
ЭЛЕКТРОННЫЕ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ УСТРОЙСТВА

УДК 621.396:681.323

С. И. ЗИАТДИНОВ

ВОССТАНОВЛЕНИЕ СИГНАЛА ПО ЕГО ВЫБОРКАМ НА ОСНОВЕ ТЕОРЕМЫ ОТСЧЕТОВ КОТЕЛЬНИКОВА

Показано, что для однозначного восстановления непрерывного сигнала по его отсчетам необходимо, чтобы частота дискретизации превышала удвоенную максимальную частоту в спектре сигнала.

Ключевые слова: восстановление сигнала, дискретизация, ошибки.

При цифровой фильтрации непрерывного входного сигнала важнейшей задачей является правильный выбор его частоты дискретизации.

Согласно теореме Котельникова, если наивысшая частота в спектре сигнала $u(t)$ не превышает значения F_{\max} , то сигнал $u(t)$ полностью определяется последовательностью своих значений в моменты времени, отстоящие друг от друга не более чем на $0,5/F_{\max}$. Иными словами, частота дискретизации непрерывного сигнала F_d должна удовлетворять условию $F_d \geq 2F_{\max}$ [см. лит.]

Покажем, что требование к выбору частоты дискретизации должно быть более жестким, а именно: для замены непрерывного сигнала совокупностью выборок без потери информации необходимо обеспечить соотношение $F_d > 2F_{\max}$. В случае, когда $F_d = 2F_{\max}$, дискретизация непрерывного сигнала приводит к информационным потерям.

Пусть дискретизированный входной сигнал представляет собой синусоидальное колебание

$$u(t_i) = U \sin \Omega t_i, \quad t_i = iT_d + \Delta T, \quad (1)$$

где U, Ω — амплитуда и круговая частота сигнала; T_d — период дискретизации; ΔT — смещение во времени момента текущего отсчета t_i ; $i = 0, 1, 2, \dots$ — номер текущего отсчета.

Сигнал, с помощью которого осуществляется интерполирование (восстановление) исходного сигнала по его отсчетам, зададим в виде

$$u_{\text{и}}(t_i) = U_{\text{и}} \sin(\Omega t_i + \varphi), \quad (2)$$

где $U_{\text{и}}, \varphi$ — амплитуда и фазовый сдвиг интерполирующего сигнала. Таким образом, для интерполирования сигнала по его отсчетам необходимо найти амплитуду $U_{\text{и}}$ и фазовый сдвиг φ интерполирующего сигнала.

Будем считать, что в точках отсчетов сигналы (1) и (2) полностью совпадают, т.е. $u(t_i) = u_{\text{и}}(t_i)$ или

$$U \sin[\Omega(iT_d + \Delta T)] = U_{\text{и}} \sin[(\Omega(iT_d + \Delta T) + \varphi)]. \quad (3)$$

Из данного соотношения находим требуемую амплитуду интерполирующего сигнал

$$U_{\text{и}} = U \frac{\sin[\Omega(iT_d + \Delta T)]}{\sin[\Omega(iT_d + \Delta T) + \varphi]}. \quad (4)$$

Рассмотрим ряд частных случаев. При $\Delta T = 0$ из соотношения (4) следует, что

$$U_{\text{и}} = U \frac{\sin(\Omega iT_d)}{\sin(\Omega iT_d + \varphi)}. \quad (5)$$

Согласно теореме Котельникова, на нижней границе частота дискретизации F_d равняется удвоенной частоте сигнала $F = \Omega / 2\pi$. Тогда при $F_d = 2F$ после простых преобразований формула (5) принимает вид

$$U_d = U \frac{\sin(i\pi)}{\sin(i\pi + \varphi)}. \quad (6)$$

Положим в формуле (6) $\varphi = 0, \pi, 2\pi, \dots$ При этом отсчеты сигнала $u(t_i)$ берутся в точках, где $u(t) = 0$ (рис. 1). В соотношении (6) возникает неопределенность типа $0/0$. В результате интерполирующий сигнал $u_{\text{и}}(t_i)$ может иметь любую амплитуду, так как в точках отсчета его значения, как и значения исходного сигнала, равны нулю.

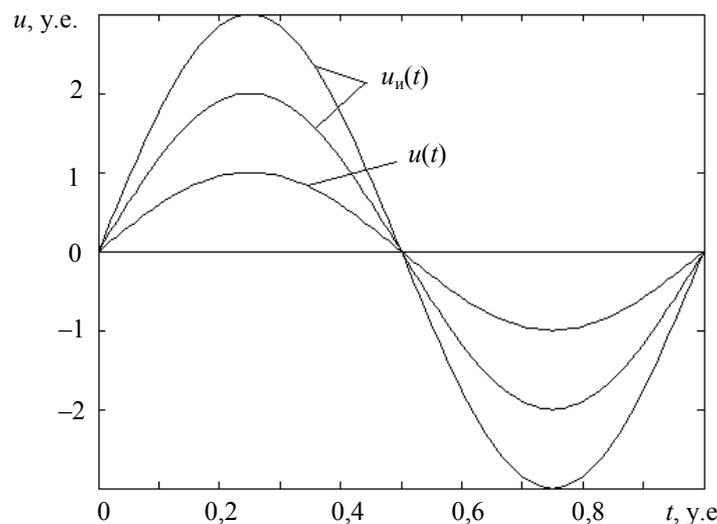


Рис. 1

Следовательно, при $\Delta T = 0$; $\varphi = 0, \pi, 2\pi, \dots$ и $F_d = 2F$ сигналу $u(t_i)$ можно сопоставить бесчисленное множество интерполирующих сигналов $u_{\text{и}}(t_i)$, имеющих любую амплитуду (см. рис. 1).

При $\varphi \neq 0, \pi, 2\pi, \dots$ выражение (6) принимает вид

$$U_{\text{и}} = U \frac{0}{\sin(i\pi + \varphi)} = 0.$$

В данном случае вообще нет интерполирующего сигнала.

Таким образом, при взятии отсчетов синусоидального сигнала в точках, где его значение равно нулю, интерполирующий сигнал также проходит через эти точки и может иметь любую амплитуду. Восстановление исходного сигнала по его отсчетам в этом случае невозможно.

При $\Delta T \neq 0$ точки отсчета сигнала $u(t_i)$ не совпадают с моментами времени, где его значения равны нулю (рис. 2). По-прежнему считаем, что частота дискретизации равняется удвоенной частоте сигнала ($F_d = 2F$).

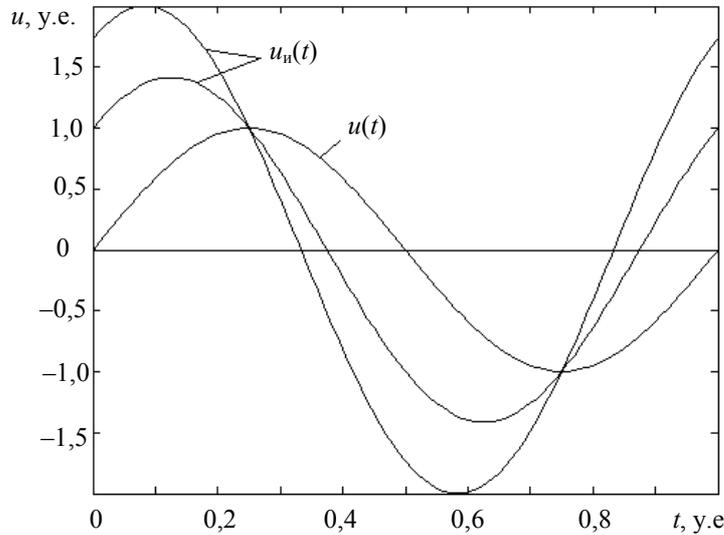


Рис. 2

Рассмотрим, например, случай, когда $\Delta T = 0,25T$. Здесь $T = 1/F$ — период синусоидального сигнала. В результате соотношение (4) преобразуется к виду

$$U_n = U \frac{\sin[\Omega(iT_d + 0,25T)]}{\sin[\Omega(iT_d + 0,25T) + \varphi]} = \frac{U}{\cos \varphi}. \quad (7)$$

Из данного выражения можно найти амплитуду интерполирующего сигнала для различных значений φ :

а) $\varphi = 0$, $U_n = U$; б) $\varphi = 45^\circ$, $U_n = 2U/\sqrt{2}$; в) $\varphi = 60^\circ$, $U_n = 2U$; г) $\varphi = 90^\circ$, $U_n = \infty$.

Следовательно, существует бесчисленное множество интерполирующих сигналов. Данный результат поясняется временными реализациями, представленными на рис. 2.

Таким образом, из проведенных исследований следует, что при $F_d = 2F$ невозможно однозначно восстановить исходный синусоидальный сигнал по его отсчетам.

Пусть частота дискретизации не имеет жесткой привязки к частоте синусоидального сигнала $F_d > 2F$. В этом случае из соотношения (3) получим

$$U \sin \left[2\pi \frac{T_d}{T} \left(i + \frac{\Delta T}{T_d} \right) \right] = U_n \sin \left[2\pi \frac{T_d}{T} \left(i + \frac{\Delta T}{T_d} \right) + \varphi \right].$$

Данное равенство будет выполняться для всех $i = 0, 1, 2, \dots$ только при одном условии, когда $U_n = U$ и $\varphi = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$. Следовательно, в этом случае для всех точек взятия отсчетов существует единственный интерполирующий сигнал. Аналогичные рассуждения можно распространить на сигнал $u(t)$ любой формы с ограниченной максимальной частотой спектром.

Таким образом, для однозначного восстановления непрерывного сигнала по его отсчетам необходимо, чтобы выполнялось условие — частота дискретизации должна быть больше удвоенной наивысшей частоты в спектре сигнала.

ЛИТЕРАТУРА

Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Советское радио, 1971. 671 с.

Сергей Ильич Зиятдинов

Сведения об авторе

- д-р техн. наук, профессор; Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, кафедра информационно-сетевых технологий; E-mail: kaf.53@GUAP.ru

Рекомендована кафедрой
информационно-сетевых технологий

Поступила в редакцию
29.11.07 г.