
ПРИБОРЫ И СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

УДК 62-506

О. А. РЕМИЗОВА, И. В. РУДАКОВА, В. В. СЫРОКВАШИН, А. Л. ФОКИН

РОБАСТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМ ОБЪЕКТОМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ С ПРИМЕНЕНИЕМ КВАДРАТИЧНЫХ МЕТОДОВ СИНТЕЗА СИСТЕМЫ

Синтез робастного регулятора для объекта с запаздыванием осуществляется по расширенной модели последнего, полученной вследствие искусственного разделения движений в нем, в рамках решения задачи H^2 -оптимального управления и задачи аналитического конструирования оптимальных регуляторов для звена чистого запаздывания.

Ключевые слова: неопределенность, интегральный квадратичный функционал, случайные возмущения, линейная теория, расширенная модель, демпфирование.

Введение. Методы синтеза, основанные на решении оптимальных задач с минимизацией квадратичного функционала, широко используются при проектировании систем управления, так как они позволяют уменьшить непроизводительные затраты энергии, вызванные действием возмущений, при работе системы управления.

Основным недостатком такой системы является чувствительность регулируемых величин к неопределенности параметров модели объекта управления [1—3]. Это приводит к существенной потере качества управления, а во многих случаях к потере устойчивости реальной системы.

Наличие запаздывания в модели объекта усложняет задачу синтеза и ухудшает качественные показатели системы, в наибольшей степени — показатели грубости. Поэтому для систем с запаздыванием особенно актуальна задача снижения чувствительности к возможным вариациям параметров, в том числе и к величине запаздывания, которое может изменяться в процессе функционирования объекта.

Будем рассматривать модель „вход—выход объекта“ в виде передаточной функции в комплексной плоскости

$$y_0(p) = W_o(p)u(p) = k_o \frac{B_v(p) \exp(-\tau_o p)}{A_n(p)} u(p), \quad (1)$$

где $B_v(p)$, $A_n(p)$ — произвольные полиномы степени v, n соответственно ($v \leq n$, $B_v(0) = A_n(0) = 1$), коэффициенты полиномов $B_v(p)$, $A_n(p)$ могут изменяться в заданных интервалах: $\underline{k}_o \leq k_o \leq \overline{k}_o$, $\underline{\tau}_o \leq \tau_o \leq \overline{\tau}_o$.

Традиционно при наличии запаздывания используется точное его прогнозирование: упредитель Смита, регулятор Ресвика, которые обеспечивают отсутствие запаздывания в харак-

теристическом уравнении замкнутой системы [4, 5]. К этой же группе можно отнести регуляторы, использующие прогнозирующую модель (предикторы) [6, 7].

Такая система работоспособна при известной величине запаздывания, так как звено запаздывания непосредственно входит в передаточную функцию регулятора.

В настоящей работе предлагается подход, в котором использована идея декомпозиции модели (1) на звено чистого запаздывания и инерционную часть и последовательно решена практически востребованная задача синтеза в рамках робастной квадратичной теории без привлечения методов точного прогнозирования движения системы на время запаздывания.

Основной результат. Вместе с реальной передаточной функцией объекта (1) рассмотрим номинальную

$$W_o(p) = k_o^0 \frac{B_v^0(p)}{A_n^0(p)} \exp(-\tau_o^0 p), \quad (2)$$

где k_o^0, τ_o^0 — номинальные значения коэффициента передачи и запаздывания, $B_v^0(p), A_n^0(p)$ — номинальные полиномы числителя и знаменателя.

Здесь предполагается, что пары реальных и номинальных полиномов $B_v(p), B_v^0(p)$ и $A_n(p), A_n^0(p)$ являются одновременно устойчивыми или неустойчивыми, или находятся на границе устойчивости. В случае неустойчивости они имеют одинаковое число неустойчивых корней.

Задача синтеза решается при дополнительном условии уменьшения чувствительности системы к возможным вариациям параметров модели (1) и величины запаздывания относительно их номинальных значений. Это достигается за счет искусственного расширения исходной номинальной модели (2) и разделения движений в объекте на две составляющие. Управление решает две задачи квадратичной оптимизации: стабилизацию исходной модели объекта и обеспечение взаимной компенсации составляющих движения модели. Решение второй задачи, как показано в [8—11], обеспечивает робастность системы.

Первый этап синтеза. Здесь решается задача увеличения грубости по отношению к запаздыванию. Рассматривается часть передаточной функции (2), содержащая чистое запаздывание с аппроксимацией Паде

$$W_{o1}(p) = \exp(-\tau_o^0 p) \approx \frac{\beta(p)}{\alpha(p)} = \frac{1 - \tau_o^0 p/2}{1 + \tau_o^0 p/2}. \quad (3)$$

Аппроксимация Паде первого порядка вполне точно представляет динамику запаздывания в области низких и средних частот. Для увеличения точности можно рассмотреть аппроксимации второго, третьего и более высоких порядков, но в этом случае увеличивается сложность регулятора.

Для определенности условимся, что система является робастной по отношению к вариациям величины запаздывания τ_o , если она не теряет устойчивости при неконтролируемом возрастании этой величины в 3—4 раза относительно номинального значения τ_o^0 . Этого вполне достаточно для практики. Тогда справедливо следующее утверждение.

Утверждение. Решение задачи оптимального управления с минимизацией интегрального квадратичного функционала для объекта чистого запаздывания, грубого по отношению к вариациям величины запаздывания, достигается в классе ПИ законов регулирования вида

$$W_{p1}(p) = \frac{k(p)}{l(p)} = \frac{b_1 p + b_0}{p}. \quad (4)$$

где $k(p), l(p)$ — полиномы, b_1, b_0 — настраиваемые параметры регулятора.

Доказательство. Во временной области модель (4) будет

$$\dot{x}_1 = -\frac{2}{\tau_o^0} x_1 + \frac{4}{\tau_o^0} u_1, \quad (5)$$

$$y_1 = x_1 - u_1. \quad (6)$$

Для робастной стабилизации такого объекта лучше всего подходит задача аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР) расширенной модели [8, 9], так как это позволяет получить регулятор минимальной размерности, равной единице. Кроме того, на этом этапе задача может быть рассмотрена без возмущений.

Искусственное разделение на две составляющие достигается за счет пропуска переменной состояния x_1 через фильтр вида

$$\bar{x}_1(p) = \frac{1 - t_{\phi 1} p}{1 + t_{\phi 2} p} x_1(p), \quad (7)$$

где $t_{\phi 1}, t_{\phi 2}$ — настраиваемые параметры фильтра.

Для синтеза оптимального регулятора состояния по расширенной модели вводится новая регулируемая переменная

$$z_1 = m_1 \Delta \bar{x}_1 + m_2 \bar{x}_1, \quad (8)$$

где m_1, m_2 — настраиваемые коэффициенты ($m_1, m_2 > 0, m_1 \neq m_2$), $\Delta \bar{x}_1 = x_1 - \bar{x}_1$.

Расширенное уравнение состояния имеет вид

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\beta_1/\tau_o^0 & -t_{\phi 2}^{-1} & -2\beta_1/\tau_o^0 \\ (1 + 2t_{\phi 1}/\tau_o^0)/t_{\phi 2} & 2t_{\phi 1}/t_{\phi 2}\tau_o^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \bar{x}_1 \\ \bar{x}_1 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} \beta_1/\tau_o^0 \\ t_{\phi 1}/t_{\phi 2}\tau_o^0 \end{bmatrix} u_1, \quad (9)$$

где $\beta_1 = 1 + t_{\phi 1}/t_{\phi 2}$.

В качестве квадратичного функционала рассматривается выражение

$$J = \int_0^{\infty} [qz_1^2(t) + ru_1^2(t)] dt, \quad (10)$$

где q, r — настраиваемые параметры.

Задаваясь настраиваемыми параметрами $t_{\phi 1}, t_{\phi 2}, m_1, m_2, q, r$, решаем задачу АКОР (9), (10), как описано в [8], и получаем управление по состоянию

$$u_1 = k_1 \Delta \bar{x}_1 + k_2 \bar{x}_2. \quad (11)$$

После подстановки управления (11) в модель (9) получаем замкнутую систему с известным характеристическим уравнением

$$G^0(p) = p^2 + g_1^0 p + g_0^0 = 0, \quad (12)$$

где g_1^0, g_0^0 — известные коэффициенты.

Регулятор выхода в данном случае может быть получен в виде ПИ закона (4). Для системы, состоящей из объекта (3) и регулятора (4), характеристическое уравнение имеет вид

$$G(p) = \alpha(p)l(p) + \beta(p)k(p) = p^2 + g_1 p + g_0 = 0, \quad (13)$$

где коэффициенты g_1, g_0 линейно зависят от параметров b_1, b_0 .

Приравняв полиномы (12) и (13), получим систему линейных уравнений для определения неизвестных коэффициентов b_1, b_0 вида

$$\begin{bmatrix} (g_1^0 + 2/\tau_o^0) & -1 \\ g_0^0 & 2/\tau_o^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1^0 - 2/\tau_o^0 \\ g_0^0 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Решив систему уравнений (14), получим значения параметров регулятора (4) для заданного значения запаздывания τ_o^0 .

Второй этап синтеза. Рассматривается исходная номинальная передаточная функция объекта (2) при условии, что для компенсации влияния звена запаздывания применяется ПИ регулятор (4). Поэтому при синтезе регулятора второго этапа теоретически нужно рассматривать передаточную функцию с запаздыванием вида

$$W_{o2}(p) = k_o^0 \frac{b_1 p + b_0}{p} \frac{B_v^0(p)}{A_n^0(p)} \exp(-\tau_o^0 p). \quad (15)$$

Но дальше процедура синтеза становится приближенной, так как передаточная функция (15) рассматривается без запаздывания. Отсутствие запаздывания легко скорректировать в дальнейшем. Поэтому при $k_o^0 = 1$ будет

$$\hat{W}_{o2}(p) = \frac{b_1 p + b_0}{p} \frac{B_v^0(p)}{A_n^0(p)}. \quad (16)$$

Синтез регулятора выхода осуществляется при помощи решения задачи H^2 -оптимального управления для расширенной модели, которая соответствует передаточной функции (16), при наличии возмущений типа белого или цветного шума. Пусть исходная модель объекта имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_0 + \mathbf{B}_{10} \mathbf{w}_0 + \mathbf{B}_{20} u, \quad \mathbf{x}_0(0) = \mathbf{x}_0^0, \quad (17)$$

$$\mathbf{z}_0 = \mathbf{C}_{10} \mathbf{x}_0, \quad (18)$$

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{C}_{20} \mathbf{x}_0 + n_y, \quad (19)$$

где $\mathbf{x}_0 \in R^n$ — вектор состояния, $u \in R^1$ — управление, $\mathbf{w}_0 \in R^l$ — вектор возмущения в объекте, $n_y \in R^1$ — помеха измерения, $\mathbf{z}_0 \in R^y$ — вектор контролируемых переменных, $\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_{10}, \mathbf{B}_{20}$ — номинальные значения матриц.

При расширении модели вводится система фильтров для получения опорной траектории в пространстве состояний вида

$$\mathbf{x}_1(p) = \mathbf{W}_\phi(p) \mathbf{x}_0(p) = \frac{1 - T_{\phi 1} p}{1 + T_{\phi 2} p} \mathbf{x}_0(p), \quad (20)$$

где $T_{\phi 1}, T_{\phi 2}$ — постоянные времени фильтра.

Относительно этой опорной траектории рассматривается сигнал рассогласования

$$\Delta x_1(t) = x_0(t) - x_1(t). \quad (21)$$

После этого вводится новая регулируемая переменная

$$z(t) = d_1 \Delta x_1(t) + d_2 x_1(t), \quad (22)$$

где $d_1 \neq d_2, d_1, d_2 > 0$ — настраиваемые параметры.

В расширенном пространстве состояний $\mathbf{x}^T = [\Delta x_1^T \quad x_1^T]^T$ модель (17)–(22) имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B}_1 \mathbf{w}_0 + \mathbf{B}_2 u, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} (x_0^0)^T \\ 0 \end{bmatrix}^T, \quad (23)$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{M}d\mathbf{x}, \quad (24)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_2\mathbf{x} + n_y, \quad (25)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \beta A_0 - T_{\phi 2}^{-1} \mathbf{I} & \beta A_0 \\ T_{\phi 2}^{-1}(I - T_{\phi 1} A_0) & -T_{\phi 2}^{-1} T_{\phi 1} A_0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \beta B_{10} \\ -T_{\phi 2}^{-1} T_{\phi 1} B_{10} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} \beta B_{20} \\ -T_{\phi 2}^{-1} T_{\phi 1} B_{20} \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

— вектор состояния расширенной модели объекта, $\beta = 1 + T_{\phi 2}^{-1} T_{\phi 1}$, $\mathbf{d} = [d_1 \mathbf{I} \quad d_2 \mathbf{I}]$, $\mathbf{M} = \text{diag}\{\mu_i\}$, $\mathbf{C}_2 = [\mathbf{C}_{20} \quad \mathbf{C}_{20}]$, $i = 1, \dots, n$.

Далее для расширенной модели решается задача H^2 -оптимального управления. В работе [10] доказано, что решение существует и осуществлена частичная взаимная компенсация сигналов $\Delta x_1(t)$ и $x_1(t)$, которая обеспечивает робастность синтезированной системы. Для достижения заданных качественных показателей системы используется настройка в пространстве параметров: $T_{\phi 1}$, $T_{\phi 2}$, d_1 , d_2 , μ_i . Решение находится в соответствии с методикой, представленной в [9—11]. В результате получаем регулятор с промежуточной передаточной функцией $W_{p2}(p)$.

Настройка параметров выполняется таким образом, чтобы соблюдались два условия:

$$\omega_{C_2} \leq \omega_{C_1}, \quad (26)$$

$$h_2 \geq h_1, \quad \varphi_2 \approx \varphi_1, \quad (27)$$

где ω_{C_2} — частота среза системы без запаздывания с передаточной функцией регулятора $W_{p2}(p)$; h_2 , φ_2 — запасы по амплитуде и фазе для этой системы, ω_{C_1} , h_1 , φ_1 — соответствующие показатели, полученные для звена чистого запаздывания.

При выполнении условия (26) процедуры синтеза первого и второго этапов дополняют друг друга, так как целью обоих этапов является повышение качества системы примерно в одной и той же области частот. Условие (27) позволяет получить систему, не уступающую по качеству системе, синтезированной на первом этапе. Оно, в отличие от (26), не является необходимым и обусловлено приближенным характером синтеза регулятора на втором этапе. Оно позволяет устранить последствия замены точной передаточной функции (15) ее приближенным аналогом (16) и вносит дополнительный элемент коррекции.

В результате двухэтапной процедуры синтеза получается регулятор с передаточной функцией вида

$$W_p(p) = \frac{b_1 p + b_0}{k_o^0 p} W_{p2}(p). \quad (28)$$

Пример. Рассмотрим объект с номинальной передаточной функцией

$$W_o(p) = \frac{k_o^0}{(T_o^0 p + 1)^3} \exp(-\tau_o^0 p), \quad (29)$$

где $k_o^0 = 0,325$, $T_o^0 = 6$ с, $\tau_o^0 = 6$ с.

На первом этапе синтеза рассмотрим значения параметров: $t_{\phi 1} = 50$ с, $t_{\phi 2} = 8$ с, $m_1 = 5$, $m_2 = 4,9$, $q = 1$, $r = 10^3$. Тогда для объекта чистого запаздывания получим систему со следующими характеристиками: H^∞ -норма функции чувствительности: $\eta = 1,558$, запас устойчивости по амплитуде: $h_1 = 9,05$ дБ, запас устойчивости по фазе: $\varphi_1 = 73,4^\circ$, частота среза:

$\omega_{C_1} = 0,0947 \text{ с}^{-1}$. Для регулятора (4) следующие параметры: $b_1 = 0,2748$, $b_0 = 0,09109$. Интервал изменения относительной величины запаздывания, при котором система не теряет устойчивости, будет

$$0 < \tau_o^0 / \tau_o \leq \tau_m = 3,25. \quad (30)$$

Переходная характеристика первого этапа представлена на рис. 1. Передаточная функция (16) будет иметь вид

$$\hat{W}_2(p) = \frac{1}{(T_o^0 p + 1)^3} \frac{b_1 p + b_0}{p}. \quad (31)$$

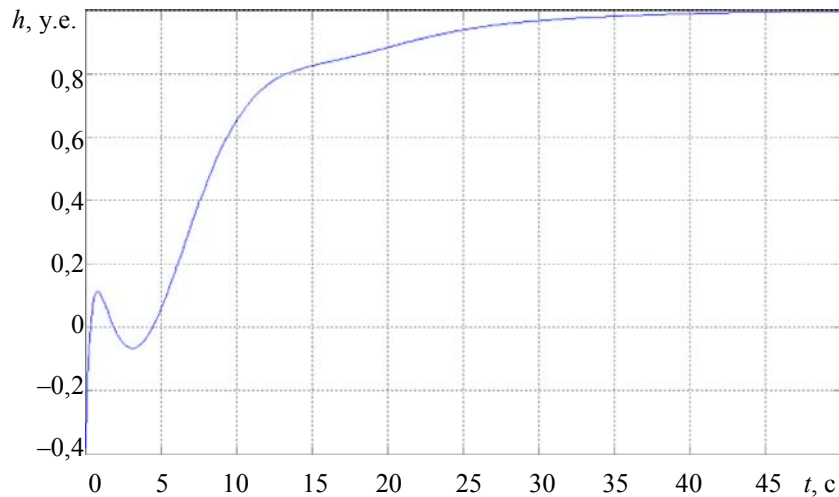


Рис. 1

Ей соответствует представление (17)—(19) с матрицами

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0,0046 & -0,083 & -0,5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{10} = \mathbf{B}_{20} = \mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,0013 \\ -0,0002 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_{10} = \mathbf{C}_{20} = \mathbf{C}_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0].$$

Расширенная модель получается в соответствии с формулами (20)—(25). Далее по методике, изложенной в [9—11], решается задача H^2 -оптимального управления при значениях настраиваемых параметров: $T_{\phi 1} = 6,9 \cdot 10^5 \text{ с}$, $T_{\phi 2} = 200 \text{ с}$, $d_1 = 5$, $d_2 = 4,65$. В результате получается передаточная функция регулятора вида

$$W_p(p) = \frac{k(p)}{pl(p)}, \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned} k(p) &= 21,65p^8 + 18,96p^7 + 6,16p^6 + 0,91p^5 + 0,057p^4 + 0,0007p^3 + \\ &\quad + 3,4 \cdot 10^{-6}p^2 + 5,54 \cdot 10^{-9}p + 1,116 \cdot 10^{-13}; \\ l(p) &= 0,325p^8 + 1,124p^7 + 1,534p^6 + 0,991p^5 + 0,2p^4 + 0,0039p^3 + \\ &\quad + 2,8 \cdot 10^{-5}p^2 + 9,2 \cdot 10^{-8}p + 1,13 \cdot 10^{-10}. \end{aligned}$$

Переходная характеристика приведена на рис. 2. Система имеет следующие характеристики: $\eta = 1,719$, $h_1 = 9,51$ дБ, $\varphi_1 = 54,4^\circ$, $\omega_{C_1} = 0,0701$ с⁻¹, $\tau_m = 3,25$, последнее совпадает со значением на первом этапе синтеза (30).

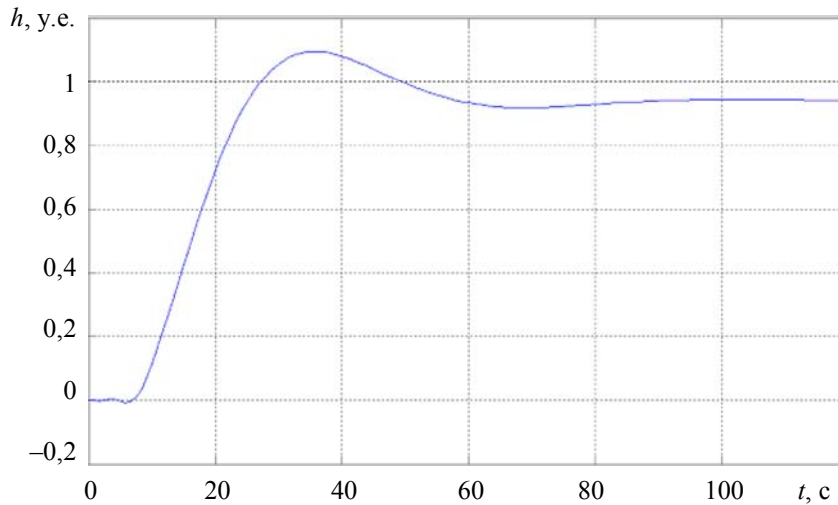


Рис. 2

Для сравнения приведем характеристики соответствующей системы без запаздывания. При настройках $T_{\varphi 1} = 9 \cdot 10^5$ с, $T_{\varphi 2} = 200$ с, $d_1 = 5$, $d_2 = 1$ получим характеристики системы: $\eta = 1,379$, $h_1 = 14,6$ дБ, $\varphi_1 = 54,5^\circ$, $\omega_{C_1} = 0,154$ с⁻¹. Переходная характеристика представлена на рис. 3. Сравнение показывает, что система с запаздыванием имеет достаточно хорошие показатели качества переходного процесса.

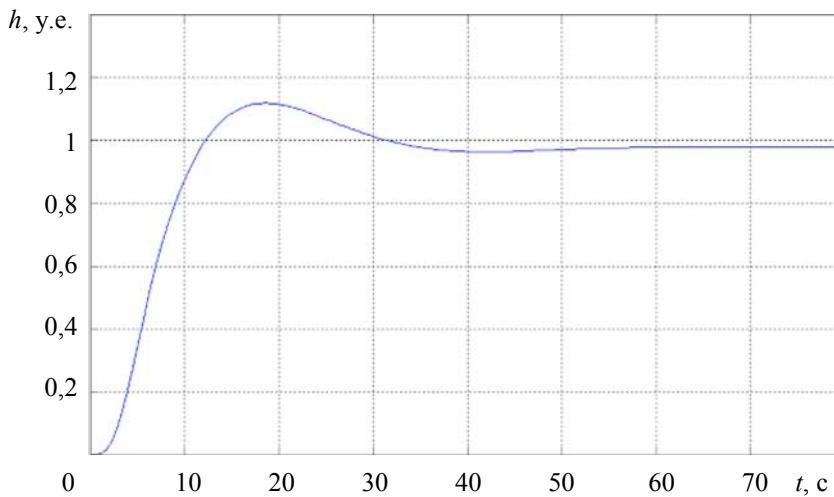


Рис. 3

Заключение. В работе предложена методика синтеза H^2 -оптимальных систем с запаздыванием, позволяющая получить решение, которое обладает значительной грубостью к параметрической неопределенности модели объекта, в том числе и к величине запаздывания. В основе методики лежит идея декомпозиции задачи управления на подзадачи управления объектом чистого запаздывания и управления с учетом инерционности объекта. Обе задачи решаются в классе оптимальных по квадратичному критерию систем. Грубость системы достигается за счет искусственного разделения движений объекта так, что управление осуществляет их взаимную компенсацию, что позволяет сделать грубым полученное H^2 -оптимальное решение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Янушевский Р. Т. О грубости решения задачи аналитического конструирования регуляторов // Автоматика и телемеханика. 1960. № 3. С. 18—25.
2. Поляк Б. Т., Щербаков П. С. Трудные задачи линейной теории управления. Некоторые подходы к решению // Автоматика и телемеханика. 2005. № 5. С. 7—46.
3. Бахилина И. М., Степанов С. А. Синтез грубых линейных квадратичных гауссовских регуляторов // Там же. 1998. № 7. С. 96—106.
4. Гурецкий Х. Анализ и синтез систем управления с запаздыванием. М.: Машиностроение, 1974. 328 с.
5. Ротач В. Я. Теория автоматического управления. М.: Изд-во МЭИ, 2004. 400 с.
6. Sotomacho E. F., Bordons C. Model Predictive Control. Springer-Verlag, 1999. 327 p.
7. Бобцов А. А., Колюбин С. А., Пыркин А. А. Компенсация неизвестного мультигармонического возмущения для нелинейного объекта с запаздыванием по управлению // Автоматика и телемеханика. 2010. № 11. С. 136—148.
8. Бороздин П. А., Сыроквашин В. В., Фокин А. Л. Робастное управление линейным инерционным объектом // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2008. № 4. С. 41—49.
9. Ремизова О. А., Рудакова И. В., Фокин А. Л. Синтез робастной системы стабилизации на основе квадратичной теории // Изв. СПбГТИ(ТУ). 2009. № 6. С. 71—75.
10. Климов А. П., Ремизова О. А., Рудакова И. В., Фокин А. Л. Уменьшение чувствительности H^2 -оптимальной системы к влиянию неопределенности модели объекта // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2010. № 3. С. 27—32.
11. Климов А. П., Ремизова О. А., Рудакова И. В., Фокин А. Л. Достижение робастности системы стабилизации, синтезированной на основе квадратичной теории // Изв. вузов. Приборостроение. 2010. Т. 53, № 7. С. 18—26.

Сведения об авторах

- Ольга Александровна Ремизова** — канд. техн. наук, доцент; Санкт-Петербургский государственный технологический институт (Технический университет), кафедра автоматизации процессов химической промышленности;
E-mail: remizova-oa@yandex.ru
- Ирина Викторовна Рудакова** — канд. техн. наук, доцент; Санкт-Петербургский государственный технологический институт (Технический университет), кафедра автоматизации процессов химической промышленности;
E-mail: rudakowa@ws01.sapr.pu.ru
- Владислав Викторович Сыроквашин** — канд. техн. наук, доцент; Санкт-Петербургский государственный технологический институт (Технический университет), кафедра автоматизации процессов химической промышленности
- Александр Леонидович Фокин** — д-р техн. наук, профессор; Санкт-Петербургский государственный технологический институт (Технический университет), кафедра автоматизации процессов химической промышленности;
E-mail: fokin_sa@mail.ru

Рекомендована кафедрой
автоматизации процессов
химической промышленности

Поступила в редакцию
15.02.11 г.