ЭЛЕКТРОННЫЕ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ УСТРОЙСТВА

УДК 621.396:681.323

С. И. Зиатдинов

КОМПЕНСАЦИЯ ЗАДЕРЖКИ СИГНАЛА В ЦИФРОВЫХ СГЛАЖИВАЮЩИХ ФИЛЬТРАХ

Показано, что подавление узкополосных помех сглаживающими фильтрами приводит к значительной задержке сигнала. Исследована возможность компенсации задержки сигнала экстраполяторами. Оценено влияние экстраполяторов на уровень шумов квантования.

Ключевые слова: *дискретизация сигнала, подавление помехи, задержка сигнала, экстраполирование, шумы квантования.*

В цифровых системах обработки сигналов помимо узкополосных и широкополосных помех дополнительно действуют шумы квантования сигнала по уровню, вызванные работой аналого-цифрового преобразователя.

Рассмотрим задачу выделения гармонического сигнала на фоне шумов квантования и гармонической помехи с частотой $\omega_{\text{п}}$. Для снижения влияния помех используются сглаживающие фильтры с необходимой частотной характеристикой. Однако применение сглаживающих фильтров неизбежно приводит к задержке сигнала, что в ряде практических случаев недопустимо.

Пусть в качестве сглаживающих фильтров используются фильтры Баттерворта нижних частот [см. лит.], имеющие наиболее крутой спад амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) в области высоких частот.

В непрерывном варианте частотные передаточные функции фильтров Баттерворта имеют вид

$$W_s(j\omega) = 1 \Bigg/ \left[1 + \sum_{i=1}^{s} a_i \left(j\frac{\omega}{\omega_0} \right)^i \right], \qquad (1)$$

где s — порядок фильтра, ω_0 — частота среза, a_i — весовые коэффициенты.

При этом для фильтра первого порядка (s=1) $a_1 = 1$; второго (s=2) — $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = 1$; третьего (s=3) — $a_1 = 2$, $a_2 = 2$ $a_3 = 1$; четвертого (s=4) — $a_1 = 2,613$; $a_2 = 3,414$; $a_3 = 2,613$; $a_4 = 1$.

Сделав замену в формуле (1)

$$j\omega = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1},$$

где $z = e^{j\omega T}$, T — период дискретизации входного сигнала, получим частотную передаточную функцию дискретного фильтра Баттерворта в плоскости z

$$W_S(z) = a_1(1+z^{-1})^s \Bigg/ \left[1+\sum_{i=1}^{s} b_i z^{-i}\right]. \qquad (2)$$

Здесь

для s=1:

$$a_1 = T/(T+2\omega_0^{-1});\;\; b_1 = (T-2\omega_0^{-1})\big/(T+2\omega_0^{-1});$$

для s=2:

$$a_1 = T^2\big/(4\omega_0^{-2}+2\sqrt{2}T\omega_0^{-1}+T^2);\;\; b_1 = 2(T^2-4\omega_0^{-2})\big/(4\omega_0^{-2}+2\sqrt{2}T\omega_0^{-1}+T^2);$$

$$b_2 = (4\omega_0^{-2}-2\sqrt{2}T\omega_0^{-1}+T^2)\big/(4\omega_0^{-2}+2\sqrt{2}T\omega_0^{-1}+T^2);$$

для s=3:

$$a_1 = T^3\big/(8\omega_0^{-3}+8T\omega_0^{-2}+4T^2\omega_0^{-1}+T^3);$$

$$b_1 = -(24\omega_0^{-3}+16T\omega_0^{-2}-8T^2\omega_0^{-1}-3T^3)\big/(8\omega_0^{-3}+8T\omega_0^{-2}+4T^2\omega_0^{-1}+T^3);$$

$$b_2 = (24\omega_0^{-3}-8T\omega_0^{-2}-4T^2\omega_0^{-1}+3T^3)\big/(8\omega_0^{-3}+8T\omega_0^{-2}+4T^2\omega_0^{-1}+T^3);$$

$$b_3 = -(8\omega_0^{-3}-8T\omega_0^{-2}+4T^2\omega_0^{-1}-T^3)\big/(8\omega_0^{-3}+8T\omega_0^{-2}+4T^2\omega_0^{-1}+T^3);$$

для s=4:

$$a_1 = T^4\big/(16\omega_0^{-4}+20,904T\omega_0^{-3}+13,656T^2\omega_0^{-2}+5,226T^3\omega_0^{-1}+T^4);$$

$$b_1 = -\frac{64\omega_0^{-4}+41,808T\omega_0^{-3}-5,226T^3\omega_0^{-1}-4T^4}{16\omega_0^{-4}+20,904T\omega_0^{-3}+13,656T^2\omega_0^{-2}+5,226T^3\omega_0^{-1}+T^4};$$

$$b_2 = \frac{96\omega_0^{-4}-27,312T^2\omega_0^{-2}+64T^4}{16\omega_0^{-4}+20,904T\omega_0^{-3}+13,656T^2\omega_0^{-2}+5,226T^3\omega_0^{-1}+T^4};$$

$$b_3 = -\frac{64\omega_0^{-4}-41,808T\omega_0^{-3}+10,542T^3\omega_0^{-1}-4T^4}{16\omega_0^{-4}+20,904T\omega_0^{-3}+13,656T^2\omega_0^{-2}+5,226T^3\omega_0^{-1}+T^4};$$

$$b_4 = \frac{16\omega_0^{-4}-20,904T\omega_0^{-3}+13,656T^2\omega_0^{-2}-5,226T^3\omega_0^{-1}+T^4}{16\omega_0^{-4}+20,904T\omega_0^{-3}+13,656T^2\omega_0^{-2}+5,226T^3\omega_0^{-1}+T^4}.$$

Подавление гармонической помехи. Соотношение (2) позволяет записать АЧХ дискретных фильтров Баттерворта в виде

$$W_s(\omega) = a_1 2^s \cos^s(\omega T/2) \Bigg/ \sqrt{\left(1+\sum_{i=1}^{s} b_i \cos i\omega T\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{s} b_i \sin i\omega T\right)^2}. \qquad (3)$$

Из данной формулы видно, что для частоты ω, равной половине частоты дискретизации $\omega_д = 2\pi/T$, коэффициент передачи фильтра равен нулю. Следовательно, с учетом периодичности функции cos$x$ при частоте помехи $\omega_п = \pi(1+2k)/T$ для k=0,1,2… имеет место полное подавление сигнала помехи. На практике обеспечить данное соотношение не всегда удается. В табл. 1 приведены результаты расчетов АЧХ дискретных фильтров Баттерворта вблизи частоты $f = 1/2T$ при T=0,01 с и $\omega_0 = 25$ с$^{-1}$.

Таблица 1

f, Гц		15	20	25	30	35	40	45	50
$W_s(f)$	s=1	0,238	0,170	0,124	0,090	0,064	0,041	0,020	0
	s=2	0,060	0,030	0,016	0,008	0,004	$1{,}6\cdot10^{-3}$	$3{,}9\cdot10^{-4}$	0
	s=3	$1{,}48\cdot10^{-2}$	$5{,}1\cdot10^{-3}$	$2{,}0\cdot10^{-3}$	$7{,}49\cdot10^{-4}$	$2{,}58\cdot10^{-4}$	$6{,}7\cdot10^{-5}$	$7{,}76\cdot10^{-5}$	0
	s=4	$3{,}6\cdot10^{-3}$	$8{,}76\cdot10^{-4}$	$2{,}44\cdot10^{-4}$	$6{,}80\cdot10^{-5}$	$1{,}64\cdot10^{-5}$	$2{,}72\cdot10^{-6}$	$1{,}53\cdot10^{-7}$	0

Из представленных данных следует, что подавление помехи на уровне 40 дБ достигается для фильтра первого порядка при $f_\text{п}$>45 Гц; второго — при $f_\text{п}$>30 Гц; третьего — при $f_\text{п}$>15 Гц, четвертого — при $f_\text{п}$>10 Гц.

Время задержки τ сигнала фильтром равно $\tau_1 = 1/\omega_0$ для s=1; $\tau_2 = \sqrt{2}/\omega_0$ — для s=2; $\tau_3 = 2/\omega_0$ — для s=3 и $\tau_4 = 2{,}613/\omega_0$ — для s=4. При $\omega_0 = 25$ с$^{-1}$ задержка сигнала фильтрами составит 40; 56,6; 80 и 104,5 мс соответственно.

Определим значение ошибки, вносимой сглаживающим фильтром при передаче гармонического сигнала $\alpha(t) = A\sin(\beta t + \psi)$, где A — амплитуда, β — круговая частота и ψ — случайная начальная фаза, равномерно распределенная на интервале –π—π.

Выходной сигнал фильтра можно записать как $\alpha_\text{ф}(t) = A_\text{ф}\sin[\beta(t-\tau)+\psi]$, где $A_\text{ф}$, τ — амплитуда и время задержки сигнала.

При этом дисперсия ошибки составит

$$D = \overline{[\alpha(t) - \alpha_\text{ф}(t)]^2} = 0{,}5A^2\left(1 + \frac{A_\text{ф}^2}{A^2} - 2\frac{A_\text{ф}^2}{A^2}\cos\beta\tau\right). \quad (4)$$

Для примера положим $\omega_0 = 25$ с$^{-1}$, β=1,884 с$^{-1}$. Тогда отношение $(A - A_\text{ф})/A < 0{,}2\,\%$ для всех порядков фильтров. При этом в выражении (4) без заметной погрешности можно положить $A_\text{ф} = A$.

В результате получим $D = 2A^2\sin^2(\beta\tau/2)$. Относительное среднеквадратическое отклонение составит $\Delta = 2\sin(\beta\tau/2)$.

Результаты расчетов Δ при $\omega_0 = 25$ с$^{-1}$, β=1,884 с$^{-1}$ для фильтров различных порядков приведены в табл. 2.

Таблица 2

s	1	2	3	4
τ, мс	40	56,6	80	104,5
Δ, %	7,5	10,7	15,1	19,7

Рассмотрим возможность применения экстраполятора для снижения ошибок, связанных с задержкой сигнала сглаживающими фильтрами. В дискретном виде передаточная функция экстраполятора может быть представлена следующим образом:

$$W_\text{э}(j\omega) = \sum_{i=0}^{m} b_{\text{э}i} e^{-i(j\omega T)},$$

где $b_{\text{э}i}$ — коэффициенты экстраполирования; m — степень экстраполирования; T — период следования отсчетов входного сигнала экстраполятора.

В случае линейной экстраполяции алгоритм работы экстраполятора имеет вид

$$\alpha_\text{э}(t) = \alpha_\text{ф}(t) + \dot{\alpha}_\text{ф}(t)T_\text{э}, \quad (5)$$

где $\dot{\alpha}_\text{ф}$ — производная сигнала на выходе фильтра Баттерворта; $T_\text{э}$ — интервал экстраполирования.

С учетом затухания сигнала в фильтре

$$\alpha_{\text{ф}}(t) = W_s(\omega)\alpha(t-\tau),$$

где $W_s(\omega)$ — коэффициент передачи фильтра; τ — время задержки сигнала в фильтре.

Согласно [1]

$$W_s^2(\omega) = 1\Bigg/\left[1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2s}\right].$$

При использовании для вычисления производной $\dot{\alpha}_{\text{ф}}(t)$ первой обратной разности выражение (5) в дискретной форме принимает вид

$$\alpha_{\text{э}}[k] = W_s(\omega)\left\{\alpha[k-T_{\text{э}}/T]+\frac{T}{T_{\text{э}}}\{\alpha[k-T_{\text{э}}/T]-\alpha[k-1-T_{\text{э}}/T]\}\right\},$$

где k — дискретное время.

Тогда дисперсия ошибки, вносимой задержкой сигнала фильтром, запишется в виде

$$D = \overline{\{\alpha[k]-\alpha_{\text{э}}[k]\}^2} = \sigma_\alpha^2[1+2W_s^2(\omega)T_{\text{э}}T^{-1}+2W_s^2(\omega)T_{\text{э}}^2T^{-2}-2W_s(\omega)(1+T_{\text{э}}T^{-1})\rho(T_{\text{э}})+$$
$$+2W_s(\omega)T_{\text{э}}T^{-1}\rho(T_{\text{э}}+T)-2W_s^2(\omega)T_{\text{э}}T^{-1}(1+T_{\text{э}}T^{-1})\rho(T)],$$

где σ_α, $\rho(\tau)$ — среднеквадратичное отклонение (СКО) и коэффициент корреляции сигнала на входе фильтра.

Для ранее принятой гармонической модели входного сигнала $\alpha(t) = A\sin(\beta t+\psi)$ $\rho(\tau) = \cos\beta\tau$.

Результаты расчетов $\Delta = \sqrt{D/\sigma_\alpha^2}$ при $\omega_0 = 25$ с$^{-1}$, β=1,884 с$^{-1}$, T=0,01 с для фильтров различных порядков приведены в табл. 3.

Таблица 3

s	1	2	3	4
τ, мс	40	56,6	80	104,5
Δ, %	0,07	0,7	1,3	2,1

Полученные данные показывают, что применение экстраполятора позволяет резко снизить влияние задержки сигнала в сглаживающем фильтре.

Влияние шумов квантования. Квантование по уровню входного сигнала приводит к появлению дополнительных шумов на входе фильтра. Шумы квантования принято считать белым дискретным шумом с дисперсией $D_{\text{к}} = \delta^2/12$ и спектральной плотностью $N_{\text{к}} = T\delta^2/12$, где δ — цена младшего разряда аналого-цифрового преобразователя; T — период дискретизации.

Тогда дисперсия шумов квантования на выходе фильтра может быть найдена из соотношения

$$D_{\text{ф}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W_s^2(\omega)N_{\text{к}}d\omega = N_{\text{к}}\Delta W_s,$$

где $\Delta W_s = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W_s^2(\omega)d\omega$ — эквивалентная полоса пропускания фильтра.

Результаты расчетов ΔW_s и отношения среднеквадратических значений шумов квантования на входе и выходе фильтра при $\omega_0 = 25$ с$^{-1}$, T=0,01 с приведены в табл. 4.

Таблица 4

s	1	2	3	4
ΔW_s, Гц	11,87	8,84	8,34	8,17
$\sigma_ф/\sigma_к$	0,345	0,297	0,289	0,286

Дисперсия шумов квантования на выходе экстраполятора находится по формуле

$$D_э = \overline{\alpha_э^2(t)} = \overline{\alpha_ф(t) + (T_э / T)[\alpha_ф(t) - \alpha_ф(t-T)]^2},$$

где $\alpha_ф(t)$ — выходной сигнал сглаживающего фильтра.

Нетрудно показать, что

$$D_э = \sigma_ф^2 \left[1 + 2(T_э / T) + 2(T_э / T)^2 - 2(T_э / T)(1 + (T_э / T))\rho_ф(T)\right],$$

где $\sigma_ф$, $\rho_ф(\tau)$ — СКО и коэффициент корреляции выходного сигнала сглаживающего фильтра:

$$\rho_ф(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W_s^2(\omega) N_к \cos(\omega\tau) d\omega / \sigma_ф^2.$$

Результаты расчетов интервала корреляции $\rho_ф(T)$ и отношения среднеквадратических значений шумов квантования на выходе и входе экстраполятора при $\omega_0 = 25$ с$^{-1}$, T=0,01 с приведены в табл. 5.

Таблица 5

s	1	2	3	4
ΔW_s, Гц	11,87	8,84	8,34	8,17
$\rho_ф(T)$	0,826	0,973	0,985	0,987
$\sigma_ф/\sigma_к$	2,82	1,75	1,79	2,02

Из приведенных данных видно, что экстраполятор увеличивает уровень шумов квантования практически в два раза.

Таким образом, по результатам работы можно сделать следующие выводы:

1) применение цифровых сглаживающих фильтров позволяет эффективно подавлять узкополосные помехи;

2) для устранения задержки сигнала в сглаживающем фильтре необходимо использовать экстраполяторы;

3) экстраполяторы увеличивают уровень шумов квантования.

ЛИТЕРАТУРА

Бесекерский В. А., Зиатдинов С. И. Цифровое дифференцирование сигналов пространственного положения управляемого объекта // Гироскопия и навигация. 1999. № 1(24). С. 66—77.

Сведения об авторе

Сергей Ильич Зиатдинов — д-р техн. наук, профессор; Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, кафедра информационно-сетевых технологий; E-mail: Kaf53@GUAP.ru

Рекомендована кафедрой
информационно-сетевых технологий

Поступила в редакцию
29.09.10 г.