k^{-2} = \mathrm{diag}\left[k_1^{-2}, \ldots, k_6^{-2}\right]$, $t_0$ и $t_f$ — начальный заданный и свободный конечный моменты времени соответственно, $u = \left[n^T, \omega^T\right]^T = \left[n_x, n_y, n_z, \omega_x, \omega_y, \omega_z\right]^T$ — вектор управления.

Синтез оптимального управления по принципу максимума [6] сводится к решению двухточечной краевой задачи, которая решается методом Ньютона [7]. Выбранный метод численного решения позволяет добиться сходимости и необходимой точности решения.

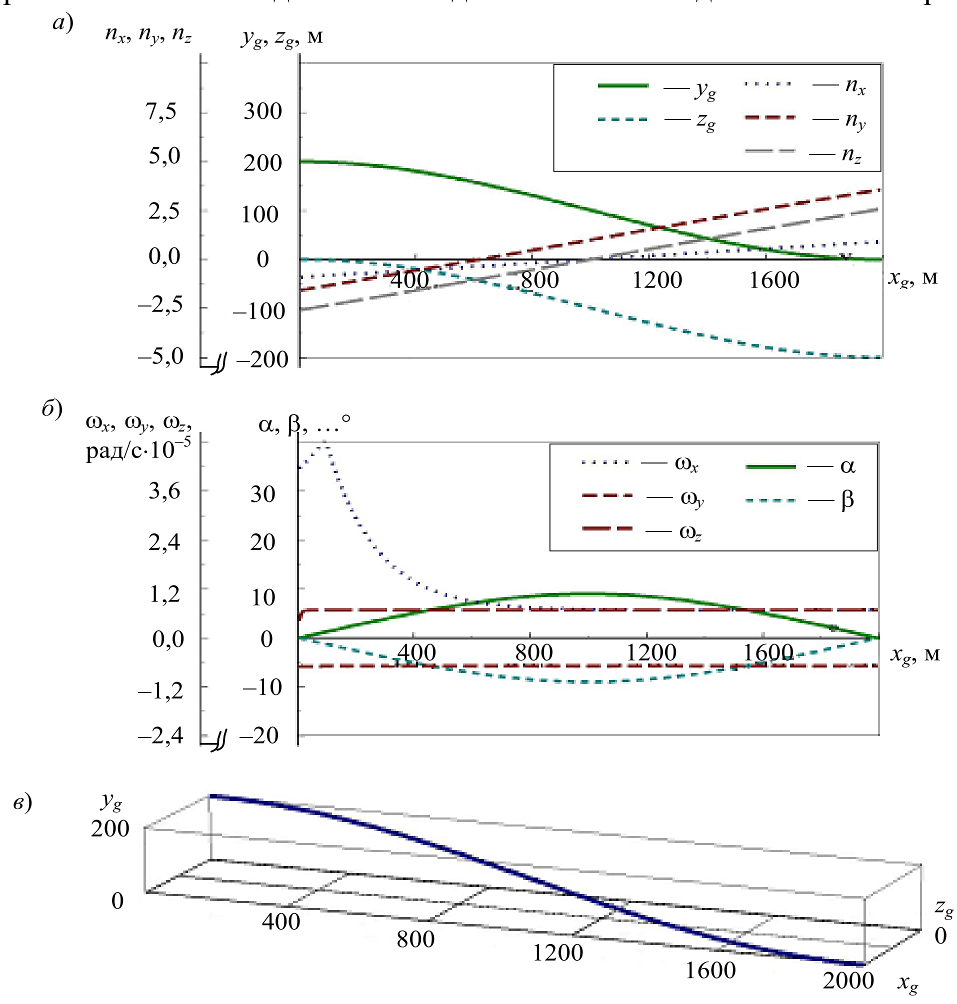


*Рис. 2*

При заданных начальных условиях в течение одной итерации были получены [8] оптимальные начальные значения сопряженных переменных. Решение по критерию Лагранжа представлено на рис. 2, *а*—*в*: *а* — проекции оптимальной траектории и зависимости $n_x(x_g)$, $n_y(x_g)$, $n_z(x_g)$; *б* — углы $\alpha(x_g)$, $\beta(x_g)$ и зависимости $\omega_x(x_g)$, $\omega_y(x_g)$, $\omega_z(x_g)$; *в* — пространственный вид оптимальной траектории.

**Заключение.** Рассмотрена задача построения оптимальных траекторий полета ЛА с помощью алгоритма последовательной оптимизации по иерархии критериев и с использованием принципа максимума. Оба алгоритма позволяют реализовать *S*-образные траектории. Алгоритм последовательной оптимизации имеет вычислительные преимущества по сравнению с решением задачи по принципу максимума за счет использования аналитических выражений для прогнозируемых значений вектора состояния. При решении задачи по принципу максимума Понтрягина при минимизации затрат на управление в вектор невязок можно включить любое количество заданных на правом конце компонент вектора состояния без изменения структуры алгоритма. Полученное по принципу максимума управление отличается близким к линейному характером для данного типа траектории и находится за одну итерацию методом Ньютона.

Исследования показали, что с помощью рассмотренных алгоритмов оптимального управления по различным критериям можно решать задачи маневрирования ЛА в широком диапазоне задания начальных и конечных условий.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красовский А. А.* Метод быстрого численного интегрирования одного класса динамических систем // Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернетика. 1989. № 1. С. 3—14.

2. *Красовский А. А.* Основы алгоритмического обеспечения систем автоматического управления полетом с глубокой интеграцией // Вопросы кибернетики: Проблемы комплексирования кибернетических динамических систем / Науч. совет АН РСФСР по комплексной проблеме „Кибернетика“. М., 1992. С. 6—30.

3. *Кабанов С. А.* Управление системами на прогнозирующих моделях. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1997. 200 с.

4. *Wang H. M., Kabanov S. A.* Optimal control of the return of a flying object on the hierarchy of criterion of quality // Proc. 2002 FIRA Robot World Congress. Seoul, Korea. 2002. P. 187—190.

5. *Кабанов С. А.* Алгоритм последовательной оптимизации со спиральным прогнозом для управления спускаемым аппаратом // Изв. РАН. Сер. Техн. кибернетика. 1993. № 4. С. 141—147.

6. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматлит, 1961. 392 с.

7. *Федоренко Р. П.* Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 488 с.

8. *Кабанов С. А., Александров А. А.* Прикладные задачи оптимального управления: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во Балт. гос. техн. ун-та, 2007. 76 с.

***Сведения об авторе***

***Антон Аскольдович Александров*** — аспирант; Балтийский государственный технический университет „Военмех“, кафедра систем обработки информации и управления, Санкт-Петербург; E-mail: antonhill@mail.ru

Рекомендована кафедрой
систем обработки информации
и управления

Поступила в редакцию
05.06.08 г.