УДК 621.391.172

О. А. Степанов, А. Б. Торопов

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ МЕТОДОВ МОНТЕ-КАРЛО В ЗАДАЧЕ КОРРЕЛЯЦИОННО-ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ НАВИГАЦИИ

Исследуется возможность применения последовательных методов Монте-Карло в задаче корреляционно-экстремальной навигации при учете изменчивости оцениваемого вектора. Обсуждаются особенности применения таких методов и предлагается алгоритм, основанный на апостериорной (повторной) существенной выборке.

Ключевые слова: *метод Монте-Карло, фильтрация, точность, навигация.*

Введение. В последнее время значительное развитие получили рекуррентные алгоритмы решения задач нелинейной фильтрации, основанные на последовательных методах Монте-Карло. К ним, в частности, относятся парциальные фильтры (particle filtres), бутстрэп (bootstrap) фильтры и ряд их модификаций [1—3]. В настоящей работе исследуется возможность применения аналогичных алгоритмов в задаче корреляционно-экстремальной навигации. Особенность этой задачи заключается в ее нелинейном и протяженном во времени характере, что обусловливает необходимость учета изменчивости оцениваемого вектора. Обычно такой учет осуществляется путем сведения исходной нелинейной задачи к некоторому линейному аналогу [4], что при определенных условиях приводит к снижению точности решения. В настоящей работе предлагается учитывать изменчивость в рамках нелинейной постановки задачи при ее решении с использованием последовательных методов Монте-Карло.

Постановка задачи корреляционно-экстремальной навигации. Задача корреляционно-экстремальной навигации может быть сформулирована следующим образом [4]. Пусть известны значения параметров $\tilde{\varphi}_i$, $\tilde{\lambda}_i$ некоторой навигационной системы в i-е моменты времени

$$\tilde{\varphi}_i = \varphi_i + \Delta\varphi_i, \quad \tilde{\lambda}_i = \lambda_i + \Delta\lambda_i, \tag{1}$$

где φ_i, λ_i — истинные координаты объекта; $\Delta\varphi_i$, $\Delta\lambda_i$ — погрешность определения координат. Предположим, что имеются скалярные измеренные параметры некоторого геофизического поля, например, рельефа дна:

$$\mathbf{y}_i = \psi(\varphi_i, \lambda_i) + \chi + v_i, \; i = \overline{1, m}, \tag{2}$$

где $\psi(\varphi_i, \lambda_i)$ — известная функция, описывающая зависимость рельефа (глубин) дна от координат; χ и v_i — систематическая и флуктуационная составляющие ошибок измерений. Введем функцию $\psi(\varphi_i, \lambda_i) = \psi(\tilde{\varphi}_i - \Delta\varphi_i, \tilde{\lambda}_i - \Delta\lambda_i) = s_i(\Delta\varphi_i, \Delta\lambda_i)$ и векторы $\boldsymbol{\theta}_i = \begin{bmatrix}\Delta\varphi_i & \Delta\lambda_i\end{bmatrix}^T$ и $\mathbf{x}_i^T = \begin{bmatrix}\chi & \theta_i^T\end{bmatrix}$. Тогда, используя модель для вектора $\mathbf{x}_i$, задачу корреляционно-экстремальной навигации можно сформулировать как задачу фильтрации вектора

$$\mathbf{x}_i = \boldsymbol{\Phi}_i \mathbf{x}_{i-1} + \boldsymbol{\Gamma}_i \mathbf{w}_i \tag{3}$$

с использованием результатов измерений

$$\mathbf{y}_i = s_i(\theta_i) + \chi + v_i, \tag{4}$$

где $\mathbf{w}_i$ — вектор шумов; $\boldsymbol{\Phi}_i$, $\boldsymbol{\Gamma}_i$ — известные матрицы. Будем полагать, что $\mathbf{w}_i$ и v_i

представляют собой центрированные гауссовы, дискретные, белые шумы с матрицей ковариации $\mathbf{Q}$ и дисперсией $\mathbf{R}$. Вектор начальных условий $\mathbf{x}_0$ также полагаем центрированным гауссовым с известной матрицей ковариаций $\mathbf{P}_{\mathbf{x}_0}$.

Суть задачи фильтрации заключается в следующем. Располагая накопленными к текущему моменту времени i результатами измерений $\mathbf{Y}_i=[\mathbf{y}_1^T, \mathbf{y}_2^T, ..., \mathbf{y}_i^T]^T$, необходимо найти алгоритм вычисления оптимальных по среднему квадратическому отклонению (СКО) оценок $\hat{\mathbf{x}}_i(\mathbf{Y}_i)$ последовательности (3), минимизирующих критерий $J_i = M\left\{\left(\mathbf{x}_i-\hat{\mathbf{x}}_i(\mathbf{Y}_i)\right)^T\left(\mathbf{x}_i-\hat{\mathbf{x}}_i(\mathbf{Y}_i)\right)\right\}$, и соответствующую матрицу ковариаций их ошибок. Известно, что это может быть сделано с помощью следующих выражений [4]:

$$\hat{\mathbf{x}}_i^{\text{opt}}(\mathbf{Y}_i)=\int \mathbf{x}_i f\left(\mathbf{X}_i/\mathbf{Y}_i\right)d\mathbf{X}_i, \ \mathbf{P}_i^{\text{opt}}(\mathbf{Y}_i)=\int(\mathbf{x}_i-\hat{\mathbf{x}}_i(\mathbf{Y}_i))(\mathbf{x}_i-\hat{\mathbf{x}}_i(\mathbf{Y}_i))^T f(\mathbf{X}_i/\mathbf{Y}_i)d\mathbf{X}_i, \quad (5)$$

в которых $f(\mathbf{X}_i/\mathbf{Y}_i)$ — апостериорная функция плотности распределения вероятности для составного вектора $\mathbf{X}_i=\left[\mathbf{x}_1^T, ..., \mathbf{x}_i^T\right]^T$. Таким образом, задача корреляционно-экстремальной навигации в предложенной постановке сводится к вычислению интегралов (5). Для ее решения разработаны эффективные алгоритмы для случая, когда порождающие шумы отсутствуют, а матрица $\mathbf{\Phi}_i$ — единичная. Если оцениваемый вектор изменчивый, то для вычисления интегралов можно использовать последовательные методы Монте-Карло.

В дальнейшем рассматривается простейший случай, когда считается, что матрица $\mathbf{\Phi}_i$ также единичная, $\mathbf{w}_i$ — двумерные векторы, матрица $\mathbf{\Gamma}_i^T=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$, т.е. считается, что ошибки θ_i описываются винеровскими последовательностями.

Простейший последовательный метод Монте-Карло. Запишем выражение для апостериорной плотности распределения вероятности в виде

$$f(\mathbf{X}_i/\mathbf{Y}_i)=\frac{f(\mathbf{Y}_i/\mathbf{X}_i)f(\mathbf{X}_i)}{\int f(\mathbf{Y}_i/\mathbf{X}_i)f(\mathbf{X}_i)d\mathbf{X}_i},$$

где $f(\mathbf{Y}_i/\mathbf{X}_i)$ — функции правдоподобия, $f(\mathbf{X}_i)$ — априорная плотность распределения вероятности составного вектора.

Предположим, что имеется $\mathbf{X}_i^j$ — выборка случайных векторов, соответствующих $f(\mathbf{X}_i)$, тогда оценка и матрица ковариаций (5) могут быть вычислены с помощью метода Монте-Карло. В результате получим формулы [4]

$$\hat{\mathbf{x}}_i(\mathbf{Y}_i)\approx\hat{\mathbf{x}}_i^{MC}(\mathbf{Y}_i)=\sum_{j=1}^{L}q_i^j\mathbf{x}_i^j, \ \mathbf{P}_i(\mathbf{Y}_i)\approx\mathbf{P}_i^{MC}(\mathbf{Y}_i)=\sum_{j=1}^{L}q_i^j\left(\mathbf{x}_i^j-\hat{\mathbf{x}}_i^{MC}(\mathbf{Y}_i)\right)\left(\mathbf{x}_i^j-\hat{\mathbf{x}}_i^{MC}(\mathbf{Y}_i)\right)^T, \quad (6)$$

где q_i^j — нормированные веса, определяемые как

$$q_i^j=\tilde{q}_i^j\Big/\sum_{j=1}^{L}\tilde{q}_i^j, \quad (7)$$

$\tilde{q}_i^j=f\left(\mathbf{Y}_i/\mathbf{X}_i^j\right)$ — ненормированные веса. Формулы (6) и (7) могут быть получены, если полагать, что для функции $f(\mathbf{X}_i)$ используется аппроксимация в виде [5]:

$$f(\mathbf{X}_i)\approx\frac{1}{L}\sum_{j=1}^{L}\delta\left(\mathbf{X}_i-\mathbf{X}_i^j\right), \tag{8}$$

где $\delta(\bullet)$ — многомерная дельта-функция. Соответственно плотность распределения вероятности $f(\mathbf{X}_i/\mathbf{Y}_i)$ может быть записана как

$$f(\mathbf{X}_i/\mathbf{Y}_i)\approx\sum_{j=1}^{L}q_i^j\delta\left(\mathbf{X}_i-\mathbf{X}_i^j\right). \tag{9}$$

Отличительная особенность приведенных выше соотношений заключается в том, что ненормированные веса могут вычисляться с помощью рекуррентных соотношений

$$\tilde{q}_i^j=f(\mathbf{y}_i/\mathbf{x}_i^j)\tilde{q}_{i-1}^j,\qquad \tilde{q}_{i-1}^j=f(\mathbf{Y}_{i-1}/\mathbf{X}_{i-1}^j), \tag{10}$$

поскольку $f(\mathbf{Y}_i/\mathbf{X}_i^j)=f(\mathbf{y}_i/\mathbf{Y}_{i-1},\mathbf{X}_i^j)f(\mathbf{Y}_{i-1}/\mathbf{X}_i^j)=f(\mathbf{y}_i/\mathbf{x}_i^j)f(\mathbf{Y}_{i-1}/\mathbf{X}_{i-1}^j)$. Входящая в это выражение функция $f(\mathbf{y}_i/\mathbf{x}_i^j)$ легко вычисляется с использованием выражения (4).

Для вычисления выражения (9) необходимо промоделировать L выборок случайных векторов в соответствии с функцией $f(\mathbf{X}_i)$. Такие выборки могут быть получены рекуррентно с использованием $\mathbf{X}_{i-1}^j$ и соотношений (3).

Однако анализ выражения (10) показывает, что для вычисления оценки и матрицы ковариаций (6) на каждом шаге достаточно иметь только выборки $\mathbf{x}_{i-1}^j$, с использованием которых формируется выборка $\mathbf{X}_i^j$, $j=\overline{1,L}$. Таким образом, становится очевидным, что на каждом i-м шаге нет необходимости хранить в памяти всю „предысторию“, т.е. выборки $\mathbf{X}_{i-2}^j$.

При использовании соотношений (6) наибольший вклад в результат вычислений оказывают выборки, расположенные в областях, где апостериорная плотность существенно отлична от нуля. Поскольку при использовании простейшего последовательного метода выборка формируется в соответствии с априорной плотностью распределения вероятности $f(\mathbf{X}_i)$, то значительное число элементов выборки этому требованию не удовлетворяет. В результате с течением времени может возникнуть ситуация, когда значения всех весов (6) станут близкими к нулю, что в полной мере проявилось при попытке применения этого метода в рассматриваемой задаче корреляционно-экстремальной навигации. Эта проблема известна как проблема „вырождения“ алгоритма [5].

Существуют два основных метода преодоления этой проблемы: метод существенной функции и метод апостериорной (повторной) существенной выборки [5] — в настоящей работе используем второй.

Последовательный метод Монте-Карло с апостериорной существенной выборкой. Поясним идею применения метода апостериорной существенной выборки для решения задачи фильтрации. Запишем выражение для апостериорной плотности распределения вероятности в виде

$$f(\mathbf{X}_i/\mathbf{Y}_i)=\frac{f(\mathbf{y}_i/\mathbf{x}_i)f(\mathbf{X}_i/\mathbf{Y}_{i-1})}{\int f(\mathbf{y}_i/\mathbf{x}_i)f(\mathbf{X}_i/\mathbf{Y}_{i-1})d\mathbf{X}_i}, \tag{11}$$

где $f(\mathbf{X}_i/\mathbf{Y}_{i-1})$ — плотность прогноза. Предположим, то имеется выборка $\mathbf{X}_i^j$, полученная в соответствии с этой плотностью, тогда можем записать

$$f\left(\mathbf{X}_i/\mathbf{Y}_{i-1}\right)\approx\frac{1}{L}\sum_{j=1}^{L}\delta\left(\mathbf{X}_i-\mathbf{X}_i^j\right). \tag{12}$$

Чтобы сформировать выборку $\mathbf{X}_i^j$, соответствующую $f(\mathbf{X}_i/\mathbf{Y}_i)$, необходимо рассчитать [6]

$$\mu_i^j = f(\mathbf{y}_i/\mathbf{x}_i^j) \qquad (13)$$

и промоделировать выборку случайных величин $\left[\tilde{\mathbf{x}}_i^1 \quad ... \quad \tilde{\mathbf{x}}_i^L\right]$ в соответствии с дискретным законом распределения, задаваемым множеством $\left[\mathbf{x}_i^1 \quad ... \quad \mathbf{x}_i^L\right]$. Каждому элементу этого множества соответствует вероятность q_i^j, вычисляемая по формуле (7), в которой $\tilde{q}_i^j = \mu_i^j$. Затем для вычисления $f\left(\mathbf{X}_{i+1}/\mathbf{Y}_i\right) = f\left(\mathbf{x}_{i+1}/\mathbf{x}_i\right) f\left(\mathbf{X}_i/\mathbf{Y}_i\right)$ необходимо промоделировать выборку в соответствии с плотностью распределения вероятности $\sum_{j=1}^{L} f\left(\mathbf{x}_{i+1}/\tilde{\mathbf{x}}_i^j\right)$, которая используется на следующем шаге для формирования $\left[\tilde{\mathbf{x}}_{i+1}^1 \quad ... \quad \tilde{\mathbf{x}}_{i+1}^L\right]$. Описанная процедура повторяется на каждом шаге, благодаря чему обеспечивается рекуррентный характер алгоритма фильтрации. Эффективность применения описанной процедуры в задаче корреляционно-экстремальной навигации проиллюстрирована на рис. 1 (*а* — график апостериорной плотности распределения вероятности; *б* — априорная выборка (серый цвет) и апостериорная выборка (черный); *в* и *г* — изолинии апостериорной плотности на фоне априорной и апостериорной выборки соответственно).

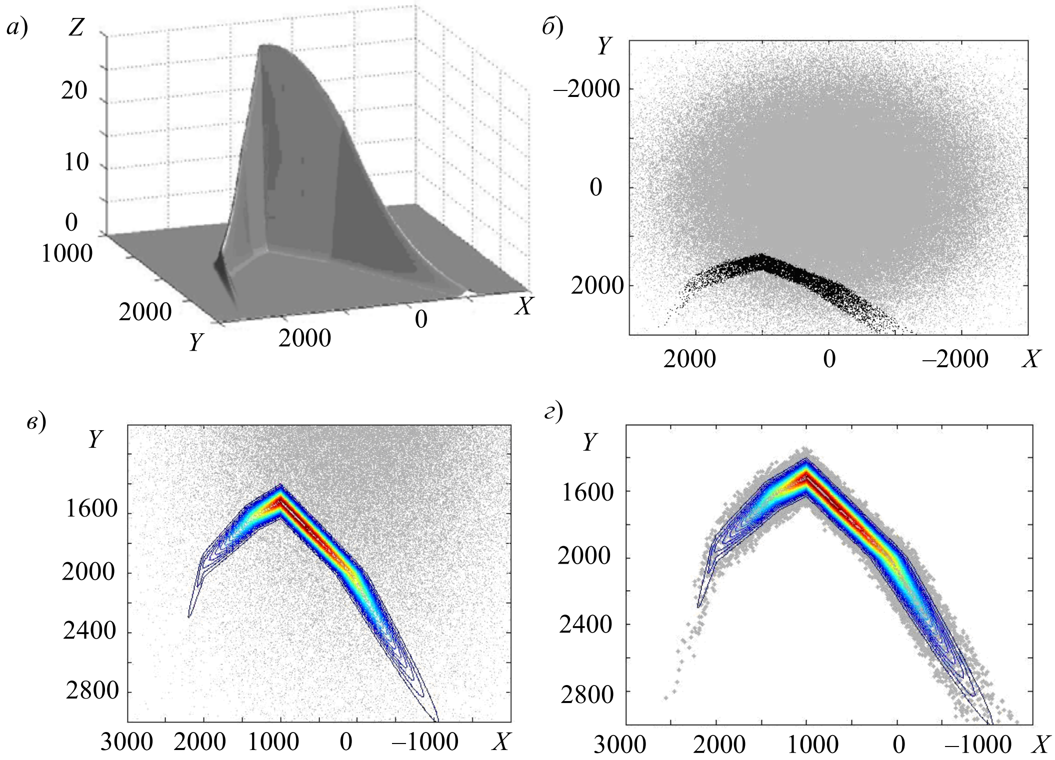

Рис. 1

Из представленного примера видно, что в результате применения описанной процедуры удается сформировать выборку, соответствующую апостериорной плотности распределения вероятности, в результате чего удается преодолеть проблему вырождения алгоритма. Бутстрэп-фильтр (B-фильтр), использующий такую процедуру, был впервые предложен в работе [2].

Результаты моделирования. Для оценки эффективности применения B-фильтра в задаче корреляционно-экстремальной навигации было проведено моделирование на участках поля рельефа с углами наклона в пределах 0—20°. Предполагалось, что информация о поле рельефа представлена в виде его значений в узлах равномерной сетки с расстояниями между узлами, равными 30Δ. Средние квадратические отклонения для ошибок по каждой координате принимались равными 30Δ. СКО систематической составляющей погрешности выбиралось равным 5Δ. Общее число используемых измерений, выполняемых с шагом 30Δ, принималось равным 35. СКО шума измерений составляло 0,05—2 % от среднего значения глубины на участке движения. СКО порождающих шумов принималось равным 5Δ.

При моделировании вычислялись характеристики точности, формируемые с использованием метода статистических испытаний [7]. Число реализаций метода Монте-Карло для расчета безусловных СКО принималось равным 1000, число реализаций L при использовании В-фильтра равнялось 625. Результаты моделирования приведены на рис. 2 (действительные *1* и расчетные *2* СКО оценок с использованием В-фильтра: *а*—*в* — с учетом изменчивости, *г* — без учета изменчивости; *а*, *г* — ошибка по широте, *б* — по долготе, *в* — погрешность карты).

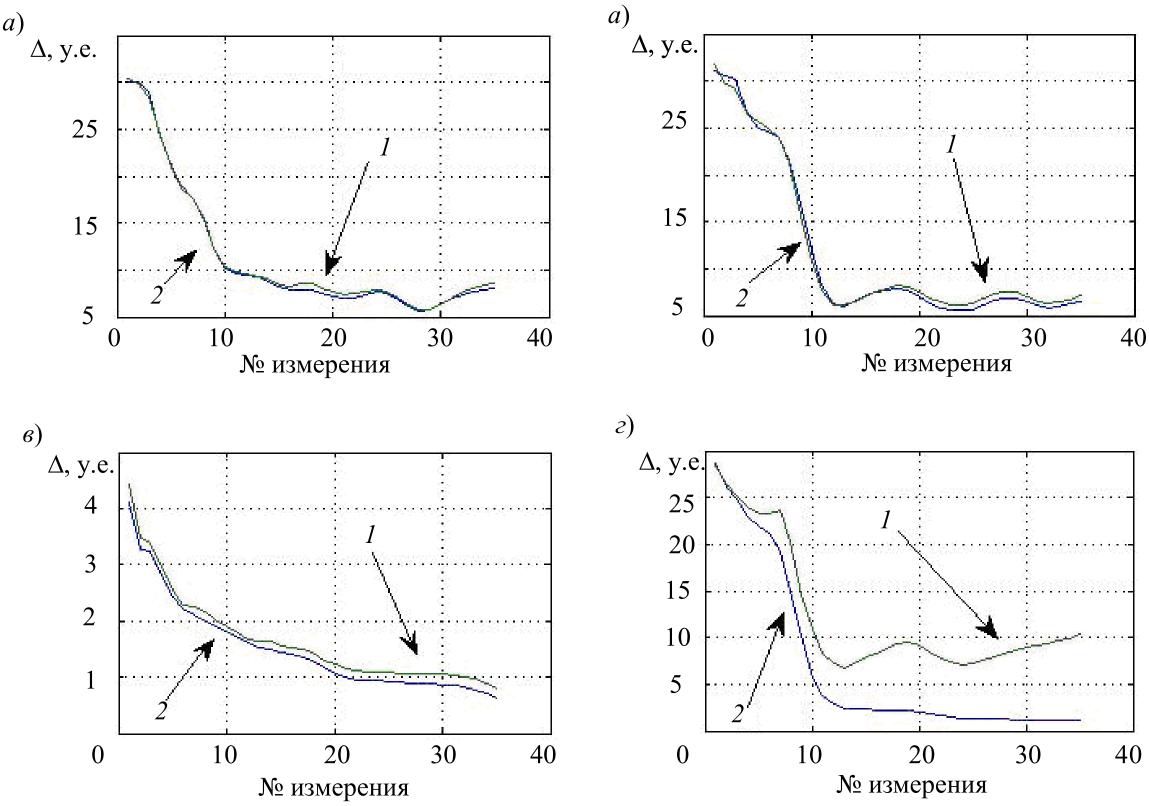

Рис. 2

С целью сопоставления на рис. 2, *г* приведены действительные и расчетные СКО, соответствующие В-фильтру для одной из компонент вектора состояния, когда изменчивость ошибок навигационной системы в модели не учитывалась, т.е. в условиях, когда для случая винеровских моделей расчетная модель соответствовала неизменному во времени вектору.

Из представленных результатов следует, что применение В-фильтра позволяет решать рассматриваемую задачу фильтрации в условиях изменчивости ошибок навигационной системы. Подтверждением правильности получаемых результатов, в частности, служит совпадение расчетной и действительных характеристик точности.

Выводы. Проведенные исследования подтвердили эффективность применения последовательного метода Монте-Карло, основанного на апостериорной (повторной) существенной выборке, для решения задачи корреляционно-экстремальной навигации. В дальнейшем планируется реализовать эти методы при решении задачи корреляционно-экстремальной навигации в случае, когда используется более сложная модель ошибок навигационной системы.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 09-08-00828а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Arulampalam S., Maskell S., and Gordon N.* A Tutorial on Particle Filters for on-line nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking. DSTO 2001, IEEE 2001.
2. *Gordon N. J., Salmond D. J., and Smith A. F. M.* Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimate // IEEE Proc. Pt. F. 1993. Vol. 140, N 2. P. 107—113.
3. *Doucet A., de Freitas N., and Gordon N. J.* Sequential Monte Carlo Methods in Practice. NY: Springer-Verlag, 2001. P. 581.
4. *Степанов О. А.* Применение теории нелинейной фильтрации в задачах обработки навигационной информации. СПб: ЦНИИ „Электроприбор", 2003. 369 с.
5. *Doucet A.* On sequential simulation-based methods for Bayesian filtering // Technical Report CUED/FINFENG/ TR 310. Department of Engineering, Cambridge University, 1998. P. 26.
6. *Smith A. F. M. and Gelfand A. E.* Bayesian statistics without tears: a sampling-resampling perspective // Amer. Stat. 1992. Vol. 46. P. 84—88.
7. *Степанов О. А.* Основы теории оценивания с приложениями к задачам обработки навигационной информации. СПб: ЦНИИ „Электроприбор", 2009. 496 с.

Сведения об авторах

Олег Андреевич Степанов — д-р техн. наук; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра информационно-навигационных систем; E-mail: ostepanov@eprib.ru

Антон Борисович Торопов — ЦНИИ „Электроприбор", Санкт-Петербург; научный сотрудник; E-mail: toropov_a@mail.ru

Рекомендована кафедрой
информационно-навигационных систем

Поступила в редакцию
07.05.10 г.