УДК 62-50

Д. С. БИРЮКОВ, А. В. УШАКОВ

ГРАМИАННЫЙ ПОДХОД К ОЦЕНКЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ЗАТРАТ НА УПРАВЛЕНИЕ В НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМАХ ПРИ СТАЦИОНАРНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Рассматривается задача оценки энергетических затрат на управление при входном стохастическом воздействии типа „экспоненциально коррелированный шум“. Приведена интерпретация характеристик стохастических систем с позиций грамианной теории и получен алгоритм оценки затрат на управление с помощью дисперсии управления в относительных величинах.

Ключевые слова: *стационарный в широком смысле стохастический процесс, грамиан затрат на управление, белый шум, окрашенный шум.*

Введение. Постановка задачи. При синтезе систем управления зачастую является неочевидным механизм выбора типа желаемого характеристического полинома в задаче обеспечения заданного времени переходного процесса в замкнутой устойчивой системе при отсутствии других требований к качеству процессов. Вместе с тем до сих пор при синтезе систем управления недостаточное внимание уделяется контролю энергетических затрат на управление. Для решения указанных задач авторами настоящей статьи был разработан ряд грамианных алгоритмов оценки затрат на управление для детерминированных входных воздействий.

В настоящей статье рассматривается задача оценки энергетических затрат на управление в условиях стационарных в широком смысле стохастических воздействий. При исследовании указанных проблем авторы опирались на базовые концепции, изложенные в работах [1, 2].

Отметим, что в настоящей статье принято обозначать оператор вычисления математического ожидания стохастической переменной $(*)$ как $E(*)$.

Определение 1. Стационарным в широком смысле (стационарным второго порядка) будем называть такой комплекснозначный L^2-процесс [1] $X=\{X(t), t\in T\}$, для которого T — некоторая группа элементов, а

$$EX(t)=a \text{ при } \forall t\in T, \tag{1}$$

$$R(s,t)=E\{[X(t)-EX(t)][X(s)-EX(s)]\}=R(t-s). \tag{2}$$

Определение 2. Стационарным в широком смысле стохастическим экзогенным воздействием типа „белый шум“ будем называть воздействие $g(t)=w(t)$, обладающее следующими свойствами:

$$E\{w(t)\}=0, \tag{3}$$

отсчеты $w(t+\tau)$ при $\forall\tau$ некоррелированы, поэтому

$$E\{w(t+\tau)w^T(t)\}=N\delta(t,\tau):\delta(t,\tau)=\begin{cases}\infty, \tau=0;\\ 0, \tau\neq 0,\end{cases} \tag{4}$$

где N — интенсивность стохастического процесса.

Определение 3. Стационарным в широком смысле стохастическим экзогенным воздействием типа „окрашенный шум“ будем называть воздействие $g(t)=\xi(t)$, обладающее следующими свойствами:

$$E\{\xi(t)\}=0, \tag{5}$$

$\exists\tau_к$: отсчеты $\xi(t+\tau)$ при $|\tau|\le\tau_к$ коррелированы.

Определение 4. Скалярным произведением двух стационарных в широком смысле процессов $\varphi(t),\psi(t): E\{\varphi(t)\}=0, E\{\psi(t)\}=0$ будем называть математическое ожидание их произведения:

$$(\varphi(t),\psi(t))=E\{\varphi(t)\psi(t)\}. \tag{6}$$

Определение 5. Нормой стационарного в широком смысле процесса $\varphi(t):E\{\varphi(t)\}=0$ будем называть величину $\|\varphi(t)\|$, удовлетворяющую соотношению

$$\|\varphi(t)\|^2=(\varphi(t),\varphi(t))=E\{\varphi(t)\varphi(t)\}. \tag{7}$$

Определение 6. Если процесс $\varphi(t)$ векторный ($\dim\varphi(t)=\nu,\forall t$), то стохастическим грамианом, построенным на его компонентах $\varphi_k(t)$, $k=\overline{1,\nu}$, будем называть матрицу математических ожиданий

$$W(\varphi)=E\{\varphi(t)\varphi^T(t)\}. \tag{8}$$

Примечание. Стохастический грамиан (8) в литературе, посвященной исследованию динамических процессов в системах при стохастических воздействиях, принято называть матрицей дисперсии [3] и обозначать как

$$W(\varphi)=D_\varphi. \tag{9}$$

Определение 7. Если процессы $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ векторные ($\dim\varphi(t)=\dim\psi(t)=$ $=\nu,\forall t$), то обобщенным стохастическим грамианом [4], построенным на векторах $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, будем называть матрицу

$$W(\varphi,\psi)=E\left\{\varphi(t)\psi^T(t)\right\}=E\left\{\varphi(t)\psi^T(t)\right\}^T. \tag{10}$$

Основной результат. Стохастический грамиан затрат на управление. Рассмотрим объект управления, математическая модель которого характеризуется следующими соотношениями:

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t); \tag{11}$$

$$y(t)=Cx(t), \tag{12}$$

где $x(t)$ — вектор состояния объекта; $u(t)$ — вектор входного воздействия; $y(t)$ — вектор выходной переменной; A — $n{\times}n$-матрица состояния; B — $n{\times}r$-матрица входа; C — $m{\times}n$-матрица выхода.

Входной сигнал $\xi(t)$ объекта выделяется формирующим фильтром из белого шума:

$$\dot{z}(t)=\Gamma_{\phi}z(t)+G_{\phi}w(t); \tag{13}$$

$$\xi(t)=P_{\phi}z(t), \tag{14}$$

где Γ_{ϕ}, G_{ϕ}, P_{ϕ} — матрицы, аналогичные матрицам A, B, C соответственно.

Ошибка слежения за входным сигналом определяется как

$$\varepsilon(t)=\xi(t)-y(t). \tag{15}$$

Управление обеспечивает в синтезируемой системе требуемые показатели качества переходного процесса и единичное замыкание по входу (воспроизведение входного сигнала на выходе системы):

$$u(t)=-Kx(t)+K_g\xi(t), \tag{16}$$

где K — матрица обратных связей по состоянию системы, K_g — матрица прямых связей по входу системы.

Замкнутая система, таким образом, описывается уравнением

$$\dot{x}(t)=Fx(t)+G\xi(t), \tag{17}$$

где F — матрица состояния замкнутой системы.

Объединим уравнения замкнутой системы и фильтра входного воздействия:

$$\dot{\tilde{x}}(t)=\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{z}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Fx(t) & GP_{\phi}z(t)\\ 0\cdot x(t) & \Gamma_{\phi}z(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ G_{\phi}\end{bmatrix}w(t); \tag{18}$$

$$\dot{\tilde{x}}(t)=\tilde{F}\tilde{x}(t)+\tilde{G}w(t), \tag{19}$$

$$\tilde{F}=\begin{bmatrix}Fx(t) & GP_{\phi}z(t)\\ 0\cdot x(t) & \Gamma_{\phi}z(t)\end{bmatrix};\ \tilde{G}=\begin{bmatrix}0\\ G_{\phi}\end{bmatrix}. \tag{20}$$

Для оценки затрат на управление сформируем выражение для дисперсии D_U с использованием уравнения (16):

$$D_U=E\left\{u(t)u^T(t)\right\}=E\left\{\left(K_g\xi(t)-Kx(t)\right)\left(\xi^T(t){K_g}^T-x^T(t)K^T\right)\right\}=$$

$$=E\left\{K_g\xi(t)\xi^T(t){K_g}^T-Kx(t)\xi^T(t){K_g}^T-K_g\xi(t)x^T(t)K^T+Kx(t)x^T(t)K^T\right\}=$$

$$=K_gP_{\phi}D_z{P_{\phi}}^T{K_g}^T-KD_{xz}{P_{\phi}}^T{K_g}^T-K_gP_{\phi}D_{zx}K^T+KD_xK^T. \tag{21}$$

Частные дисперсии можно получить, воспользовавшись уравнением для дисперсии агрегированной переменной $\tilde{D}_x = E\left\{\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t)\right\}$:

$$\tilde{F}\tilde{D}_x + \tilde{D}_x\tilde{F}^T = -\tilde{G}N\tilde{G}^T, \tag{22}$$

здесь N — интенсивность белого шума на входе формирующего фильтра.

Раскроем уравнение (22):

$$\begin{bmatrix} F & GP_\phi \\ 0 & \Gamma_\phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_x & D_{xz} \\ D_{zx} & D_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_x & D_{xz} \\ D_{zx} & D_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F^T & 0 \\ {P_\phi}^T G^T & {\Gamma_\phi}^T \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 \\ G_\phi \end{bmatrix} N \begin{bmatrix} 0 & {G_\phi}^T \end{bmatrix}; \tag{23}$$

$$FD_x + GP_\phi D_{zx} + D_x F^T + D_{xz} {P_\phi}^T G^T = 0; \tag{24}$$

$$FD_{xz} + GP_\phi D_z + D_{xz} {\Gamma_\phi}^T = 0, \tag{25}$$

$$\Gamma_\phi D_z + D_z {\Gamma_\phi}^T = -G_\phi N {G_\phi}^T. \tag{26}$$

Отметим также, что

$$D_{xz} = {D_{zx}}^T. \tag{27}$$

Решив систему уравнений (24)—(26) относительно частных дисперсий D_x (состояния системы), D_z (состояния фильтра) и $D_{xz} = {D_{zx}}^T$, получим значение дисперсии управления D_U, являющейся в данном случае стохастическим грамианом затрат на управление в силу определения 6. Таким образом, сформирован метод оценки затрат на управление. Изложим его в виде краткого алгоритма.

1. Сформировать векторно-матричное описание объекта управления в виде (11), (12) и формирующего фильтра в виде (13), (14).

2. Решить задачу обеспечения требуемых показателей качества и единичного замыкания системы по входу, получив замкнутую систему (17).

3. Решить систему уравнений (24)—(26) относительно частных дисперсий D_x, D_z и $D_{xz} = {D_{zx}}^T$.

4. Найти дисперсию управления (грамиан затрат на управление) из выражения (21).

5. Произвести процедуру сингулярного разложения дисперсии управления, получив минимальное и максимальное сингулярные числа $\mu_{\min}$ и $\mu_{\max}$.

6. Модифицировать исходную структуру мод по принципу уменьшения угла локализации желаемых мод [5].

7. Повторить шаги 2—5 до достижения минимального значения максимального сингулярного числа $\mu_{\max}$.

Пример. Для иллюстрации предложенной методики рассмотрим, как меняются затраты на управление при решении двух противоположных задач: минимизации дисперсии ошибки D_ε (что имеет место при задающем стохастическом воздействии) и минимизации дисперсии выходного сигнала D_y (что равносильно компенсации стохастической помехи на входе).

Рассмотрим систему второго порядка с передаточной функцией вида

$$\Phi(s) = \frac{v_2{\omega_0}^2}{s^2 + v_1\omega_0 s + v_2{\omega_0}^2}. \tag{28}$$

Представление (28) параметризовано характеристической частотой ω_0 системы, а конкретная реализация коэффициентов v_1, v_2 позволяет задать желаемое распределение мод (корней). Так, при $\nu_1 = \sqrt{2}, \nu_2 = 1$ функция $\Phi(s)$ будет обладать каноническим распределением мод (корней) Баттерворта, а при $\nu_1 = 2, \nu_2 = 1$ — биномиальным распределением мод (корней).

В качестве формирующего фильтра используется апериодическое звено первого порядка, формирующее из белого шума на выходе экспоненциально коррелированный шум. Передаточную функцию формирующего фильтра запишем в виде

$$\Phi_ф(s) = \frac{\Omega_ф}{s + \Omega_ф}, \tag{29}$$

где $\Omega_ф$ — характеристическая частота фильтра.

Решение системы матричных уравнений (23)—(26) для конкретной матрицы дисперсий $\tilde{D}_x$ позволяет записать следующее:

$$D_z = D_\xi = \frac{N\Omega_ф}{2}; \tag{30}$$

$$D_{xz} = D_{zx} = \frac{N\Omega_ф}{2}\begin{bmatrix} \dfrac{\nu_2\omega_0}{\nu_2\omega_0^2 + \nu_1\omega_0\Omega_ф + \Omega_ф^2} \\ \dfrac{\nu_2\omega_0^2\Omega_ф}{\nu_2\omega_0^2 + \nu_1\omega_0\Omega_ф + \Omega_ф^2} \end{bmatrix}, \tag{31}$$

$$D_x = \frac{N\Omega_ф}{2}\begin{bmatrix} \dfrac{\nu_2\omega_0^2\left(1 + \dfrac{\Omega_ф}{\nu_1\omega_0}\right)}{\nu_2\omega_0^2 + \nu_1\omega_0\Omega_ф + \Omega_ф^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{\nu_2^2(\nu_1)^{-1}\omega_0^3\Omega_ф}{\nu_2\omega_0^2 + \nu_1\omega_0\Omega_ф + \Omega_ф^2} \end{bmatrix}. \tag{32}$$

При подстановке матриц дисперсий (30), (31) в уравнение (21) следует иметь в виду, что

$$P_ф = [1];\ K_g = \left[\nu_2\omega_0^2\right];\ K = \left[\nu_2\omega_0^2 \quad \nu_1\omega_0\right],$$

тогда для D_U получим

$$D_U = \left[\nu_2\omega_0^2\right]\frac{N\Omega_ф}{2}\left[\nu_2\omega_0^2\right] - 2\left[\nu_2\omega_0^2 \quad \nu_1\omega_0\right]\frac{N\Omega_ф}{2}\begin{bmatrix} \dfrac{\nu_2\omega_0^2}{\nu_2\omega_0^2 + \nu_1\omega_0\Omega_ф + \Omega_ф^2} \\ \dfrac{\nu_2\omega_0^2\Omega_ф}{\nu_2\omega_0^2 + \nu_1\omega_0\Omega_ф + \Omega_ф^2} \end{bmatrix}\cdot\left[\nu_2\omega_0^2\right] +$$

$$+\left[\nu_2\omega_0^2 \quad \nu_1\omega_0\right]\frac{N\Omega_ф}{2}\begin{bmatrix} \dfrac{\nu_2\omega_0^2\left(1 + \dfrac{\Omega_ф}{\nu_1\omega_0}\right)}{\nu_2\omega_0^2 + \nu_1\omega_0\Omega_ф + \Omega_ф^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{\nu_2^2(\nu_1)^{-1}\omega_0^3\Omega_ф}{\nu_2\omega_0^2 + \nu_1\omega_0\Omega_ф + \Omega_ф^2} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \nu_2\omega_0^2 \\ \nu_1\omega_0 \end{bmatrix}.$$

Введем в рассмотрение матрицы относительных дисперсий и относительную характеристическую частоту, определив их соотношениями

$$\bar{D}_{ij} = \frac{D_{ij}}{D_\xi}, \bar{\omega}_0 = \frac{\omega_0}{\Omega_\phi}.$$

Тогда становится справедливой зависимость

$$\bar{D}_{ij} = \bar{D}_{ij}\left(\bar{\omega}_0\right),$$

которая позволяет осуществить сравнение результатов синтеза не в абсолютных величинах, а в относительных. Тогда для дисперсий $D_y = CD_xC^T$, $D_\varepsilon = \tilde{C}_\varepsilon \tilde{D}_x \tilde{C}_\varepsilon^{\ T}$ и D_U становятся справедливыми соотношения

$$\bar{D}_y\left(\bar{\omega}_0\right) = \frac{v_2\bar{\omega}_0^{\ 2}\left(1+v_1\bar{\omega}_0\right)^{-1}}{v_2\bar{\omega}_0^{\ 2}+v_1\bar{\omega}_0+1}, \quad \bar{D}_\varepsilon = \frac{\left(v_2 v_1^{-1}+v_1\right)\bar{\omega}_0+1}{v_2\bar{\omega}_0^{\ 2}+v_1\bar{\omega}_0+1}.$$

Если рассмотреть ситуации, при которых должны выполняться неравенства $\bar{D}_y \ll 1$ и $\bar{D}_\varepsilon \ll 1$, то для этих дисперсий справедливы будут следующие соотношения:

$$\bar{D}'_y\left(\bar{\omega}_0\right) = \lim_{\bar{\omega}_0\to 0}\bar{D}_y\left(\bar{\omega}_0\right) = \frac{v_2}{v_1}\bar{\omega}_0,$$

$$\bar{D}'_\varepsilon\left(\bar{\omega}_0\right) = \lim_{\bar{\omega}_0\to\infty}\bar{D}_\varepsilon\left(\bar{\omega}_0\right) = v_1^{-1}\left(1+\frac{v_1^{\ 2}}{v_2}\right)\frac{1}{\bar{\omega}_0} = \frac{v_2+v_1^{\ 2}}{v_1 v_2\bar{\omega}_0}.$$

В свою очередь, матрица дисперсий управления $\bar{D}_U\left(\bar{\omega}_0\right)$ принимает вид

$$\bar{D}_U\left(\bar{\omega}_0\right) = \Omega_\phi^{\ 4}\,\frac{v_2^{\ 2}\bar{\omega}_0^{\ 4}\left(v_2 v_1^{-1}\bar{\omega}_0+1\right)}{v_2^{\ 2}\bar{\omega}_0^{\ 2}+v_1\bar{\omega}_0+1}.$$

При решении задач минимизации дисперсии ошибки $\bar{D}_\varepsilon$ и дисперсии выходного сигнала $\bar{D}_y$ матрица $\bar{D}_U\left(\bar{\omega}_0\right)$ принимает следующий вид:

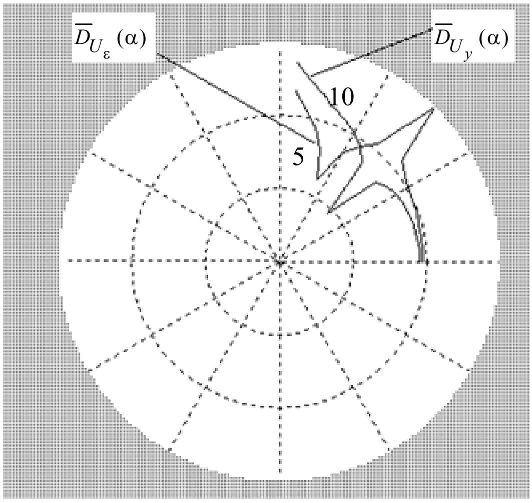
$$\bar{D}'_y\left(\bar{\omega}_0\right)\to 0 \Rightarrow \bar{\omega}_0 \to 0 \Rightarrow \bar{D}_U\left(\bar{\omega}_0\right) = \Omega_\phi^{\ 4}\bar{\omega}_0^{\ 4}v_2^{\ 2},$$

$$\bar{D}'_\varepsilon\left(\bar{\omega}_0\right)\to 0 \Rightarrow \bar{\omega}_0 \to \frac{v_2+v_1^{\ 2}}{v_1 v_2\bar{D}'_\varepsilon\left(\bar{\omega}_0\right)} \Rightarrow \bar{D}_U\left(\bar{\omega}_0\right) = \Omega_\phi^{\ 4}\,\frac{\left(v_2+v_1^{\ 2}\right)^3}{v_1^{\ 2}\left(\bar{D}'_\varepsilon\left(\bar{\omega}_0\right)\right)^3}.$$

В рассматриваемом примере конкретной реализацией объекта управления будет служить конструкция радиотелескопа, подверженная воздействию ветра. Для моделирования решаемой задачи выберем частоту формирующего фильтра, задающую стохастическую составляющую ветровой нагрузки на объект при скорости ветра 20 м/с: $\Omega_\phi = 1{,}3\ \text{с}^{-1}$.

Зададим дисперсии стохастического входного сигнала, выходного сигнала и ошибки: $D_\xi = 625\,\text{мм}^2$; $D_y = D_\varepsilon = 1\,\text{мм}^2$.

Введем в рассмотрение модифицированное распределение мод Баттерворта, моды которого находятся в левой полуплоскости в секторе с раскрывом 2α на лучах его образующих. Заметим, что при $\alpha = 45°$ имеет место каноническое распределение мод Баттерворта, а при $\alpha = 0$ — биномиальное распределение мод. При изменении угла локализации желаемых корней для решения задач минимизации дисперсии ошибки $\bar{D}_\varepsilon$ и дисперсии выходного сигнала $\bar{D}_y$ получены результаты, продемонстрированные на рисунке, где представлен график зависимости затрат на управление $\bar{D}_{U_\varepsilon}(\alpha)$ и $\bar{D}_{U_y}(\alpha)$ от угла локализации желаемых корней α в полярных координатах.



Для коэффициентов v_1, v_2 и дисперсии затрат на управление в функции от угла локализации желаемых корней были получены следующие аналитические соотношения:

$$v_1(\alpha) = \frac{2\cos\alpha}{\omega_0}, \quad v_2(\alpha) = \frac{\cos 2\alpha}{\omega_0{}^2};$$

$$D_U(\alpha) = [\cos 2\alpha]\frac{N\Omega_ф}{2}[\cos 2\alpha] - 2[\cos 2\alpha \quad 2\cos\alpha]\frac{N\Omega_ф}{2} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \dfrac{\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha + 2\cos\alpha\Omega_ф + \Omega_ф{}^2} \\ \dfrac{\cos 2\alpha\Omega_ф}{\cos 2\alpha + 2\cos\alpha\Omega_ф + \Omega_ф{}^2} \end{bmatrix} \cdot [\cos 2\alpha] + [\cos 2\alpha \quad 2\cos\alpha]\frac{N\Omega_ф}{2} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \dfrac{\cos 2\alpha\left(1 + \dfrac{\Omega_ф}{2\cos\alpha}\right)}{\cos 2\alpha + 2\cos\alpha\Omega_ф + \Omega_ф{}^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{\cos^2 2\alpha(2\cos\alpha)^{-1}\Omega_ф}{\cos 2\alpha + 2\cos\alpha\Omega_ф + \Omega_ф{}^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos 2\alpha \\ 2\cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Заключение. Поставленная задача решена с помощью стохастического грамиана затрат на управление, экстремальные элементы спектра сингулярных чисел которого позволяют получить оценки энергетических затрат на управление.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Булинский А. В., Ширяев А. Н.* Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005.

2. *Дэвис М.* Линейное оценивание и стохастическое управление. М.: Наука, 1984.

3. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977.

4. *Астровский А. И.* Обобщенная матрица Грама и ее применение к проблеме наблюдаемости линейных нестационарных систем // Математические заметки. 2001. Т. 69, вып. 2. С. 163—170.

5. *Бирюков Д. С., Слита О. В., Ушаков А. В.* Оценка затрат на управление в задаче обеспечения желаемой структуры мод и их робастности // Изв. вузов. Приборостроение. 2009. Т. 52, № 11. С. 38—43.

Сведения об авторах

Дмитрий Сергеевич Бирюков — аспирант; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; E-mail: dbiryukov@list.ru

Анатолий Владимирович Ушаков — д-р техн. наук, профессор; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; E-mail: ushakov-AVG@yandex.ru

Рекомендована кафедрой систем управления и информатики

Поступила в редакцию 18.01.11 г.