УДК 681.325:519.713

В. П. Супрун, Д. А. Городецкий

# РЕАЛИЗАЦИЯ БИСИММЕТРИЧЕСКИХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ ЛОГИЧЕСКИМИ СХЕМАМИ

Предлагаются новые способы представления бисимметрических булевых функций посредством фундаментальных и полиномиально-однородных симметрических булевых функций. Приводятся эффективные логические схемы, реализующие бисимметрические булевы функции, которые зависят от четырех и пяти переменных.

***Ключевые слова:*** *бисимметрические булевы функции, фундаментальные симметрические булевы функции, полиномиально-однородные симметрические булевы функции, логические схемы.*

**Введение.** При проектировании вычислительных устройств возникает задача реализации на одном логическом модуле всех булевых функций, принадлежащих определенному классу, в качестве которого часто используется класс симметрических булевых функций или некоторые его подклассы. Интерес к симметрическим булевым функциям (или функциям, обладающим свойством частичной симметрии переменных) объясняется тем, что такими булевыми функциями описываются структура и поведение многих типовых устройств вычислительной техники [1]. Например, $n$-входовый одноразрядный сумматор, $n$-операндный сумматор по модулю $P$, схема контроля четности (нечетности).

К настоящему времени задача вычисления (реализации) на одном логическом модуле произвольных симметрических булевых функций практически решена [2—4]. Также получены результаты по реализации на одном логическом модуле фундаментальных [5] и полиномиально-однородных [6] симметрических булевых функций, частично симметрических булевых функций [7]. Кроме того, многие устройства, разработанные одним из авторов, защищены Патентами на изобретение Республики Беларусь (см. Патенты № 1433, 1587, 2117, 2118, 2119, 2377, 2793, 2990, 5171, 5173, 5174, 5178, 5179, 5838, 5938, 6995, 7592, 7947, 8421, 8566, 8619, 8859, 8973, 9051, 9147, 10216, 10219, 10549, 11024, 11027, 11028, 11275, 11785).

В настоящей статье приводятся новые аналитические представления бисимметрических булевых функций $n$ переменных. На основе применения приведенных здесь аналитических представлений предлагаются логические схемы устройств, предназначенных для вычисления бисимметрических булевых функций, которые зависят от четырех и пяти переменных.

**Основные понятия и определения.** Произвольная симметрическая булева функция $n$ переменных $F(X)=F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ характеризуется множеством рабочих чисел $A(F)=\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$. Функция $F$ принимает единичные значения на тех и только тех наборах значений $n$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые содержат ровно $a_i$ единиц, где $0 \le a_i \le n$, $0 \le i \le r$ и $0 \le r \le n+1$. Такая функция $F$ обозначается как $F = F_n^{a_1, a_2, \ldots, a_r}(X)$.

Если $r = 1$, то функция $F = F_n^a(X)$ называется *фундаментальной* (или элементарной) симметрической булевой функцией.

Симметрическая булева функция $n$ переменных $F = F(X)$ называется *полиномиально-однородной*, если ее полином Жегалкина содержит (все) элементарные конъюнкции, ранг которых равен $k$, где $0 \le k \le n$. Полиномиально-однородные симметрические функции обозначаются через $E_n^k = E_n^k(X)$. Из определения следует, что $E_n^0 = 1$, $E_n^1 = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$, $E_n^2 = x_1 x_2 \oplus \ldots \oplus x_1 x_n \oplus \ldots \oplus x_{n-1} x_n$, $\ldots$, $E_n^n = x_1 x_2 \ldots x_n$.

Произвольная симметрическая булева функция $F = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ взаимно однозначно представляется $(n+1)$-разрядным (локальным) двоичным кодом $\pi(F) = (\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n)$, где $\pi_i$ — значение функции $F$ на (любом) наборе значений $n$ переменных, содержащем $i$ $(0 \le i \le n)$ единиц. Иначе, $\pi_i = 1$ тогда и только тогда, когда $i$ — рабочее число функции $F$.

Известно, что отношение частичной симметрии переменных произвольной булевой функции $F = F(X)$ разбивает (единственным образом) множество ее переменных $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ на классы симметрии $X_1, X_2, \ldots, X_k$, где $1 \le k \le n$. Если $k = 1$, то функция $F$ является (полностью) симметрической; если $k = 2$, то $F$ — *бисимметрическая* булева функция; если $k = n$, то функция $F$ не обладает свойством частичной симметрии переменных. Если $3 \le k \le n-1$, то функция $F(X) = F(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ называется *частично симметрической* (или полисиммерической).

Булеву функцию $F = F(X_1, X_2)$, где $X_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$, $X_2 = \{x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n\}$, при $n \ge 4$ и $2 \le r \le n-2$, будем называть бисимметрической булевой функцией типа „$r$, $n-r$“.

Обозначим через $\Re(n)$ и $\Re(r, n-r)$ устройства, реализующие на своем единственном выходе (при соответствующей настройке) симметрическую булеву функцию $n$ переменных $F = F(X)$ и бисимметрическую булеву функцию $F = F(X_1, X_2)$ типа „$r$, $n-r$“ соответственно.

Конструктивная сложность $l(\Re(n))$ и $l(\Re(r, n-r))$ устройств $\Re(n)$ и $\Re(r, n-r)$ определяется как суммарное число входов логических элементов, содержащихся в соответствующих логических схемах. Под глубиной логических схем $g(\Re(n))$ и $g(\Re(r, n-r))$, как обычно, понимается максимальное число элементов схемы, через которые сигнал распространяется от ее входных полюсов к выходному.

При разработке эффективных методов синтеза логических схем устройств $\Re(n)$ и $\Re(r, n-r)$ необходимо стремиться к построению схем, оптимальных как по сложности, так и по глубине. Такая задача является весьма сложной и поэтому любые результаты, полученные в этом направлении, представляют определенный интерес для теории и практики проектирования устройств вычислительной техники.

**Аналитические представления функций $F = F(X_1, X_2)$.** В работе [8] приведено аналитическое представление бисимметрической булевой функции типа „$r$, $n-r$“ следующего вида:

$$F(X_1, X_2) = \bigvee_{j=0}^{r^*-1} \omega_j F_r^{j_1}(X_1) F_{n-r}^{j_2}(X_2), \qquad (1)$$

где $\omega_j \in \{0,1\}$; $F_r^{j_1}(X_1)$ — фундаментальная симметрическая булева функция, зависящая от $r$ переменных множества $X_1$, рабочее число которой равно $j_1$ (функция $F_{n-r}^{j_2}(X_2)$ определяется аналогичным образом); $r^* = (r+1)(n-r+1)$; $j = j_1(n-r+1) + j_2$ и $0 \le j_1 \le r$, $0 \le j_2 \le n-r$.

Из формулы (1) следует, что бисимметрическая булева функция $F = F(X_1, X_2)$ взаимно однозначно задается посредством $r^*$-разрядного двоичного вектора $\omega(F) = (\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{r^*-1})$. Отсюда следует, что число различных бисимметрических булевых функций типа „$r, n-r$“ равно $2^{(r+1)(n-r+1)}$.

Если к функции $F = F(X_1, X_2)$ применить формулу дизъюнктивного разложения по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_r$, то с учетом того, что функция $F = F(X_1, X_2)$ является симметрической относительно каждого из множеств переменных $X_1$ и $X_2$ в отдельности, получим

$$F(X_1, X_2) = F_r^0(X_1) G_0(X_2) \vee F_r^1(X_1) G_1(X_2) \vee \ldots \vee F_r^r(X_1) G_r(X_2), \qquad (2)$$

где $F_r^0(X_1), F_r^1(X_1), \ldots, F_r^r(X_1)$ — фундаментальные симметрические булевы функции $r$ переменных множества $X_1$; $G_0(X_2), G_1(X_2), \ldots, G_r(X_2)$ — некоторые симметрические булевы функции, зависящие от $n-r$ переменных множества $X_2$. Непосредственно из формулы (2) следует, что $\omega(F) = (\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{r^*-1}) = (\pi(G_0), \pi(G_1), \ldots, \pi(G_r))$, где $\pi(G_i)$ — локальный двоичный код симметрической булевой функции $n-r$ переменных $G_i = G_i(X_2)$ и $i = 0,1,\ldots,r$.

Принимая во внимание формулу (2), можно сделать вывод о том, что существует логическая схема устройства $\Re(r, n-r)$, состоящая из фундаментального симметрического многополюсника на $r$ входов (устройства, предназначенного для одновременной реализации всех $r+1$ фундаментальных симметрических булевых функций $F_r^0(X_1)$, $F_r^1(X_1), \ldots, F_r^r(X_1)$, зависящих от $r$ переменных), $r+1$ устройств для вычисления симметрических булевых функций $n-r$ переменных $G_0(X_2), G_1(X_2), \ldots, G_r(X_2)$, $r+1$ двухвходовых элементов И и одного ($r$+1)-входового элемента ИЛИ.

Для построения более эффективной (с точки зрения оптимизации конструктивной сложности) логической схемы $\Re(r, n-r)$ необходимо преобразовать формулу (2), используя для этого следующие логические равносильности: если $ab = 0$, то $a \vee b = a \oplus b$; $\overline{a} = a \oplus 1$ и $a(b \oplus c) = ab \oplus ac$, где $a, b, c \in \{0,1\}$.

Тогда после несложных преобразований из формулы (2) получаем

$$F(X_1, X_2) = E_r^0(X_1) H_0(X_2) \oplus E_r^1(X_1) H_1(X_2) \oplus \ldots \oplus E_r^r(X_1) H_r(X_2), \qquad (3)$$

где $E_r^0(X_1), E_r^1(X_1), \ldots, E_r^r(X_1)$ — полиномиально-однородные симметрические булевы функции $r$ переменных множества $X_1$; $H_0(X_2), H_1(X_2), \ldots, H_r(X_2)$ — симметрические булевы функции $n-r$ переменных множества $X_2$, которые зависят от функций $G_0(X_2), G_1(X_2), \ldots, G_r(X_2)$.

Для установления зависимости функций $H_0(X_2), H_1(X_2), \dots, H_r(X_2)$ от $G_0(X_2)$, $G_1(X_2), \dots, G_r(X_2)$ введем в рассмотрение два $2^m$-разрядных вектора-столбца $g_m$, $h_m$ и $\left(2^m \times 2^m\right)$-матрицу трансформации $S_m$, где значение $m$ вычисляется из двойного неравенства $2^{m-1} < r+1 \le 2^m$.

Будем считать, что $g_m = (G_0, G_1, \dots, G_r, 0,\dots,0)$ и $h_m = (H_0, H_1, \dots, H_r, 0,\dots,0)$, а матрицу трансформации $S_m$ определим рекурсивным образом: $S_0 = [1]$ и $S_j = \begin{bmatrix} S_{j-1} & 0 \\ S_{j-1} & S_{j-1} \end{bmatrix}$, где $j = 1,2, \dots, m$. Тогда зависимость векторов $g_m$ и $h_m$ друг от друга выражается векторно-матричным уравнением $S_m \otimes g_m = h_m$, где через символ $\otimes$ обозначена операция сложения по модулю два элементарных конъюнкций.

**Пример 1.** Пусть $r = 7$, тогда $m = 3$ и уравнение $S_3 \otimes g_3 = h_3$ принимает вид

$$\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&1&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&1&0&0&0 \\ 1&1&0&0&1&1&0&0 \\ 1&0&1&0&1&0&1&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ G_4 \\ G_5 \\ G_6 \\ G_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_0 \\ H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \\ H_5 \\ H_6 \\ H_7 \end{bmatrix}.$$

Отсюда следует система логических уравнений, которая представляет собой зависимость функций $H_0(X_2), H_1(X_2), \dots, H_r(X_2)$ от $G_0(X_2), G_1(X_2), \dots, G_r(X_2)$:

$$\left.\begin{aligned} & G_0(X_2) = H_0(X_2), \\ & G_0(X_2) \oplus G_1(X_2) = H_1(X_2), \\ & G_0(X_2) \oplus G_2(X_2) = H_2(X_2), \\ & G_0(X_2) \oplus G_1(X_2) \oplus G_2(X_2) \oplus G_3(X_2) = H_3(X_2), \\ & G_0(X_2) \oplus G_4(X_2) = H_4(X_2), \\ & G_0(X_2) \oplus G_1(X_2) \oplus G_4(X_2) \oplus G_5(X_2) = H_5(X_2), \\ & G_0(X_2) \oplus G_2(X_2) \oplus G_4(X_2) \oplus G_6(X_2) = H_6(X_2), \\ & G_0(X_2) \oplus G_1(X_2) \oplus \dots \oplus G_7(X_2) = H_7(X_2). \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Следует отметить, что локальные коды симметрических булевых функций $H_0(X_2)$, $H_1(X_2), \dots, H_r(X_2)$ и $G_0(X_2), G_1(X_2), \dots, G_r(X_2)$ при условии, что $2^{m-1} < r+1 \le 2^m$, связаны между собой таким же образом, как и сами функции.

**Логическая схема устройства** $\Re(2)$. Из представления функции $F = F(X_1, X_2)$ посредством формулы (3) следует, что для построения эффективных логических схем устройств $\Re(2, 2)$ и $\Re(3, 2)$ необходимо иметь оптимальную (в определенном смысле) логическую схему устройства $\Re(2)$, которое предназначено для вычисления (реализации) произвольных симметрических функций $F$, зависящих от двух переменных $z_1$ и $z_2$.

На рис. 1 приведена логическая схема устройства $\Re(2)$, синтезированная эвристическим способом. Устройство $\Re(2)$ имеет три входа, на которые подается двоичный вектор настройки $u(F)=(u_0,u_1,u_2)$, значения разрядов которого определяются с помощью таблицы настройки.

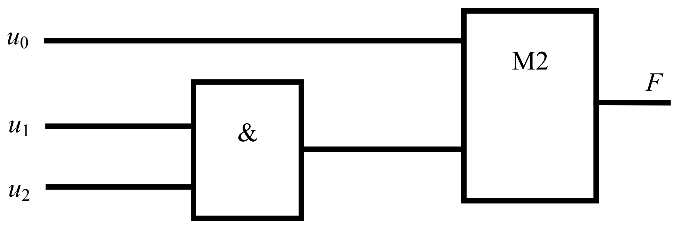


*Рис. 1*

| Сигналы настройки | | | Выход |
|---|---|---|---|
| $u_0$ | $u_1$ | $u_2$ | $\pi(F)$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 0 0 |
| 0 | $z_1$ | $z_2$ | 0 0 1 |
| $z_1$ | $z_2$ | 1 | 0 1 0 |
| 1 | $\overline{z}_1$ | $\overline{z}_2$ | 0 1 1 |
| 0 | $\overline{z}_1$ | $\overline{z}_2$ | 1 0 0 |
| $\overline{z}_1$ | $z_2$ | 1 | 1 0 1 |
| 1 | $z_1$ | $z_2$ | 1 1 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 1 1 |

Сложность и глубина устройства $\Re(2)$ равны $l(\Re(2))=3$ и $g(\Re(2))=2$. Логическая схема устройства $\Re(2)$, приведенная на рис. 1, является наиболее простой из всех существующих аналогов.

**Логическая схема устройства $\Re(2,2)$.** Для бисимметрической булевой функции $F=F(X_1,X_2)$, где $X_1=\{x_1,x_2\}$ и $X_2=\{x_3,x_4\}$, формула (3) принимает вид

$$F(X_1,X_2)=E_2^0(x_1,x_2)H_0(x_3,x_4)\oplus E_2^1(x_1,x_2)H_1(x_3,x_4)\oplus E_2^2(x_1,x_2)H_2(x_3,x_4)$$

или

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4)=H_0(x_3,x_4)\oplus(x_1\oplus x_2)H_1(x_3,x_4)\oplus x_1x_2H_2(x_3,x_4). \tag{5}$$

Из системы уравнений (4) следует, что для формулы (5) справедливы следующие соотношения: $\pi(H_0)=\pi(G_0)$, $\pi(H_1)=\pi(G_0)\oplus\pi(G_1)$ и $\pi(H_2)=\pi(G_0)\oplus\pi(G_2)$.

На рис. 2 приведена логическая схема устройства $\Re(2,2)$, которая синтезирована на основе применения формулы (5) с использованием схемы $\Re(2)$ (см. рис. 1). При этом логическая схема $\Re(2)$ была использована трижды.

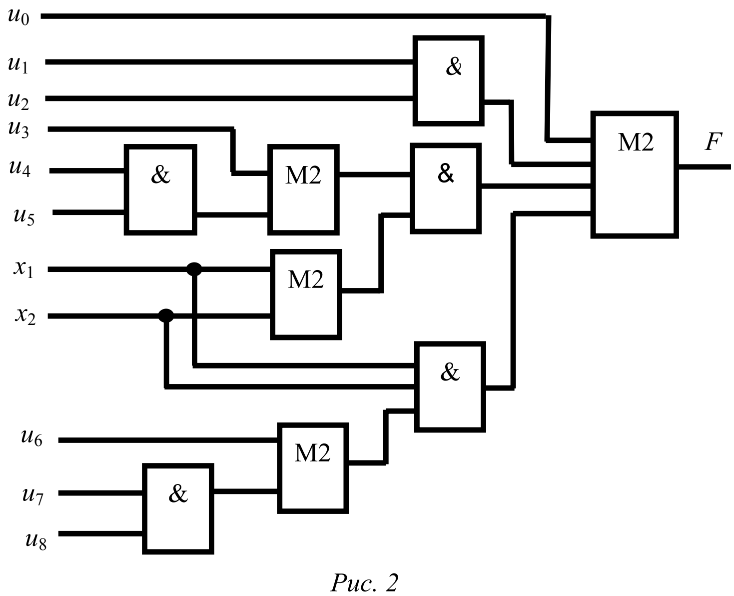


*Рис. 2*

Поясним метод построения вектора $u(F)=(u_0,u_1,\ldots,u_8)$ — вектора настройки устройства $\Re(2,2)$ на вычисление заданной функции $F=F(X_1,X_2)$.

С помощью локального кода $\pi(H_0)$ из таблицы получаем значения первых трех разрядов $u_0,u_1,u_2$ вектора $u(F)$. Естественно, что при этом необходимо заменить переменные $z_1$ и $z_2$ на переменные $x_3$ и $x_4$ соответственно.

Далее с помощью локальных кодов $\pi(H_1)$ и $\pi(H_2)$ из таблицы получаем значения остальных разрядов $u_3,u_4,u_5$ и $u_6,u_7,u_8$ вектора настройки $u(F)$.

**Пример 2.** Предположим, что на выходе устройства $\Re(2,2)$ (см. рис. 2) требуется реализовать бисимметрическую булеву функцию

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4)=\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,(x_3\oplus x_4)\vee(x_1\vee x_2)x_3x_4 .$$

Так как

$$F=\overline{x_1}\,\overline{x_2}\left(\overline{x_3}\,x_4\vee x_3\,\overline{x_4}\right)\vee\left(\overline{x_1}\,x_2\vee x_1\,\overline{x_2}\right)x_3x_4\vee x_1x_2x_3x_4 ,$$

то

$$F=\overline{x_1}\,\overline{x_2}G_0(x_3,x_4)\vee\left(\overline{x_1}x_2\vee x_1\overline{x_2}\right)G_1(x_3,x_4)\vee x_1x_2G_2(x_3,x_4),$$

где $\pi(G_0)=(0,1,0)$ и $\pi(G_1)=\pi(G_2)=(0,0,1)$.

Отсюда следует, что двоичный код бисимметрической булевой функции $F=F(X_1,X_2)$ равен $\omega(F)=(\pi(G_0),\pi(G_1),\pi(G_2))=(0,1,0,0,0,1,0,0,1)$.

Из системы уравнений (4) получаем $\pi(H_0)=\pi(G_0)$, $\pi(H_1)=\pi(G_0)\oplus\pi(G_1)$ и $\pi(H_2)=\pi(G_0)\oplus\pi(G_2)$. Так как $\pi(G_0)=(0,1,0)$ и $\pi(G_1)=\pi(G_2)=(0,0,1)$, то $\pi(H_0)=(0,1,0)$, $\pi(H_1)=(0,1,1)$ и $\pi(H_2)=(0,1,1)$.

Принимая во внимание описанную выше процедуру построения вектора настройки $u(F)$, получаем $u_0=x_3$, $u_1=x_4$, $u_2=1$, $u_3=1$, $u_4=\overline{x_3}$, $u_5=\overline{x_4}$, $u_6=1$, $u_7=\overline{x_3}$ и $u_8=\overline{x_4}$.

Первообразная функция устройства $\Re(2,2)$ имеет вид

$$F(x_1,x_2,u_0,u_1,\ldots,u_8)=u_0\oplus u_1u_2\oplus(x_1\oplus x_2)(u_3\oplus u_4u_5)\oplus x_1x_2(u_6\oplus u_7u_8).$$

Сложность и глубина логической схемы устройства $\Re(2,2)$ составляют $l(\Re(2,2))=21$ и $g(\Re(2,2))=4$. Кроме того, число внешних выводов схемы равно 12. Отметим, что приведенная выше логическая схема $\Re(2,2)$ предназначена для реализации любой из 512 бисимметрических булевых функций типа „2,2“.

**Логическая схема устройства** $\Re(3,2)$. Формула (3) применительно к бисимметрической булевой функции $F=F(X_1,X_2)$, у которой $X_1=\{x_1,x_2,x_3\}$ и $X_2=\{x_4,x_5\}$, принимает вид

$$F(X_1,X_2)=E_3^0(X_1)H_0(X_2)\oplus E_3^1(X_1)H_1(X_2)\oplus E_3^2(X_1)H_2(X_2)\oplus E_3^3(X_1)H_3(X_2)$$

или

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=H_0(x_4,x_5)\oplus(x_1\oplus x_2\oplus x_3)H_1(x_4,x_5)\oplus$$
$$\oplus(x_1x_2\oplus x_1x_3\oplus x_2x_3)H_2(x_4,x_5)\oplus x_1x_2x_3H_3(x_4,x_5). \quad (6)$$

Из системы (4) получаем $\pi(H_0)=\pi(G_0)$, $\pi(H_1)=\pi(G_0)\oplus\pi(G_1)$, $\pi(H_2)=\pi(G_0)\oplus\pi(G_2)$ и $\pi(H_3)=\pi(G_0)\oplus\pi(G_1)\oplus\pi(G_2)\oplus\pi(G_3)$.

Логическая схема устройства $\Re(3,\,2)$, синтезированная на основе применения формулы (6), приведена на рис. 3. Причем при ее построении была использована (четыре раза) логическая схема устройства $\Re(2)$.

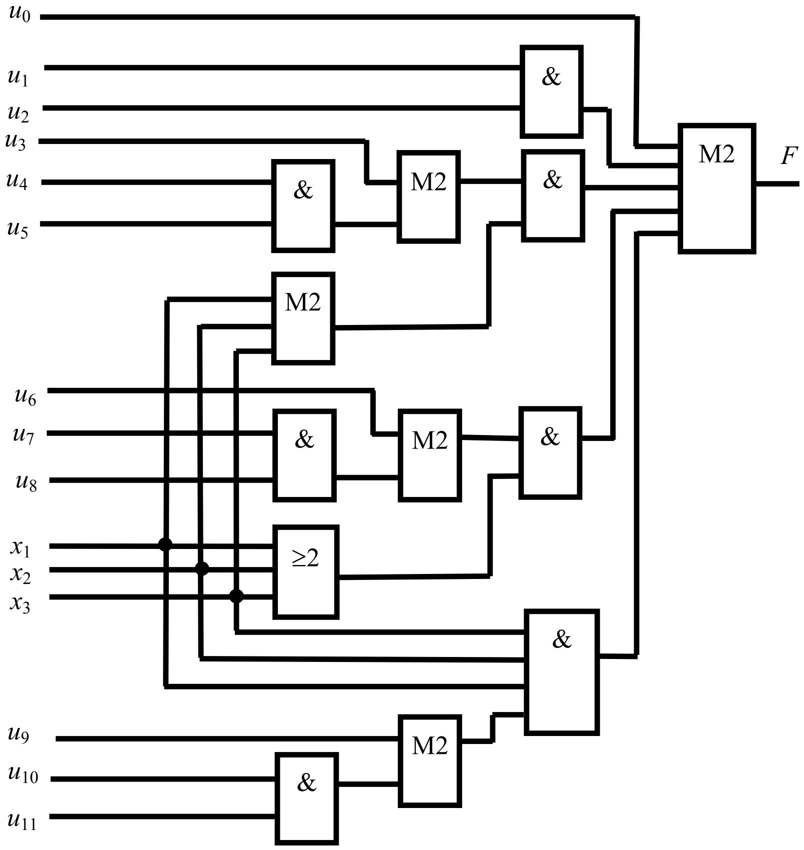


*Рис. 3*

Настройка устройства $\Re(3,\,2)$ осуществляется по аналогии с настройкой устройства $\Re(2,\,2)$, рассмотренной в предыдущем разделе. Однако при построении вектора настройки $u(F)=(u_0, u_1, \ldots, u_{11})$ необходимо четыре раза обратиться к таблице.

Первообразная функция логической схемы устройства $\Re(3,\,2)$, приведенной на рис. 3, имеет вид

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,u_0,u_1,\ldots,u_{11}) = u_0 \oplus u_1u_2 \oplus (x_1 \oplus x_2 \oplus x_3)(u_3 \oplus u_4u_5) \oplus$$
$$\oplus (x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3)(u_6 \oplus u_7u_8) \oplus x_1x_2x_3(u_9 \oplus u_{10}u_{11}).$$

**Пример 3.** Предположим, что на выходе устройства $\Re(3,\,2)$ требуется реализовать бисимметрическую булеву функцию

$$F(X_1,X_2) = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}(x_4 \vee x_5) \vee (x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3)x_4x_5,$$

где $X_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$ и $X_2 = \{x_4, x_5\}$.

Так как

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}(x_4 \vee x_5) \vee (\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3 \vee \overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3} \vee x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3})0 \vee$$
$$\vee (\overline{x_1}x_2x_3 \vee x_1\overline{x_2}x_3 \vee x_1x_2\overline{x_3})x_4x_5 \vee x_1x_2x_3x_4x_5,$$

то

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = F_3^0(x_1,x_2,x_3)G_0(x_4,x_5) \vee F_3^1(x_1,x_2,x_3)G_1(x_4,x_5) \vee$$
$$\vee F_3^2(x_1,x_2,x_3)G_2(x_4,x_5) \vee F_3^3(x_1,x_2,x_3)G_3(x_4,x_5),$$

где $\pi(G_0)=(0,1,1)$, $\pi(G_1)=(0,0,0)$ и $\pi(G_2)=\pi(G_3)=(0,0,1)$.

Двоичный код $\omega(F)$ бисимметрической булевой функции $F=F(X_1,X_2)$ равен $\omega(F)=(\pi(G_0),\pi(G_1),\pi(G_2),\pi(G_3))=(0,1,1,0,0,0,0,0,1,0,0,1)$.

Принимая во внимание систему уравнений (4), вычисляем локальные коды симметрических булевых функций $H_0(x_4,x_5)$, $H_1(x_4,x_5)$, $H_2(x_4,x_5)$, $H_3(x_4,x_5)$, входящих в разложение (6), согласно следующим формулам:

$$H_0(x_4,x_5)=G_0(x_4,x_5),\ H_1(x_4,x_5)=G_0(x_4,x_5)\oplus G_1(x_4,x_5),$$
$$H_2(x_4,x_5)=G_0(x_4,x_5)\oplus G_2(x_4,x_5),$$
$$H_3(x_4,x_5)=G_0(x_4,x_5)\oplus G_1(x_4,x_5)\oplus G_2(x_4,x_5)\oplus G_3(x_4,x_5).$$

Так как здесь $\pi(G_0)=(0,1,1)$, $\pi(G_1)=(0,0,0)$, $\pi(G_2)=\pi(G_3)=(0,0,1)$, то $\pi(H_0)=(0,1,1)$, $\pi(H_1)=(0,1,1)$ $\pi(H_2)=(0,1,0)$ и $\pi(H_3)=(0,1,1)$.

Из таблицы настроек устройства $\Re(2)$ применительно к симметрическим булевым функциям $H_0=H_0(x_4,x_5)$, $H_1=H_1(x_4,x_5)$, $H_2=H_2(x_4,x_5)$, $H_3=H_3(x_4,x_5)$, получаем $u_0=1$, $u_1=\overline{x_4}$, $u_2=\overline{x_5}$, $u_3=1$, $u_4=\overline{x_4}$, $u_5=\overline{x_5}$, $u_6=x_4$, $u_7=x_5$, $u_8=1$, $u_9=1$, $u_{10}=\overline{x_4}$ и $u_{11}=\overline{x_5}$.

Логическая схема устройства $\Re(3,2)$, приведенная на рис. 3, имеет сложность $l(\Re(3,2))=33$, глубину $g(\Re(3,2))=4$ и 16 внешних выводов (3 информационных и 12 настроечных входов, а также выход).

С помощью логической схемы устройства $\Re(3,2)$ при соответствующей настройке можно реализовать любую из 4096 бисимметрических булевых функций $F=F(X_1,X_2)$, где $X_1=\{x_1,x_2,x_3\}$ и $X_2=\{x_4,x_5\}$.

**Заключение.** В настоящей работе приводятся логические схемы устройств $\Re(2)$, $\Re(2,2)$ и $\Re(3,2)$, которые выгодно отличаются от всех существующих аналогов по конструктивной сложности, глубине и числу внешних выводов. В частности, они превосходят по всем параметрам логическую схему устройства $\Re(r,n-r)$, описанную в работе [8].

Для построения логических схем устройств $\Re(r,n-r)$, где $n-r\geq 3$, требуется разработать (а затем использовать) эффективные логические схемы устройства $\Re(n-r)$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Карцев М. А.* Арифметика цифровых машин. М.: Наука, 1969. 576 с.

2. *Авгуль Л. Б., Супрун В. П.* Синтез быстродействующих логических схем методом каскадов // Изв. вузов. Приборостроение. 1993. Т. 36, № 3. С. 31—36.

3. *Авгуль Л. Б., Супрун В. П.* Синтез схем симметрических булевых функций в базисе линейной и монотонных функций // Там же. 1995. Т. 38, № 11—12. С. 33—36.

4. *Супрун В. П., Седун А. М.* Реализация симметрических булевых функций логическими схемами // Там же. 1998. Т. 41, № 9. С. 32—38.

5. *Супрун В. П., Седун А. М.* Схемная реализация фундаментальных симметрических булевых функций посредством логических устройств со сложной настройкой // Мат. IV Междунар. конф. „Автоматизация проектирования дискретных систем“. Минск, 2001. Т. 2. С. 86—91.

6. *Супрун В.П.* Синтез логических устройств для вычисления полиномиально-однородных симметрических булевых функций // Мат. VI Междунар. конф. „Автоматизация проектирования дискретных систем“. Минск, 2001. Т. 2. С. 146—153.

7. *Супрун В. П., Седун А. М.* Схемная реализация частично симметрических булевых функций // „Логическое проектирование“. ИТК НАН Беларуси. 2000. Вып. 5. С. 29—37.

8. *Супрун В. П., Седун А. М.* Синтез устройства для вычисления бисимметрических булевых функций // Там же. 1998. Вып. 3. С. 69—77.

***Сведения об авторах***

***Валерий Павлович Супрун*** — канд. техн. наук, доцент; Белорусский государственный университет, кафедра уравнений математической физики, Минск;
E-mail: suprun@bsu.by

***Данила Андреевич Городецкий*** — аспирант; Белорусский государственный университет, кафедра уравнений математической физики, Минск;
E-mail: danila.gorodecky@gmail.com

Рекомендована кафедрой
уравнений математической физики

Поступила в редакцию
09.11.09 г.