УДК 551.46.08

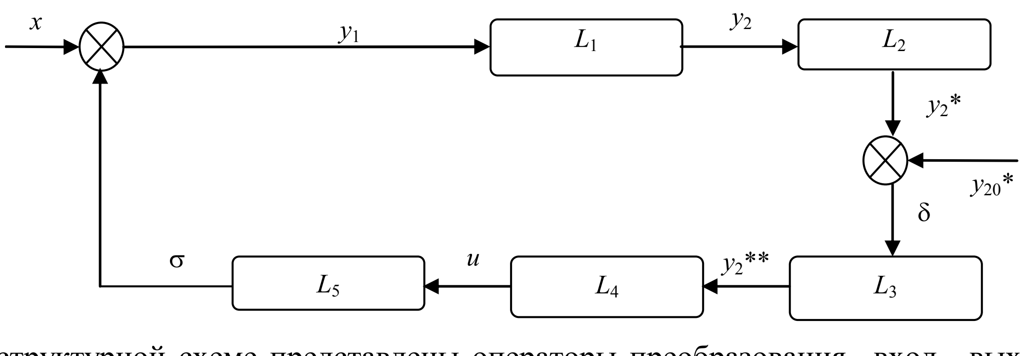
Р. И. Сольницев, Г. И. Коршунов

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ „ПРИРОДА—ТЕХНОГЕНИКА“

Рассматривается система управления „природа—техногеника“, позволяющая снижать концентрацию загрязняющих веществ (ЗВ) в окружающей среде. Представлены математические модели объекта управления как распределенной в пространстве системы. Предлагаемые модели, являющиеся обобщением одномерного случая, описывают пространственное движение потоков ЗВ.

Ключевые слова: *системы управления, математические модели, пространственный перенос загрязнений.*

В работе [1] предложена концепция создания замкнутых систем управления „природа—техногеника“ (ЗСУПТ) для широкого класса объектов (ТЭЦ промышленных предприятий), в которых требуется снижение концентрации загрязняющих веществ (ЗВ) техногенного характера. Концепция создания ЗСУПТ основана на минимизации „человеческого фактора“, обеспечении неразрывности цепочки „мониторинг—очистка“, сокращении потерь информации. Использование разработанного класса систем позволяет снизить экономические издержки, а также учесть упущенную выгоду [2]. Для оценки характеристик ЗСУПТ как систем автоматического управления (САУ) для одиночного источника ЗВ рассматриваются математические модели ЗСУПТ, основанные на анализе и детализации операторов отдельных звеньев ЗСУПТ [3] (см. рисунок).



На структурной схеме представлены операторы преобразования „вход—выход“: L_1 — переноса ЗВ от источника до точки измерения параметра, L_2 — измерительного устройства, L_3 — устройства преобразования, L_4 — устройства управления, L_5 — очистного агрегата с исполнительным устройством, x — возмущающее воздействие, y_1— рассогласование, y_2 — измеряемая величина концентрации ЗВ, y_2^* — результат измерения параметра, y_{20}^* — его допустимая величина, δ — величина отклонения, y_2^{**} — преобразованный сигнал, u — сигнал управления, σ — сигнал компенсации возмущения.

Если операторы L_2—L_5, преобразующие входные сигналы в выходные, точно описаны линейными, нелинейными и вероятностными моделями с сосредоточенными параметрами [2, 3], то построение моделей, реализующих оператор L_1, который отображает распределенный объект управления в процессах переноса ЗВ в воздухе, воде, почве, связано со значительными трудностями. Для описания этих процессов используется модель баланса между скоростью изменения значения концентрации ЗВ, составляющими этой скорости от конвекции, диффузии, мощности источника ЗВ и параметров их отвода природными и техногенными средствами. Известные модели такого баланса не позволяют строить математические модели „вход—выход“, необходимые для последующего анализа и синтеза ЗСУПТ при пространственном переносе ЗВ. В статье [3] такая задача решена для одномерного случая, в настоящей работе она решается для математических моделей объекта управления в ЗСУПТ в трехмерном пространстве.

Применительно к теории САУ модели баланса представляются математическими моделями звеньев системы управления, являющихся объектом управления [4]. В рассматриваемом случае такие звенья позволяют привести математические модели с распределенными параметрами к форме „вход—выход“, необходимой для решения классических задач анализа, синтеза и расчета САУ.

Используя предлагаемые в настоящей работе модели, можно оценить характеристики потоков ЗВ (от места их возникновения до точки измерения) и при решении обратной задачи.

При формализации процессов переноса обычно вводят следующие переменные [5, 6]: 1) C — концентрация i-го ЗВ, $\left[\text{кг}/\text{м}^3\right]$, она является скалярной функцией от пространственных координат и времени $C(x, y, z, t)$, причем $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$; 2) $\mathbf{J}(x, y, z)$ — вектор-функция потока ЗВ, [кг/с]; 3) $\mathbf{j} = C\mathbf{V}$ — плотность потока, $\left[\text{кг}/\text{м}^2 \cdot \text{с}\right]$, $\mathbf{V}(x, y, z)$ — скорость потока; 4) $Q(x, y, z, t)$ — масса выброса (сброса) ЗВ, [кг].

При выводе математических моделей переноса веществ в разных средах обычно применяют

— закон Фика

$$\mathbf{j} = -D\,\mathrm{grad}C, \tag{1}$$

где D — тензор, представленный коэффициентами диффузии, [м^2/с],

— закон сохранения

$$\mathrm{div}\,\mathbf{j} = -\frac{d\rho}{dt}, \tag{2}$$

где ρ — плотность вещества. В практических приложениях вместо плотности ρ используют концентрацию (обычно понятие плотности используется для однородных сред, а понятие концентрации — для смесей).

Уравнения переноса на основе (1), (2) можно получить следующим образом. Рассмотрим полный дифференциал от функции $C(x, y, z, t)$ в виде:

$$\frac{dC(x, y, z, t)}{dt} = \frac{\partial C}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial t}. \tag{3}$$

Здесь $x(t), y(t), z(t)$ — временные функции переноса ЗВ в пространстве. Следовательно, при условии несжимаемости вещества ЗВ в потоке $V(t) = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt}\right)$ или $V = (V_x, V_y, V_z)$. Условие несжимаемости удовлетворяется для ЗСУПТ в рассматриваемой постановке задачи [1—3].

Тогда уравнение (3) можно представить в виде:

$$\frac{dC}{dt}=\frac{\partial C}{\partial x}V_x+\frac{\partial C}{\partial y}V_y+\frac{\partial C}{\partial z}V_z+\frac{\partial C}{\partial t}. \qquad (4)$$

В соответствии с законом сохранения $\frac{dC}{dt}=-\operatorname{div}\mathbf{j}$ и согласно (1),

$$\frac{dC}{dt}=-\operatorname{div}\left(-D\operatorname{grad}C\right). \qquad (5)$$

Полагая поток изотропным, а коэффициенты диффузии D_x, D_y, D_z в направлениях x, y, z постоянными, из уравнений (4), (5) найдем:

$$\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{\partial C}{\partial x}V_x+\frac{\partial C}{\partial y}V_y+\frac{\partial C}{\partial z}V_z=D_x\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+D_y\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}+D_z\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}. \qquad (6)$$

Представим обобщенное уравнение переноса для разных сред, в котором учтены интенсивность источника ЗВ и параметры нейтрализации веществ природными и техногенными средствами

$$\frac{\partial C}{\partial t}=-V_x\frac{\partial C}{\partial x}-V_y\frac{\partial C}{\partial y}-V_z\frac{\partial C}{\partial z}+D_x\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+D_y\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}+D_z\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}+K_1Q-K_2C. \qquad (7)$$

Коэффициент K_1, $\left[\frac{1}{\text{м}^3\cdot\text{с}}\right]$, определяет степень преобразования потока вещества в ЗВ (например, топлива для теплоэнергоцентрали — в диоксид серы) и зависит от вида вещества и характера преобразований (например, режима горения топлива). При возрастании интенсивности потока величина K_1 возрастает и на отдельных участках может быть аппроксимирована линейной функцией. Для разных видов вещества (например, топлива) значения K_1 заданы в работах [5, 6].

Коэффициент K_2, [1/с], определяет степень поглощения ЗВ как техногенными, так и природными средствами. Значение „техногенной“ составляющей K_2 определяется параметрами абсорбции, хемосорбции, адсорбции, термической нейтрализации и др. Для некоторых методов (например, абсорбции) зависимость K_2 представляется аналитически, для других, например процессов хемосорбции и адсорбции, эмпирически. В работах [5, 6] приведены экспериментальные зависимости, представляющие монотонно возрастающую функцию. „Природная“ составляющая зависит от метеорологических, химических и других внешних параметров и учитывается на основе усредненных статистических данных. В настоящей работе коэффициенты K_1, K_2 считаются постоянными величинами.

Уравнение (7) следует дополнить граничными и начальными условиями:

$$C(x_0, y_0, z_0, t)=C_0(t_0),\ C(x,y,z,t_0)=$$

$$=C_0(t), \frac{\partial C(x,y,z,t)}{\partial x\big|_{x_0y_0z_0}}=P_{10}(t), \frac{\partial C(x,y,z,t)}{\partial y\big|_{x_0y_0z_0}}=P_{20}(t), \frac{\partial C(x,y,z,t)}{\partial z\big|_{x_0y_0z_0}}=P_{30}(t),$$

$$V(x_0, y_0, z_0, t)=V_0(t),$$

$$C(L, R, H, t)=C_\infty(t), \text{ при } x=L,\ y=R,\ z=H,$$

$$\mathrm{V}(L, R, H)=\mathrm{V}_\infty(t), \frac{\partial C(x,y,z,t)}{\partial x}\Big|_{L,R,H}=P_{1\infty}(t), \frac{\partial C(x,y,z,t)}{\partial y}\Big|_{L,R,H}=$$

$$=P_{2\infty}(t), \frac{\partial C(x,y,z,t)}{\partial z}\Big|_{L,R,H}=P_{3\infty}(t).$$

Далее его необходимо привести к виду „вход—выход“, удобному для моделирования, анализа и синтеза ЗСУПТ как САУ [3].

Общее дифференциальное уравнение в частных производных (ДУЧП) второго порядка имеет вид

$$F\left(q,\, x_1,\, x_2,\, ...,x_n,\, \frac{\partial q}{\partial x_1},\, \frac{\partial q}{\partial x_2},\, ...,\, \frac{\partial q}{\partial x_n},\, \frac{\partial^2 q}{\partial x_1^2},\, \frac{\partial^2 q}{\partial x_2^2},\, ..\frac{\partial^2 q}{\partial x_i \partial x_k}..,\, \frac{\partial^2 q}{\partial x_n^2}\right) = 0, \qquad (8)$$

где q — искомая функция $q(x_1, x_2, ..., x_n)$; $x_1, x_2, ..., x_n$ — независимые переменные, а функция q задана в неявной форме. Обозначив $\frac{\partial q}{\partial x_i} = P_i, \frac{\partial^2 q}{\partial x_i \partial x_k} = P_{ik}$, перепишем это уравнение:

$$F\left(q,\, x_1,\, x_2,\, ...,x_n,\, P_1,\, P_2,\, ...,\, P_n,\, P_{11},\, P_{12},\, ...,\, P_{nn}\right) = 0. \qquad (9)$$

В случае $i = k$ $\frac{\partial^2 q}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial q}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial P_i}{\partial x_i}$, $P_{ik} = \frac{\partial P_i}{\partial x_i}$, и получаем ДУЧП первого порядка по отношению к функциям P_i $(i = \overline{1,n})$:

$$F\left(q,\, x_1,\, ...,x_n,\, P_1,\, P_2,\, ...,\, P_n,\, \frac{\partial P_1}{\partial x_1},\, ...,\, \frac{\partial P_n}{\partial x_n}\right) = 0. \qquad (10)$$

Применив это преобразование к уравнению (7)

$$\frac{dC}{dt} + V_x \frac{\partial C}{\partial x} + V_y \frac{\partial C}{\partial y} + V_z \frac{\partial C}{\partial z} = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + D_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} + K_1 Q - K_2 C, \qquad (11)$$

получим

$$D_x \frac{\partial P_1}{\partial x} + D_y \frac{\partial P_2}{\partial y} + D_z \frac{\partial P_3}{\partial z} = V_x P_1 + V_y P_2 + V_z P_3 + P_4 + K_2 C - K_1 Q. \qquad (12)$$

Попарно фиксируя $(\overline{P}_3, \overline{P}_2)$, $(\overline{P}_3, \overline{P}_1)$, $(\overline{P}_1, \overline{P}_2)$, получим систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial P_1}{\partial x} &= \frac{1}{D_x}\left(K_2 C + V_x P_1 + V_y P_2 + V_z P_3 + P_4 - K_1 Q\right),\\
\frac{\partial P_2}{\partial y} &= \frac{1}{D_y}\left(K_2 C + V_y P_2 + V_x P_1 + V_z P_3 + P_4 - K_1 Q\right),\\
\frac{\partial P_3}{\partial z} &= \frac{1}{D_z}\left(K_2 C + +V_z P_3 + V_y P_2 + V_x P_1 + P_4 - K_1 Q\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Представим эту систему в виде обыкновенных дифференциальных уравнений в симметрической форме (ОДУСФ) [7]. По переменной P_1 имеем:

$$\frac{dP_1}{\frac{1}{D_x}(V_x P_1 + V_y P_2 + V_z P_3 + P_4 + K_2 C - K_1 Q)} = \frac{dx}{1}. \qquad (14)$$

Аналогичным образом поступаем с двумя другими уравнениями системы (13).

С помощью таких уравнений характеристик [7] решение полевых задач, к которым и относится рассматриваемая здесь задача, сводится к интегрированию ОДУСФ. Найдем частные интегралы ОДУСФ, проинтегрировав (14):

$$a_1\left[\ln\left(a_1 P_1 + b_1\right) - \ln\left(a_1 P_{10} + b_1\right)\right] = (x - x_0), \qquad (15)$$

где

$$a_1 = \frac{V_x}{D_x}, \quad b_1 = \frac{1}{D_x}(K_2 C + V_y P_2 + V_z P_3 + P_4 - K_1 Q). \qquad (16)$$

Применив операцию потенцирования к (15), получим

$$P_1 = \frac{1}{a_1}\left[e^{a_1(x-x_0)}(a_1 P_{10} + b_1) - b_1\right]. \tag{17}$$

Поскольку $P_1 = \dfrac{\partial C(x,\, y,\, z,\, t)}{\partial x}$, то получим еще одно ДУЧП первого порядка, но теперь по отношению к искомой функции $C(x,\, y,\, z,\, t)$:

$$\frac{\partial C}{\partial x} = e^{a_1(x-x_0)} P_{10} + b_1\left(\frac{1}{a_1} e^{a_1(x-x_0)} - \frac{1}{a_1}\right). \tag{18}$$

Осуществив преобразование Лапласа к $C(x,\, y,\, z,\, t)$, $Q(x,\, y,\, z,\, t)$ как функциям t, найдем

$$\frac{\partial C(s,\, x,\, y,\, z)}{\partial x} = a_2 + C(s,\, x,\, y,\, z)\left(\frac{K_2}{D_x} + \frac{C_0}{D_x}\right) - \frac{K_1}{D_x} Q(s,\, x,\, y,\, z) + b_2, \tag{19}$$

где $a_2 = e^{a_1(x-x_0)} P_{10}$, $b_2 = \dfrac{V_y}{D_y} P_2 + \dfrac{V_z}{D_z} P_3$, s — оператор Лапласа.

Приведем это уравнение к симметрической форме

$$\frac{\partial C(x,y,z,s)}{C(x,y,z,s)\left(\dfrac{K_2}{D_x} + \dfrac{S}{D_x}\right) - \dfrac{K_1}{D_x} Q(x,y,z,s) + a_2 + b_2} = \frac{dx}{1}, \tag{20}$$

тогда частный интеграл будет:

$$C(x,y,z,s) = \frac{1}{a_3} e^{(x-x_0)a_3} C_0(s) - \frac{b_3}{a_3} + \frac{b_3}{a_3} e^{(x-x_0)a_3}. \tag{21}$$

где $a_3 = \dfrac{K_2}{D_x} + \dfrac{s}{D_x}$, $b_3 = \dfrac{K_1}{D_x} Q(x,y,z,z) + a_2 + b_2$.

Аналогичные соотношения получаются при интегрировании двух других уравнений системы (13).

Раскрыв a_3, b_3, a_2, b_2, a_1, b_1, найдем

$$C(x,y,z,s) = C_0(s) e^{\left(\frac{K_2}{D_x} + \frac{s}{D_x}\right)(x-x_0)} +$$

$$+\left[\frac{V_y}{D_x}\bar{P}_2 + \frac{V_z}{D_x}\bar{P}_3 + e^{\frac{V_x}{D_x}(x-x_0)} P_{10} - \frac{K_1}{D_x} Q(x,y,z,s)\right] \times \left[\frac{1}{\dfrac{K_2}{D_x} + \dfrac{s}{D_x}} e^{\left(\frac{K_2}{D_x} + \frac{s}{D_x}\right)} - \frac{1}{\dfrac{K_2}{D_x} + \dfrac{s}{D_x}}\right]. \tag{22}$$

В результате получим связи выходных функций, в данном случае $C(x,\, y,\, z,\, s)$, с входными $C_0(s)$ параметрами и возмущающими воздействиями на объект управления $(V_x, V_y, V_z, D_x, D_y, D_z, K_1, K_2, Q)$. При этом может быть найдена модель объекта управления в форме „вход—выход“, что позволит получать оперативные оценки и прогноз концентраций ЗВ в рассматриваемом районе, в том числе трансграничных переносов.

Полученная обобщенная математическая модель может быть сведена к рассмотренным в работе [3] частным случаям. Например, рассматривая только конвекцию по координате *x*, из исходной системы (13) получим соотношение

$$\frac{\partial C(x,t)}{\partial t} + V_x \frac{\partial C(x,t)}{\partial x} = K_1 Q - K_2 C.$$

Соответствующее ОДУСФ — $\dfrac{dt}{1} = \dfrac{dx}{V_x} = \dfrac{\partial C}{K_1 Q - K_2 C}$

при

$$x\big|_{t=0} = x_0, C(0, x_0) = C_0, Q(0, x_0) = Q_0, \ 0 \le t \le T, \ C\Big|_{\substack{x=L \\ t=T}} = C(L,T).$$

Из общего уравнения (22) найдем соответствующее уравнение „вход—выход“

$$C(L,T) = C_0 e^{-K_2 T} - \frac{K_1}{K_2} Q_0 \left(1 - e^{-K_2 T}\right). \quad (23)$$

Используя формулы (22), (23) и аналогичные им уравнения из системы (13), возможно проводить анализ, синтез и расчет ЗСУПТ как САУ, строить математические модели „вход—выход“ при пространственном движении ЗВ в процессах переноса, в том числе трансграничного, и выполнять перспективные и ретроспективные оценки концентрации ЗВ. Предложенные модели не содержат ограничений на вид среды (воздух, вода, почва), поэтому они могут быть адаптированы к многим частным приложениям при условии определения коэффициентов K_1 и K_2 для рассмотренных сред. Приведенные модели применимы также для известных случаев гауссова распределения параметров точечных источников ЗВ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Solnitsev R.* The instrumentation in human safety // ISA. South America region. Sao-Paolo, Brasil, 1995. Desembo. P. 412—415.
2. *Сольницев Р. И., Коршунов Г. И.* Инновационный проект „Замкнутая система управления природа—техногеника“ // Изв. ГУАП. 2011. № 1. С. 145—152.
3. *Сольницев Р. И.* Вопросы построения замкнутой системы управления „Природа—Техногеника“ // Изв. ЛЭТИ. 2009. № 7. С. 21—32.
4. Теория автоматического управления / Под ред. *В. В. Солодовникова*. М.: Машиностроение, 1967.
5. *Дульнев Г. Н.* Тепло- и массообмен в радиоэлектронной аппаратуре. М.: Высш. школа, 1989.
6. *Белов С. В., Барбинов Ф. А., Козьянов А. Ф.* и др. Охрана окружающей среды. М.: Высш. школа, 1990.
7. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. М.—Л.: ГИТТЛ, 1951. Т. IV.

Сведения об авторах

Ремир Иосифович Сольницев — д-р техн. наук, профессор; Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, кафедра системного анализа и логистики; E-mail: remira70@mail.ru

Геннадий Иванович Коршунов — д-р техн. наук, профессор; Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, кафедра инноватики и управления качеством; E-mail: kgi@pantes.ru

Рекомендована кафедрой
инноватики и управления качеством

Поступила в редакцию
24.05.12 г.