

А. А. ВИНОГРАДОВА, С. В. ТРУТНЕНКО

СРАВНИТЕЛЬНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ПРОГРАММ МУЛЬТИФРАКТАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Дано краткое представление фрактала и мультифрактала. Рассматриваются три вида мультифрактального анализа на основе трех программ (программа, работающая под системой Linux, Fractan и Multifrac) и производится их сравнение.

Ключевые слова: анализ, фрактал, обработка сигналов, статистическая сумма, показатель Хёрста.

Введение. К фракталам относят геометрические объекты: линии, поверхности, тела, которые имеют сильно изрезанную форму и демонстрируют некоторую повторяемость в широком диапазоне масштабов. Она может быть полной (в этом случае говорят о фракталах), либо может наблюдаться некоторый элемент нерегулярности (такие фракталы называют случайными) [1]. При описании свойств фрактала используется такая характеристика, как фрактальная размерность — D [1]. Реальные физические объекты, даже обладающие признаками самоподобия, очень редко могут быть описаны с помощью лишь одной величины фрактальной размерности. Именно поэтому в последнее время получил большое распространение анализ, основанный на теории мультифракталов — неоднородных фрактальных объектов. Для характеристики мультифрактала недостаточно одной величины фрактальной размерности, а необходим их бесконечный спектр — $D(q)$. Такими объектами, например, являются сигналы и изображения. Для определения их мультифрактальности используются программы для мультифрактального анализа.

Программа мультифрактального анализа, работающая под операционной системой Linux. На выходе программы реализуются скейлинговая экспонента $\tau(q)$:

$$\tau(q) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(Z(q, \varepsilon))}{\ln \varepsilon}$$

и спектр фрактальных размерностей $D(q)$:

$$D_q = \frac{\tau(q)}{q-1},$$

где $Z(q, \varepsilon)$ — обобщенная статистическая сумма, q — показатель степени обобщенной статистической суммы, ε — размер ячейки.

Для обработки был взяты экспериментальные данные трибологического взаимодействия, полученные на кафедре мехатроники СПбГУ ИТМО с экспериментальной установки „Трибал“ (рис. 1).

Входными данными для программы является текстовый файл, содержащий две колонки чисел (время и значение данных). Для получения входного сигнала необходимо преобразовать полученные экспериментальные данные (см. рис.1) в матрицу $n \times 2$, добавив столбец с порядковым номером.

На выходе получают скейлинговую экспонента (рис. 2) и спектр фрактальных размерностей (рис. 3).

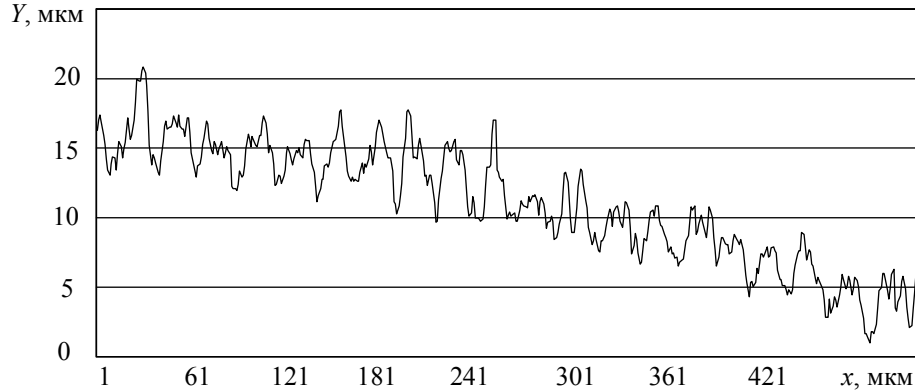


Рис. 1

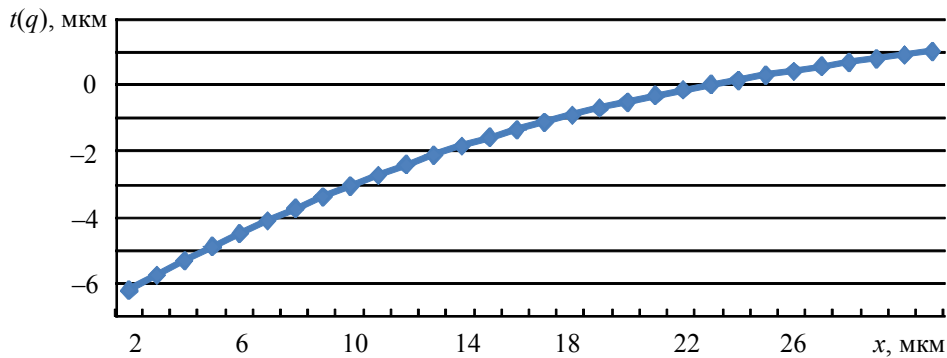


Рис. 2

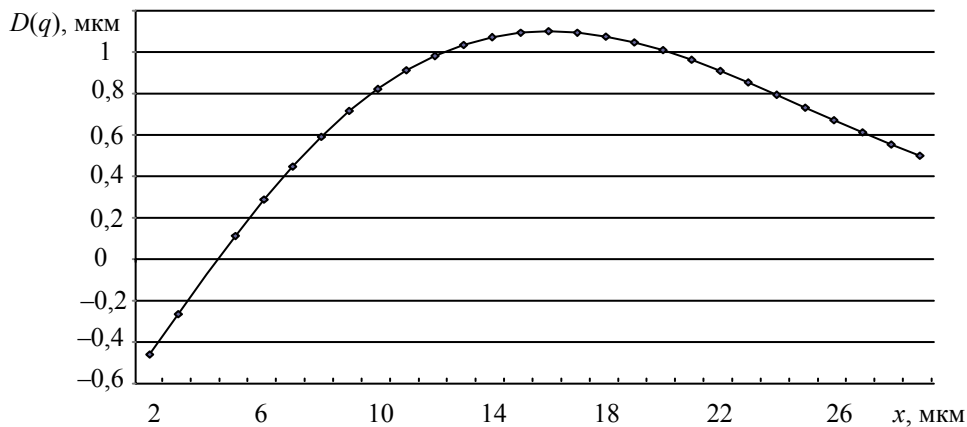


Рис. 3

Полученные выходные данные демонстрируют неравномерность входного сигнала, так как при изменении показателя степени обобщенной статистической суммы меняется и фрактальная размерность.

Программа Fractan на выходе выдает несколько параметров, но основным для мультифрактального анализа является параметр Хёрста (H), который характеризует степень изрезанности исследуемого графика. Эмпирический закон Хёрст открыл, занимаясь изучением

Нила [4], впоследствии оказалось, что и многие другие природные явления хорошо описываются этим законом.

Временные последовательности, для которых $H > 0,5$, относятся к классу персистентных — сохраняющих имеющуюся тенденцию (термин образован Мандельбротом от латинского „persistere“ — пребывать, оставаться [5]). Если в течение некоторого времени в прошлом происходило увеличение значений, то и впредь в среднем будет происходить увеличение. И наоборот, тенденция к уменьшению в прошлом означает в среднем продолжение уменьшения в будущем. Чем больше значение H , тем сильнее выражена тенденция. При $H=0,5$ выраженной тенденции процесса не выявлено, и нет оснований считать, что она появится в будущем.

Случай $H < 0,5$ характеризуется антиперсистентностью — рост в прошлом означает уменьшение в будущем, и наоборот — чем меньше H , тем выше эта вероятность. В процессах после возрастания переменной обычно происходит ее уменьшение, а после уменьшения — возрастание. Задача программ мультифрактальной обработки состоит в том, чтобы идентифицировать существенно нелинейную динамическую систему, и здесь уровень идентификации отличается от уровня идентификации линейных систем.

Например, обработав данные экспериментальных данных (см. рис.1), получаем параметр Хёрста $H = 1,049\ 975$, это означает, что сигнал персистентен.

Параметр Хёрста H выражается через размах R изменений значений исследуемого сигнала на отрезке времени Δt и рассчитанное для этого отрезка стандартное отклонение S [2]:

$$H = \ln(R/S) / \ln(\Delta t),$$

$$R = \max X_H(t) - \min X_H(t).$$

X_H — функция, описывающая сигналы с определенным значением H [2].

Программа Multifrac. На кафедре мехатроники СПбГУ ИТМО создана программа, с помощью которой можно получить как фрактальную размерность, так и показатель Хёрста. Приложение позволяет просчитывать показатели сигнала, визуализировать данные и выводить информацию в соответствующие поля.

Данные в программе имеют следующие обозначения: HE (Энтропия) — мера беспорядка системы, состоящей из многих элементов, в данном случае — мера количества информации, необходимой для определения системы в некотором положении i ; H (Хёрст) — антиперсистентность сигнала; D0 — размерность данных (является локальной характеристикой данного объекта); D1 — информационная размерность (характеризует информацию, необходимую для определения местоположения точки в некоторой ячейке, в случае многомерного ряда не рассчитывается); D2 — обобщенная фрактальная (корреляционная) размерность.

Обобщенная фрактальная размерность определяет зависимость корреляционного интеграла I :

$$I(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{n,m} \Theta(\varepsilon - |\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m|),$$

суммирование проводится по всем парам точек фрактального множества с радиусами-векторами \mathbf{r}_n и \mathbf{r}_m , с использованием ступенчатой функции Хевисайда $\Theta(x)$. Сумма в данном выражении определяет число пар точек n и m , для которых расстояние между ними меньше ε . Поэтому поделенная на N^2 , она определяет вероятность того, что две произвольные точки разделены расстоянием менее ε . По этой причине величину D2 называют корреляционной размерностью.

Между значениями среднеквадратического $\sigma = Rq$ и среднеарифметического отклонения профиля Ra установлена следующая зависимость: $\sigma = Rq = 0,016\ 28Ra$.

Зависимость между показателем Хёрста и величиной среднеарифметического отклонения профиля имеет вид $H_z = 2,636Ra$.

Программа Multifrac позволяет рассчитывать и выводить данные без использования математических моделей.

В таблице приведены значения, полученные при использовании трех программ (во второй колонке программа, работающая под системой Linux).

Параметры	Fractan	Linux	Multifrac
HE	—	—	0,210 49
H	1,0499 75	—	0,179 73
D0	0,950 025	0,301 03	1,8203
D1	—	0,316 081	0,003 656 5
D2	1,118	0,331 133	0,149 13
σ	—	—	0,011 628Ra
H_z	—	—	2,636Ra

Выводы. Обычно в любой программе используются разные математические модели, т.е. системы уравнений и концепций, используемых для описания и прогнозирования данного феномена или поведения объекта.

Программа Multifrac позволяет определять большее количество параметров по сравнению с программой Fractan и мультифрактальным анализом под системой Linux. Это дает возможность более точно описать характеристики обрабатываемого сигнала. В программе реализуется обработка без применения математических моделей. Планируется использование математических моделей в программе Multifrac.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. М.: Техносфера, 2006. 488 с.
2. Ashkenazy Y. Software for analysis of multifractal time series [Electronic resource]: <<http://physionet.ph.biu.ac.il/physiotools/>>.
3. Мусалимов В. М., Валетов В. А. Динамика фрикционного взаимодействия. СПб: СПбГУ ИТМО, 2006. 191 с.
4. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. М., 2002.
5. Короленко П. В. Фрактальные и мультифрактальные методы, вейвлет-преобразования. М., 2004.
6. Научно-технический словарь [Электронный ресурс]: <<http://nts.sci-lib.com/article0002646.html>>.
7. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. М.: Научно-издательский центр „Регулярная и хаотическая динамика“, 2001.
8. Павлов А. Н. Мультифрактальный анализ сложных сигналов // УФН. 2005. Т. 177, № 8. С. 859—876.
9. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. М.: Техносфера, 2005. 1072 с.

Сведения об авторах

- Алла Алексеевна Виноградова** — аспирант; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра мехатроники; E-mail: vinogradova_a@list.ru
- Сергей Викторович Трутненко** — студент; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра мехатроники; E-mail: trutnenko@gmail.com

Рекомендована кафедрой
мехатроники

Поступила в редакцию
01.03.11 г.