ЭЛЕКТРОННЫЕ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ УСТРОЙСТВА

УДК 621.396:681.323

С. И. ЗИАТДИНОВ

ТЕОРЕМА ОТСЧЕТОВ ДЛЯ КОМПЛЕКСНОГО И ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО СИГНАЛОВ

Показано, что для однозначного восстановления непрерывного комплексного сигнала по его отсчетам необходимо, чтобы частота дискретизации была не меньше удвоенной наивысшей частоты в спектре сигнала. Для однозначного восстановления непрерывного действительного сигнала необходимо, чтобы частота дискретизации была больше удвоенной наивысшей частоты в спектре сигнала.

Ключевые слова: *комплексный и действительный сигналы, дискретизация, восстановление, ошибки.*

Фундаментальная теорема отсчетов [1, 2] (теорема В. А. Котельникова) находит самое широкое применение в задачах дискретной и цифровой обработки непрерывных сигналов. Согласно этой теореме отсчеты низкочастотного сигнала $u(t)$ с ограниченным спектром для его точного восстановления следует брать с частотой дискретизации $F_д$, не меньшей, чем двусторонняя (полная) ширина полосы частот, занимаемая этим сигналом: $F_д \geq 2F_{\max}$, здесь $F_{\max}$ — наивысшая частота в спектре сигнала.

Рассмотрим справедливость теоремы отсчетов для комплексного и действительного сигналов.

Комплексный сигнал. Выражение для комплексного сигнала в общем виде можно представить следующим образом:

$$\dot{u}(t) = U(t)e^{j[\Omega t + \psi(t)]}, \qquad (1)$$

где $U(t), \Omega, \psi(t)$ — огибающая, несущая частота и начальная фаза сигнала.

Флюктуирующий сигнал (1) при разложении в ряд Фурье представляется суммой бесконечного числа элементарных гармонических составляющих, каждая из которых имеет свою амплитуду, частоту и начальную фазу.

В дальнейшем будем рассматривать только наивысшую составляющую спектра сигнала (1), который в дискретном виде записывается следующим образом:

$$\dot{u}(t_i) = Ue^{j\Omega t_i}; \quad t_i = iT_д + \Delta T, \qquad (2)$$

где $T_д = 1/F_д$ — период дискретизации; ΔT — смещение по времени при взятии текущего отсчета; i=0, 1, 2 … — номер текущего отсчета; для простоты рассуждений начальная фаза сигнала (2) принята равной нулю.

Пусть интерполирующий сигнал является непрерывным комплексным гармоническим колебанием с частотой Ω, равной частоте сигнала:

$$\dot{u}_{\text{и}}(t) = U_{\text{и}}(t) e^{j[\Omega t + \varphi(t)]}, \quad (3)$$

где $U_{\text{и}}, \Omega, \varphi$ — огибающая, несущая частота и начальная фаза интерполирующего сигнала.

Определим, при каких значениях $U_{\text{и}}, \varphi$ и ΔT интерполирующий сигнал (3) совпадает с исходным сигналом (2).

Пусть в точках отсчета $\dot{u}(t_i) = \dot{u}_{\text{и}}(t_i)$ или

$$U e^{j\Omega t_i} = U_{\text{и}} e^{j[\Omega t_i + \varphi]}. \quad (4)$$

Комплексные сигналы (4) представим в тригонометрической форме:

$$U \cos \Omega t_i + jU \sin \Omega t_i = U_{\text{и}} \cos(\Omega t_i + \varphi) + jU_{\text{и}} \sin(\Omega t_i + \varphi). \quad (5)$$

Равенство (5) будет справедливо, если его вещественные части и коэффициенты мнимых частей будут равны:

$$\left.\begin{aligned} U \cos \Omega t_i &= U_{\text{и}} \cos(\Omega t_i + \varphi), \\ U \sin \Omega t_i &= U_{\text{и}} \sin(\Omega t_i + \varphi). \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

После подстановки в уравнения (6) значения дискретного времени $t_i = iT_{\text{д}} + \Delta T$ получим

$$\left.\begin{aligned} U \cos[\Omega(iT_{\text{д}} + \Delta T)] &= U_{\text{и}} \cos[\Omega(iT_{\text{д}} + \Delta T) + \varphi], \\ U \sin[\Omega(iT_{\text{д}} + \Delta T)] &= U_{\text{и}} \sin[\Omega(iT_{\text{д}} + \Delta T) + \varphi]. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Возведем в квадрат левые и правые части соотношений (7):

$$\left.\begin{aligned} U^2 \cos^2[\Omega(iT_{\text{д}} + \Delta T)] &= U_{\text{и}}^2 \cos^2[\Omega(iT_{\text{д}} + \Delta T) + \varphi], \\ U^2 \sin^2[\Omega(iT_{\text{д}} + \Delta T)] &= U_{\text{и}}^2 \sin^2[\Omega(iT_{\text{д}} + \Delta T) + \varphi]. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Складывая левые и правые части выражений (8), получаем $U^2 = U_{\text{и}}^2$.

Отсюда следует, что отсчеты комплексного сигнала $U \cos \Omega t_i$ и $U \sin \Omega t_i$ однозначно определяют амплитуду непрерывного интерполирующего сигнала, равную амплитуде непрерывного входного сигнала, т.е. $U_{\text{и}} = U$.

Согласно теореме отсчетов на нижней границе частота дискретизации $F_{\text{д}}$ равна удвоенной частоте сигнала $F_{\text{с}} = \Omega / 2\pi$. Далее будем рассматривать именно этот случай, когда $F_{\text{д}} = 2F_{\text{с}}$. Тогда соотношения (7) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} \cos(i\pi + \Omega \Delta T) &= \cos(i\pi + \Omega \Delta T + \varphi), \\ \sin(i\pi + \Omega \Delta T) &= \sin(i\pi + \Omega \Delta T + \varphi). \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Данные равенства будут выполняться только при условии $\varphi = 0, 2\pi, 4\pi, ...$ для любого значения ΔT.

Таким образом, однозначное восстановление непрерывного комплексного сигнала по его отсчетам возможно, если частота дискретизации больше удвоенной наивысшей частоты в спектре сигнала или равна ей. Этот результат полностью совпадает с теоремой отсчетов Котельникова.

Действительный сигнал. В данном случае можно воспользоваться одним из уравнений системы (7):

$$U \sin[\Omega(iT_{\text{д}} + \Delta T)] = U_{\text{и}} \sin[\Omega(iT_{\text{д}} + \Delta T) + \varphi]. \quad (10)$$

Определим, при каких значениях $U_{\text{и}}, \Delta T$ и φ будет выполняться данное равенство. Рассмотрим крайнюю точку отсчета, когда частота дискретизации равняется удвоенной частоте сигнала. Тогда соотношение (10) принимает вид

$$U\sin(i\pi+\Omega\Delta T)=U_{\text{и}}\sin(i\pi+\Omega\Delta T+\varphi). \qquad (11)$$

Пусть $\Delta T=0.$ При этом отсчеты сигнала $u(t)$ берутся в точках, в которых его значения равны нулю. В результате выражение (11) преобразуется к виду

$$U_{\text{и}}\sin(i\pi+\varphi)=0.$$

Данное соотношение справедливо для любых значений $U_{\text{и}}$ при $\varphi=0,\pi,2\pi,...$

Таким образом, при $\Delta T=0;$ $\varphi=0,\pi,2\pi,...$ и $F_{\text{д}}=2F_{\text{c}}$ сигналу $u(t_i)$ можно поставить в соответствие бесчисленное количество интерполирующих сигналов $u_{\text{и}}(t_i)$, имеющих любую амплитуду (рис. 1).

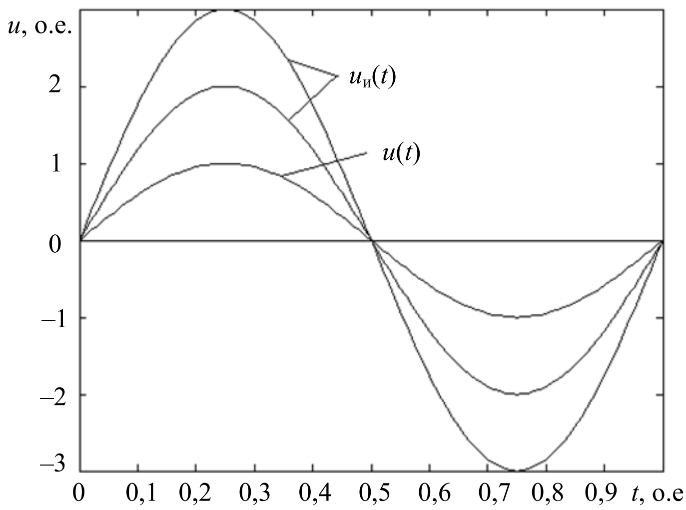

Рис. 1

При $\varphi\neq0,\pi,2\pi,...$ формула (11) записывается следующим образом:

$$U_{\text{и}}=U\frac{0}{\sin(i\pi+\varphi)}.$$

В данном случае отсутствует интерполирующий сигнал с отличной от нуля амплитудой. Следовательно, при взятии отсчетов синусоидального сигнала в точках, в которых его значения равны нулю, интерполирующий синусоидальный сигнал также проходит через эти точки и может иметь любую амплитуду. При этом восстановление исходного сигнала по его отсчетам невозможно.

Далее положим $\Delta T\neq0$. При этом точки отсчета сигнала $u(t)$ не совпадают с моментами времени, в которых его значения равны нулю.

В качестве примера рассмотрим случай, когда $F_{\text{д}}=2F_{\text{c}}$, $\Delta T=0{,}25T_{\text{c}}$ ($T_{\text{c}}=1/F_{\text{c}}$). При этом из выражения (10) находим

$$U_{\text{и}}=U\frac{\sin[\Omega(iT_{\text{д}}+0{,}25T_{\text{c}})]}{\sin[\Omega(iT_{\text{д}}+0{,}25T_{\text{c}})+\varphi]}=\frac{U}{\cos\varphi}.$$

Полученное соотношение позволяет найти амплитуду интерполирующего сигнала для различных значений φ (рис. 2); см. ниже.

φ, …°	0	45	60	90
$U_{\text{и}}$	U	$2U/\sqrt{2}$	$2U$	∞

Следовательно, существует бесконечное множество интерполирующих сигналов. Равенство $u_{\text{и}}(t)=u(t)$ будет выполняться при любом t только при $F_{\text{д}}>2F_{\text{c}}$ и $\varphi=0$. Данные рассуждения можно распространить на более сложные сигналы с ограниченным наивысшей частотой спектром.

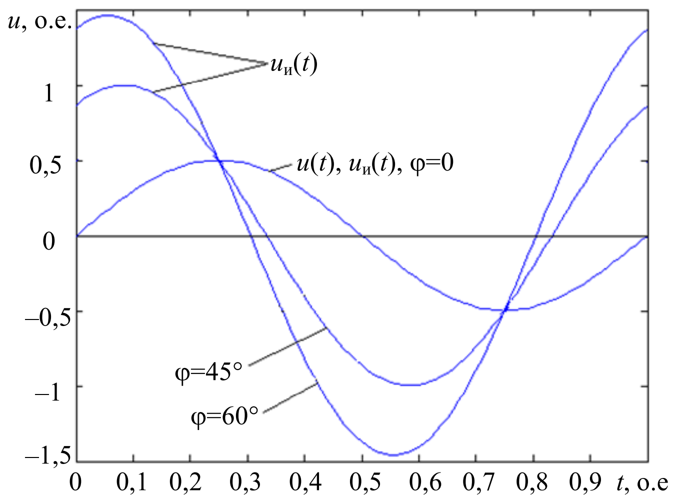

Рис. 2

Вывод. Однозначное восстановление непрерывного комплексного сигнала с ограниченным спектром по его отсчетам возможно в случае, когда частота дискретизации больше удвоенной наивысшей частоты в спектре сигнала или равна ей. В то же время для однозначного восстановления действительного сигнала частота дискретизации должна быть больше удвоенной наивысшей частоты в спектре сигнала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Котельников В. А.* О пропускной способности „эфира“ и проволоки в электросвязи // Материалы к Первому Всесоюзному съезду по вопросам реконструкции дела связи и развития слаботочной промышленности. М.: Изд-во Управления связи РККА, 1933.

2. *Худяков Г. И.* Теорема отсчетов теории сигналов и ее создатели // Радиотехника и электроника. 2008. Т. 53, № 9. С. 1157—1168.

Сведения об авторе

Сергей Ильич Зиатдинов — д-р техн. наук, профессор; Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, кафедра информационно-сетевых технологий; E-mail: Kaf53@GUAP.ru

Рекомендована кафедрой информационно-сетевых технологий

Поступила в редакцию 17.11.10 г.